JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Institut, professeur d'Analyse à l'École Polytechnique

TOME SEPTIÈME.

ANNÉE 1842.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1842

TABLE DES MATIÈRES.

TOME VII.

Pages.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
163.	11.	*après* ligne, *ajoutez* droit.
281.		*après* qui sont, *ajoutez* plus grandes de.
321.	18.	*au lieu de* espace intérieur, *lisez* espace extérieur.
324.	10.	*au lieu de* espace extérieur, *lisez* espace intérieur.
358.	17.	*après* degré $m-1$, *ajoutez* et que N et P sont premiers entre eux.

// JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

NOTE
SUR LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES;

PAR E. CATALAN.

I.

Si l'on donne aux entiers m et n toutes les valeurs possibles, différentes de l'unité, on aura

$$\sum \frac{1}{m^n - 1} = 1; \tag{1}$$

*pourvu que dans cette somme, on ne compte qu'*une seule fois *une même fraction résultant de deux ou plusieurs systèmes de valeurs attribuées à m et n* [*].

Ce théorème curieux est dû à Goldbach. Dans les *Commentaires de Pétersbourg,* pour l'année 1737, Euler le démontre à l'aide de la série divergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ On peut éviter l'emploi de cette série, et établir la démonstration d'une manière plus rigoureuse, comme il suit.

---

[*] Par exemple, la fraction

$$\frac{1}{4095} = \frac{1}{2^{12} - 1} = \frac{1}{4^6 - 1} = \frac{1}{8^4 - 1} = \frac{1}{16^3 - 1} = \frac{1}{64^2 - 1}$$

ne doit être comptée qu'une seule fois dans la somme.

Représentons par p un quelconque des nombres $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \ldots$; nous aurons à démontrer l'équation

$$\sum \frac{1}{p-1} = 1. \tag{2}$$

Soit r la plus petite racine de p; soit n l'indice de cette racine [*]. Le théorème énoncé reviendra à celui-ci :

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = 1. \tag{3}$$

En faisant $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, nous aurons

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r^2-1} + \sum \frac{1}{r^3-1} + \sum \frac{1}{r^4-1} + \ldots$$

Or,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\right),\\
&\sum \frac{1}{r^3-1} = \sum \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \ldots\right),\\
&\sum \frac{1}{r^4-1} = \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Ajoutant les termes placés dans une même colonne verticale, j'obtiens

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\sum \frac{1}{r^n-1} = &\sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \ldots\right)\\
&+ \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^8} + \ldots\right)\\
&+ \sum \left(\frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right.$$

ou bien, en sommant chaque progression,

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r(r-1)} + \sum \frac{1}{r^2(r^2-1)} + \sum \frac{1}{r^3(r^3-1)} + \ldots \tag{6}$$

---

[*] Dans tout le cours de cette Note, nous continuerons à représenter par p un *nombre-puissance*, par r un nombre *non-puissance*, et par m ou n des nombres entiers quelconques, différents de l'unité.

Les termes qui entrent dans une quelconque de ces sommes sont essentiellement différents de ceux qui entrent dans toutes les autres, puisque r n'est pas une puissance; donc on reproduira tous ces termes si l'on prend la seule quantité $\frac{1}{m(m-1)}$, et qu'on attribue à m toutes les valeurs entières possibles, différentes de l'unité. Par suite,

$$(7) \qquad \sum \frac{1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{m(m-1)}.$$

Mais on a, par une formule connue, qu'il est aisé de démontrer,

$$\sum \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1:$$

donc enfin

$$\sum \frac{1}{p-1} = 1.$$

II.

Reprenons l'équation (5),

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{r^n-1} = & \sum\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\right) \\ & + \sum\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \ldots\right) \\ & + \sum\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

et groupons les termes semblables; nous aurons

$$(8) \qquad \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^4} + \frac{1}{r^5} + \frac{3}{r^6} + \frac{1}{r^7} + \frac{3}{r^8} + \ldots\right).$$

Il est facile de voir que le numérateur de chaque fraction est égal au nombre des diviseurs de l'exposant correspondant, autres que l'unité.

Ainsi, en appelant i le nombre des diviseurs de n,

$$(9) \qquad \sum \frac{i-1}{r^n} = 1.$$

III.

L'équation (5) peut encore se mettre sous la forme

$$\sum \frac{1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \sum \frac{1}{m^4} + \sum \frac{1}{m^5} + \ldots \tag{10}$$

On sait que la somme des puissances $-n$ des nombres naturels, différents de l'unité, est toujours une quantité transcendante. L'équation précédente montre que si l'on fait varier n de 2 à l'infini, et qu'on ajoute toutes ces sommes, on obtient pour résultat l'unité. Cette remarque avait, je crois, été faite.

IV.

Problème. *On demande de déterminer* $\sum \frac{n-1}{r^n - 1}$.

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, nous aurons d'abord

$$\sum \frac{n-1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{r^2 - 1} + \sum \frac{2}{r^3 - 1} + \sum \frac{3}{r^4 - 1} + \ldots; \tag{11}$$

ensuite

$$\sum \frac{1}{r^2 - 1} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\right),$$

$$\sum \frac{2}{r^3 - 1} = \sum \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^6} + \frac{2}{r^9} + \ldots\right),$$

$$\sum \frac{3}{r^4 - 1} = \sum \left(\frac{3}{r^4} + \frac{3}{r^8} + \frac{3}{r^{12}} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, en ajoutant les termes placés verticalement,

$$\left\{\begin{aligned} \sum \frac{n-1}{r^n - 1} = &\sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \ldots\right) \\ &+ \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{2}{r^6} + \frac{3}{r^8} + \ldots\right) \\ &+ \sum \left(\frac{1}{r^6} + \frac{2}{r^9} + \frac{3}{r^{12}} + \ldots\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ici, comme dans le § I, on peut réduire toutes ces sommes à une seule, et écrire

$$(13) \qquad \sum \frac{n-1}{r^n-1} = \sum \left(\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \frac{3}{m^4} + \frac{4}{m^5} + \ldots \right).$$

Posons

$$S = \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \frac{3}{m^4} \ldots;$$

nous aurons, en multipliant par $\frac{1}{m}$ et retranchant :

$$S\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \ldots = \frac{1}{m(m-1)}.$$

Cette équation donne

$$S = \frac{1}{(m-1)^2}.$$

Par suite,

$$\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots.$$

La somme des carrés des inverses des nombres naturels est égale à $\frac{\pi^2}{6}$; donc aussi

$$(14) \qquad \sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

V.

Problème. *On demande de déterminer* $\sum \frac{1}{r^{2n}-1}$.

Un raisonnement identique avec celui du § I conduit à

$$(15) \qquad \sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \sum \frac{1}{m^2(m^2-1)}.$$

Or,

$$\frac{1}{m^2(m^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) - \frac{1}{m^2};$$

donc

$$\sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) - \sum \frac{1}{m^2}.$$

Mais

$$\sum\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2};$$

$$\sum\frac{1}{m^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}-1.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (15) devient

(16) $$\sum\frac{1}{r^{2n}-1}=\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\text{environ } 0,105066.$$

Ce résultat se trouve démontré d'une autre manière dans le Mémoire d'Euler.

Remarquons, en passant, l'équation

(17) $$\sum\frac{1}{m^2-1}=\frac{3}{4}.$$

VI.

Problème. *Déterminer* $\sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}$.

Le problème du § IV donne, par le changement de m en m^2 :

(18) $$\sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}=\sum\frac{1}{(m^2-1)^2}.$$

On a

$$\frac{1}{(m^2-1)^2}=\frac{1}{4(m+1)^2}+\frac{1}{4(m-1)^2}-\frac{1}{2(m^2-1)};$$

donc

$$\sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right)-\frac{3}{8}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}.$$

ou

(19) $$\sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{11}{16}=\text{environ } 0,134967.$$

Si, au double du premier membre, nous ajoutons $\sum\frac{1}{r^{2n}-1}$, nous obtiendrons, par l'équation (16),

(20) $$\sum \frac{2n-1}{r^{2n}-1} = \frac{3}{8}.$$

Ainsi,

$$\frac{3}{15} + \frac{5}{63} + \frac{3}{80} + \frac{7}{255} + \frac{3}{624} + \frac{5}{728} + \ldots = \frac{3}{8}.$$

Nous avons trouvé, plus haut,

$$\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En combinant cette équation avec l'équation (20), nous obtiendrons

$$\sum\left(\frac{1}{r^2-1} + \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} + \ldots\right) - 2\sum\left(\frac{3}{r^4-1} + \frac{5}{r^6-1} + \frac{7}{r^8-1} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4},$$

ou

(21) $$\sum\left(\frac{1}{r^2-1} + \frac{2}{r^3-1} - \frac{3}{r^4-1} + \frac{4}{r^5-1} - \frac{5}{r^6-1} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4}.$$

Dans la parenthèse, tous les termes, à partir du second, sont alternativement positifs et négatifs. Pour obtenir une formule plus symétrique, retranchons les deux membres de $2\sum \frac{1}{r^2-1}$, il viendra

$$\sum\left(\frac{1}{r^2-1} - \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} - \frac{4}{r^5-1} + \ldots\right) = 2\sum \frac{1}{r^2-1} + \frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

On a évidemment

$$\sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \frac{1}{m^2-1} - \sum \frac{1}{p^2-1};$$

ou, par la formule (17),

$$\sum \frac{1}{r^2-1} = \frac{3}{4} - \sum \frac{1}{p^2-1}.$$

Mais, p étant une puissance, son carré est égal à une puissance de degré pair, d'un nombre *non-puissance;* donc

$$\sum \frac{1}{p^2 - 1} = \sum \frac{1}{r^{2n} - 1}.$$

Ainsi, d'une part,

(22) $$\sum \frac{1}{r^2 - 1} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

à cause de la formule (16); et ensuite

(23) $$\sum \left(\frac{1}{r^2 - 1} - \frac{2}{r^3 - 1} + \frac{3}{r^4 - 1} - \frac{4}{r^5 - 1} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$
$$= \text{environ } 0,394934.$$

Enfin, de $\frac{1}{r^{2n} - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^n - 1} - \frac{1}{r^n + 1} \right)$ on déduit, par les équations (1) et (16),

(24) $$\sum \frac{1}{r^n + 1} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} = \text{environ } 0,739\,868.$$

VII.

Le théorème de Goldbach consiste, comme nous avons vu, en ce que $\sum \frac{1}{r^n - 1} = 1$. Essayons d'évaluer $\sum \frac{1}{m^n - 1}$, chaque fraction étant prise autant de fois qu'elle se présente.

Observons que $\frac{1}{p^N - 1}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{r^n - 1}$, n étant un multiple de N. Donc si r et n sont des nombres déterminés, il y aura, dans notre série, autant de fractions équivalentes à $\frac{1}{r^n - 1}$ que n admet de diviseurs différents de 1. Nous aurons donc

(25) $$\sum \frac{1}{m^n - 1} = \sum \frac{i - 1}{r^n - 1},$$

i étant le nombre des diviseurs de n.

Comme nous ne pouvons exprimer sous forme finie la somme qui se trouve dans le second membre, il est important d'obtenir une quantité plus grande que cette somme. Or, on a toujours $i < n$; donc

$$\sum \frac{i - 1}{r^n - 1} < \sum \frac{n - 1}{r^n - 1}.$$

Cette dernière somme a été trouvée égale à $\frac{\pi^2}{6}$; donc

$$(26)\qquad \sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1,644934\ldots.$$

Ainsi la somme des fractions de la forme $\frac{1}{m^n-1}$ étant 1 quand on ne compte qu'une fois chacune d'elles, n'est pas augmentée de 0,645 par le fait de la reproduction de ces fractions. Nous trouverons, dans le paragraphe suivant, une limite supérieure plus approchée. On peut, du reste, transformer la série des fractions de manière à la rendre beaucoup plus convergente. En effet, l'identité

$$\frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(r^n-1)r^n}$$

donne

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} = \sum \frac{i-1}{r^n} + \sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n};$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (9),

$$(27)\qquad \sum \frac{i-1}{r^n-1} = 1 + \sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n}.$$

Nous aurons ainsi

$$(28)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{1}{m^n-1} = 1 &+ \frac{1}{3.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{2}{15.16} + \\ &+ \frac{1}{24.25} + \frac{1}{26.27} + \frac{1}{31.32} + \frac{1}{35.36} + \ldots \end{aligned} \right.$$

VIII.

PROBLÈME. *Calculer* $\sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n}$.

De $\frac{1}{(r^n-1)r^n} = \frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n}$ on conclut

$$\sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \sum \frac{n-1}{r^n-1} - \sum \frac{n-1}{r^n}.$$

Nous avons trouvé, (14), $\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}$. En outre, si l'on remplace m

par r dans la valeur de S du § IV, on aura

$$\sum \frac{n-1}{r^n} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \ldots\right) = \sum \frac{1}{(r-1)^2};$$

donc

$$(29) \qquad \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \frac{\pi^2}{6} - \sum \frac{1}{(r-1)^2}.$$

Ainsi la sommation proposée est ramenée à la recherche de $\sum \frac{1}{(r-1)^2}$. Nous pouvons encore simplifier la formule (29); car on a évidemment

$$\sum \frac{1}{(r-1)^2} = \sum \frac{1}{(m-1)^2} - \sum \frac{1}{(p-1)^2};$$

d'où, à cause de $\sum \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$$(30) \qquad \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \sum \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Il résulte de cette dernière formule, que les deux séries

$$\frac{1}{3.4} + \frac{2}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{3}{15.16} + \frac{1}{24.25} + \frac{2}{26.17} + \frac{4}{31.32} + \frac{1}{35.36} + \frac{1}{48.49} + \frac{5}{63.64} + \ldots,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{24}\right)^2 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 + \left(\frac{1}{31}\right)^2 + \left(\frac{1}{35}\right)^2 + \left(\frac{1}{48}\right)^2 + \left(\frac{1}{63}\right)^2 + \ldots$$

ont la même limite.

En réduisant en décimales les douze premiers termes de chaque série, on trouve, pour la première somme,

$$0,15643\ldots,$$

et pour la seconde

$$0,15714\ldots$$

Le second résultat est plus grand que le premier, parce que les dénominateurs des secondes fractions sont moindres que ceux des fractions correspondantes ; mais plus tard, les nombres de diviseurs devenant de plus en plus considérables, les termes de la première série seront, en partie, plus grands que ceux qui leur correspondent dans la seconde, ce qui établira la compensation.

Revenons actuellement à l'équation (27). Comme i est nécessairement moindre que n, on a

$$\sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n} < \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n};$$

donc

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1 + \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n};$$

et en mettant pour cette dernière somme la valeur ci-dessus,

$$(31) \qquad \sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1,15714\ldots$$

On voit donc que la somme des fractions $\frac{1}{m^n-1}$ est moindre que 1,15714. Ainsi que nous l'avons annoncé, cette limite supérieure est plus basse que celle qui a été donnée ci-dessus (26).

Les treize premiers termes de la série (28), étant réduits en décimales, donnent

$$(32) \qquad \sum \frac{1}{m^n-1} > 1,11947\ldots$$

Je crois pouvoir affirmer que cette valeur est approchée à moins de 0,01. Par conséquent,

$$(33) \qquad \sum \frac{1}{m^n-1} = \text{environ } 1,12.$$

IX.

Parmi les théorèmes contenus dans le Mémoire d'Euler, nous remarquerons encore celui-ci :

a étant un nombre pair quelconque, et n un entier plus grand que l'unité ; la somme des fractions de la forme $\frac{1}{a^n-1}$ *est égale au loga-*

rithme népérien de 2, si l'on ne compte qu'une seule fois chaque fraction qui se reproduit.

Euler démontre ce théorème, aussi bien que le premier, en employant la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Pour déterminer $\sum \frac{1}{a^n - 1}$, cherchons $\sum \frac{1}{b^n - 1}$, b étant un nombre impair quelconque, différent de 1.

En appliquant encore la méthode de démonstration du premier paragraphe, nous trouverons

$$\sum \frac{1}{b^n - 1} = \sum \frac{1}{b(b-1)} = \sum \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b}\right);$$

donc

(34) $$\sum \frac{1}{b^n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

Mais on a, d'une part,

$$l(1+1) = l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

et d'autre part,

$$\sum \frac{1}{a^n - 1} - \sum \frac{1}{b^n - 1} = \sum \frac{1}{r^n - 1} = 1;$$

d'où, en substituant,

(35) $$\sum \frac{1}{a^n - 1} = l.2.$$

Les équations (14), (19), (22), (23), (24), (30), (33) expriment des théorèmes assez curieux. Ceux du § VIII exigeraient, pour être plus précis, que l'on pût trouver $\sum \frac{1}{(p-1)^2}$ sous forme finie. J'ignore si cette question a été résolue.

MÉMOIRE
SUR LA DÉLIMITATION DE L'ONDE
DANS LA PROPAGATION
DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES;

Présenté à l'Académie des Sciences, le 14 juin 1841,

PAR M. P.-H. BLANCHET,

Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV.

1. Il n'est peut-être pas sans intérêt de faire ressortir des formules générales de la propagation des mouvements vibratoires une délimitation absolue de l'onde. Ce caractère se trouve dans les intégrales de M. Poisson et dans celles de M. Ostrogradsky, pour le cas particulier de la propagation sphérique. L'Académie n'a pas oublié sans doute l'importance qu'y attachait le grand géomètre qu'elle a perdu.

2. Les équations générales des mouvements vibratoires dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, peuvent s'écrire symboliquement sous la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mathcal{L}_1 - s^2)\xi + \mathcal{R}_2\eta + \mathcal{Q}_3\zeta = 0,\\ &\mathcal{R}_1\xi + (\mathcal{M}_2 - s^2)\eta + \mathcal{P}_3\zeta = 0,\\ &\mathcal{Q}_1\xi + \mathcal{P}_2\eta + (\mathcal{N}_3 - s^2)\zeta = 0.\end{aligned}\right.$$

$\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ sont des polynomes homogènes du deuxième degré par rapport à trois variables u, v, w. Les exposants de ces quantités et de s correspondent respectivement à des différentiations par rapport aux variables x, y, z, t, effectuées sur les quantités ξ, η, ζ, fonctions de ces dernières variables.

J'applique la belle méthode d'intégration, donnée par M. Cauchy dans les deuxième et troisième livraisons de ses *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, et je trouve les formules suivantes, aussi générales et plus simples que celles de mon premier Mémoire, inséré au tome V de ce Journal :

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
\xi &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(S)}
\left\{\begin{aligned}
&s\,[\mathbf{L}_1 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{R}_1 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{Q}_1 f_3(\lambda,\mu,\nu)]\\
-&\sqrt{-1}\,[\mathbf{L}_1 \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{R}_1 \mathrm{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{Q}_1 \mathrm{f}_3(\lambda,\mu,\nu)]
\end{aligned}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\
\eta &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(S)}
\left\{\begin{aligned}
&s\,[\mathbf{R}_2 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{M}_2 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{P}_2 f_3(\lambda,\mu,\nu)]\\
-&\sqrt{-1}\,[\mathbf{R}_2 \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{M}_2 \mathrm{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{P}_2 \mathrm{f}_3(\lambda,\mu,\nu)]
\end{aligned}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\
\zeta &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(S)}
\left\{\begin{aligned}
&s\,[\mathbf{Q}_3 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{P}_3 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{N}_3 f_3(\lambda,\mu,\nu)]\\
-&\sqrt{-1}\,[\mathbf{Q}_3 \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{P}_3 \mathrm{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathbf{N}_3 \mathrm{f}_3(\lambda,\mu,\nu)]
\end{aligned}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.
\end{aligned}\right.
$$

Dans ces formules on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S} = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{M}_2 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3(\mathfrak{L}_1 - s^2) - \mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_3(\mathfrak{M}_2 - s^2) \\ - \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{R}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_3 + \mathfrak{R}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_1. \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} L_1 = (\mathfrak{M}_2 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3, & R_1 = -\mathfrak{R}_2(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_3, \\ & Q_1 = -\mathfrak{Q}_3(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_2\mathfrak{P}_3, \\ M_2 = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_3, & R_2 = -\mathfrak{R}_1(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_1, \\ & P_2 = -\mathfrak{P}_3(\mathfrak{L}_1 - s_2) - \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_2. \\ N_3 = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2, & P_3 = -\mathfrak{P}_2(\mathfrak{L}_1 - s^2) + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_2, \\ & Q_3 = -\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{P}_2. \end{array}\right.$$

Sous les signes $\int$, les lettres L_1, R_1, Q_1, R_2, ... représentent des fonctions de u, v, w, s^2, regardés comme des quantités. On pourrait les mettre hors des signes $\int$ et du signe $\mathcal{E}$, pourvu qu'on y remplaçât u, v, w, par D_x, D_y, D_z, et s^2 par D^2_t. Il nous sera plus commode de ne pas le faire.

3. L'inspection des expressions de ξ, η, ζ fait voir qu'elles satisfont aux équations (1), car la quantité (3) se reproduit en numérateur et le résidu se trouve nul.

Elles satisfont aussi aux conditions initiales, car, pour $t = 0$,

$$\mathcal{E}\frac{-sL_1}{((\mathfrak{S}))} = 1, \quad \mathcal{E}\frac{-sR_1}{((\mathfrak{S}))} = 0, \quad \mathcal{E}\frac{-sQ_1}{((\mathfrak{S}))} = 0; \quad \xi = f_1(x, y, z).$$

De même,

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{f}_1(x, y, z), \text{ etc.}$$

4. La méthode de réduction que j'ai donnée dans mon premier Mémoire est applicable à ces formules. Désignons toujours par s'^2, s''^2, s'''^2 les trois racines, supposées réelles, de l'équation

$$\mathfrak{S} = 0,$$

du troisième degré en s^2. Si nous gardons le signe général s pour représenter l'une des valeurs positives s', s'', s'''; en prenant les résidus partiels, nous trouverons dans la valeur de ξ, par exemple, des parties de la forme

$$(5)\quad \frac{-1}{8\pi^6}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\frac{\omega s\left(e^{st\sqrt{-1}}+e^{-st\sqrt{-1}}\right)}{S'}f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

S' ne change pas quand on remplace s par $-s$. ω est un polynome homogene du quatrième degré, qui ne contient que des puissances de s^2.

Cette intégrale revient à

$$(6)\quad \frac{-1}{4\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\frac{s\omega\cos st}{S'}f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

dans laquelle $\frac{s\omega}{S'}$ est une fonction homogène de degré nul.

Elle est semblable à l'intégrale (36) du premier Mémoire. Elle se réduira de même et donnera

$$(7)\quad \frac{-1}{4\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty}\chi(s)\varphi(t,s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

au lieu de l'intégrale (62); si l'on garde les mêmes notations et si l'on remplace l'équation (61) par

$$(8)\quad \varphi(t,s)=\int\frac{-s\omega}{S'_{\prime}}\,\delta\,\frac{d\sigma}{ds}.$$

5. On pourrait donc arriver aux mèmes conclusions sur les lois de la propagation. Il serait superflu de les développer de nouveau.

6. Je dis maintenant que la propagation du mouvement est limitée dans une certaine portion de l'espace. Depuis longtemps M. Cauchy a démontré l'existence d'une limite intérieure. Elle peut se conclure de la forme de l'intégrale (95, I)[*], qui fait voir que ρ doit être plus grand

[*] (95, I) *signifie* formule (95) du premier Mémoire.

que nt. C'est, je crois, l'idée de M. Cauchy. Je me propose ici de rechercher une limite extérieure. La forme de l'intégrale (7) n'en révèle pas, à cause de la limite $+\infty$ de s.

7. Si s est très-grand par rapport à t, la section faite par le plan $u=t$, dans la surface s, n° **8**, (I)[*], sera peu différente dans sa forme de la section faite par le plan $u=0$ [**]. Cette dernière est, en général, une courbe fermée qui a pour centre l'origine des coordonnées. Par suite, un rayon vecteur r, mené de l'origine dans une direction quelconque et terminé à la courbe, aura deux valeurs égales et de signes contraires. Il n'y aura pas plus de deux valeurs de r, à cause de la nécessité des intersections du rayon vecteur avec les autres nappes de la surface des u, v, w. Pour le plan $u=t$ suffisamment voisin du précédent, le rayon vecteur, mené dans ce plan de l'origine prise sur l'axe des u, aura encore deux valeurs de signes contraires, mais non pas égales.

Soit p l'angle polaire; pour chaque valeur de p, le rayon r n'aura qu'une valeur positive. Si l'on fait la transformation

$$v = r\sin p, \quad w = r\cos p,$$

on pourra prendre pour élément différentiel du plan $u=t$ l'expression $\frac{rdr}{ds}\,dp$; ce sera le $\delta\frac{d\sigma}{ds}$ de la formule (8), et les limites de p seront 0 et 2π, par conséquent constantes. On aura

(9) $$\varphi(t,s) = \int_0^{2\pi} \frac{-s\omega}{8'}\,\frac{rdr}{ds}\,dp.$$

8. La quantité $\frac{-s\omega}{8'}$ est devenue une fonction de $r\sin p$ et de $r\cos p$. Je la désignerai pour un instant par $f(r\sin p, r\cos p)$. Si pour une valeur $\alpha+\pi$ de $p>\pi$, on a une valeur positive de r, on aura la même valeur prise négativement pour $p=\alpha$. Mais

$$f[r\sin(\alpha+\pi),\ r\cos(\alpha+\pi)] = f(-r\sin\alpha,\ -r\cos\alpha).$$

[*] N° 8 (I) *signifie* n° 8 du premier Mémoire.

[**] Nous écartons pour le moment toute particularité. Les cas particuliers seront l'objet d'un autre travail.

d'ailleurs le facteur $\frac{r\,dr}{ds}$ reste le même, quand r change de signe sans changer de valeur; donc on pourra se contenter de donner à p des valeurs plus petites que π, pourvu qu'on substitue chaque fois la valeur positive et la valeur négative de r, et qu'on ajoute les résultats. On devra alors faire l'intégration relative à p de o à π seulement.

Ce que nous disons ici pour s doit s'appliquer successivement aux trois quantités s', s'', s''' dont s est le signe général. La somme des parties de la valeur de ξ, de la forme (5), pour de grandes valeurs de s', s'', s''' et par conséquent de r sera

$$(10)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_K^{\infty}\sum\frac{-s\omega}{\mathcal{S}'_s}\frac{r\,dr}{ds}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta,$$

K étant une valeur suffisamment grande.

9. Il faudra mettre successivement s', s'', s''' à la place de s et en même temps les valeurs respectives de r en fonction de s', s'', s'''. s', s'', s''' seront des variables indépendantes dans les divers termes de la somme à laquelle se rapporte le $\sum$. Si on leur donne une même valeur s, pour considérer les éléments correspondants, les termes ne différeront les uns des autres que par les valeurs de r en fonction de s, et ces valeurs ne seront autre chose que les racines de l'équation $\mathcal{S} = 0$. La résolution de cette équation par rapport à r ne devra donner que des racines réelles de signes contraires deux à deux, si K, et par suite, s, sont des quantités assez grandes.

10. L'équation $\mathcal{S} = 0$ donne

$$\mathcal{S}'_s - \mathcal{S}_r\frac{dr}{ds} = 0.$$

Donc, par l'élimination de $\frac{dr}{ds}$, l'intégrale (10) peut prendre la forme

$$(11)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_K^{\infty}\sum\frac{-sr\omega}{\mathcal{S}_r}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\vartheta.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{K}^{\infty} \mathcal{E}\frac{-sr\omega}{((S))_r}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Les résidus seront pris par rapport à r.

11. $\frac{-r\omega}{S}$ est une fraction rationnelle en r dont le degré du dénominateur surpasse d'une unité le degré du numérateur; donc le résidu intégral est égal à [*]

$$(13)\qquad \lim\frac{-r^2\omega}{S} = \mathrm{H}.$$

C'est le rapport du coefficient de la plus haute puissance de r dans le numérateur multiplié par r au coefficient de la plus haute puissance de la même quantité dans le dénominateur. H, en général, est une fonction de p indépendante de s et t.

L'intégrale (12) s'évanouit par la différentiation relative à t, ce qui limite évidemment la propagation.

12. Dans la valeur de ξ nous trouvons aussi des parties de la forme

$$(14)\ \frac{\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\omega\left(e^{st\sqrt{-1}}-e^{-st\sqrt{-1}}\right)}{S_s'}f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

ou

$$(15)\ \frac{-1}{4\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\frac{\omega}{S_s'}\sin st\,f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Quand on fera la transformation indiquée précédemment, on trouvera

$$-\frac{d.}{dt}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty}\chi(s)\,\varphi(t,s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

---

[*] Voyez *Exercices de Mathématiques*, par M. Cauchy, page 110, formule (55), ou page 23, formule (63), année 1826.

en prenant encore

$$\varphi(t, s) = \int \frac{-s\omega}{S}\, \partial\, \frac{d\sigma}{ds},$$

on arrivera aux mêmes conséquences.

13. Il en sera de même pour les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, etc. Ainsi les points suffisamment éloignés n'auront éprouvé aucun déplacement et ne seront animés d'aucune vitesse.

14. On peut encore restreindre beaucoup la délimitation extérieure de l'onde. Pour le faire voir nous allons étendre la transformation qui donne la formule (10) du n° **8**.

Les mêmes valeurs de p et r font prendre à s trois valeurs s', s'', s''', en général inégales. Quand on regarde respectivement comme variables indépendantes les quantités s', s'', s''', dans les divers termes de la forme (7), r a la même valeur sous des formes différentes r', r'', r''' respectivement fonctions de s', s'', s'''. Si l'on remplace s', s'', s''' par une même valeur s; r', r'', r''' deviendront r_1, r_2, r_3 qui seront alors des quantités différentes. Quand r a la même valeur, les trois éléments des trois intégrales de la forme (7) correspondent à un même point M du plan; quand s aura la même valeur, les éléments des intégrales correspondront, pour la même direction p, à trois points différents M_1, M_2, M_3. Mais si l'on fait passer s par des états de grandeur communs à s', s'', s''', r_1, r_2, r_3 passeront respectivement par tous les mêmes états de grandeur que r, et, par conséquent, la somme des portions correspondantes des intégrales aura la même étendue, pourvu que dans les intégrales (7) on prenne une limite inférieure convenablement choisie.

15. Cela posé, imaginons que l'une des nappes de la surface $S = 0$, par exemple, celle qui répond à $s' = s$, soit la plus petite et enveloppée par toutes les autres. Il est aisé de voir, par la géométrie, que celle-là, pour la valeur $s = N't$, n'aura avec le plan $u = t$ qu'un simple contact du premier ordre, en un point déterminé par des coordonnées de la forme $v = gt$, $w = ht$ et par $u = t$. Il est aisé de voir encore qu'un rayon vecteur mené dans le plan $u = t$, par le point dont les coordonnées sont $v = gt$, $w = ht$, quel que soit $s > N't$, rencontrera chacune des trois nappes de la surface $\mathfrak{s} = 0$, en deux points situés de part et d'autre. Transportons-y l'origine des coordonnées, ce qui ne changera pas la forme des fonctions $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'_t$, par rapport à s, puis faisons la transformation

$$v = r \sin p, \qquad w = r \cos p.$$

Nous trouverons encore que la somme des intégrales de la forme (7), en y prenant pour limite inférieure commune $N't$, se réduit à

$$(16) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{N't}^{\infty} \mathrm{H}\, s\,\chi(s)\, ds\, dp \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

et, par suite, à

$$(17) \quad -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{H}\, dp.\left[N'^2 t \frac{d.}{dt}\chi(N't) + N'^2\chi(N't)\right]\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

quantité nulle si $N't$ n'est pas compris dans les limites de ρ, ce qui délimite encore la portion du milieu troublée par la propagation du mouvement. Ainsi il n'y aura rien au-delà d'une certaine limite qui sera la limite extérieure de la plus grande des ondes indiquées dans le premier Mémoire.

16. Les mêmes conclusions subsistent, en général, si la nappe intérieure $s' = s$ enveloppée par les autres, est touchée par l'une d'elles en plusieurs points ou même suivant une ligne.

Mais si la nappe $s' = s$ était coupée par l'une des deux autres, il y aurait lieu à modifier la démonstration. Le résidu partiel correspondant n'aurait plus le même aspect; ce serait une particularité. La limite dépendrait, selon diverses circonstances, du plan tangent à la courbe d'intersection, mené perpendiculairement à l'axe des u. C'est ce que nous examinerons dans un prochain travail.

17. Dans le *Compte rendu* de la dernière séance de l'Académie, je trouve des formules de M. Cauchy qui ont pour objet la transformation ou l'évaluation de sommes d'intégrales [*]. C'est là ce qui m'a décidé à précipiter la publication de ce Mémoire ; j'avais aussi à évaluer des sommes d'intégrales. Mais pour y parvenir, il a fallu faire une transformation préalable qui, peut-être, établira quelque différence avec les formules de l'illustre géomètre dont je viens de parler [**].

---

[*] Il est bon, je crois, de rappeler ici deux Notes de M. Jürgensen auxquelles on n'a peut-être pas fait assez d'attention et qui ont été imprimées en 1839 dans le Journal de M. Crelle. (*Voyez* tome XIX, page 84 et page 113.) J. Liouville.

[**] Au reste, le 7 juin 1841, précisément le jour de la dernière lecture de M. Cauchy, j'ai déposé un paquet cacheté qui contient sommairement les idées fondamentales de ce Mémoire. On pourrait y avoir recours, s'il était nécessaire, pour constater le degré d'indépendance du travail. Il restera quelque analogie avec le Mémoire de M. Cauchy du 17 mai 1841. La connaissance de ce Mémoire de M. Cauchy m'a rendu grand service en reportant mes idées sur le calcul des résidus.

MÉMOIRE

SUR

UNE CIRCONSTANCE REMARQUABLE

DE LA DÉLIMITATION DE L'ONDE ;

Présenté à l'Académie des Sciences, le 5 juillet 1841 ;

Par M. P.-H. BLANCHET,

Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV.

---

1. L'objet principal de ce travail est l'étude de la délimitation de l'onde dans le cas où l'on peut avoir $s' = s''$. C'est presque une généralité. Il est difficile, en effet, de dire s'il est plus général qu'une nappe soit enveloppée par toutes les autres ou que les diverses nappes s'entrecoupent. Mais avant de traiter cette seconde partie de la question, je profiterai de l'occasion pour ajouter quelques développements a la première partie, traitée dans le Mémoire précédent. Il n'est peut-être pas inutile de rapprocher la formule (17, III) [*] des résultats obtenus dans les numéros **10** et **11** du premier Mémoire (*voyez* tome V de ce Journal, page 17 et suivantes).

§ I.

2. L'une des trois intégrales comprises dans la forme (7, III) est absorbée dans la formule (17, III); c'est l'intégrale

$$(1) \qquad - \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{N't}^{\infty} \varphi_1(t, s)\, \chi(s)\, ds \sin \varpi \, d\varpi \, d\theta \text{ [**]}.$$

---

[*] (17, III) *signifie* la formule (17) du troisième Mémoire, qui est le precedent.

[**] Le $\varphi(t, s)$ du premier Mémoire vaut deux fois le $\varphi(t, s)$ du troisième.

Les parties des deux autres qui subsistent sont alors de la forme

$$(2)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N''t}^{N't}\varphi_2(t,s)\chi(s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

$$(3)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N'''t}^{N't}\varphi_3(t,s)\chi(s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Les formes particulières de φ_1, φ_2, φ_3 dépendent respectivement de celles de s', s'', s'''.

Les limites inférieures $N''t$, $N'''t$ donneront évidemment des résultats concordants avec ceux du premier Mémoire. Il s'agit de savoir ce qu'on tirera de la limite supérieure $N't$, commune aux deux intégrales (2) et (3).

Elles donneront des termes analogues à ceux que l'on trouve à la fin du n° **8** (I). Il y aura cependant une différence de signe qui se manifestera dans la différentiation, parce qu'elles sont en haut au lieu d'être en bas. On trouvera

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N't\,\varphi_2(1,N')\frac{d.}{dt}\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi_2(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi'_2(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;
\end{aligned}\right.$$

et

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N't\,\varphi_3(1,N')\frac{d.}{dt}\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi_3(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi'_3(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.
\end{aligned}\right.$$

3. La somme des fonctions $\varphi_2(t,s)+\varphi_3(t,s)$ atteint la même limite pour $s=N't$, soit qu'on y arrive par des valeurs supérieures, soit qu'on y arrive par des valeurs inférieures à $N't$, puisque, par hypothèse, dans le voisinage de cette valeur de s, les fonctions φ_2 et φ_3

sont continues sans aucune singularité. Or, pour des valeurs supérieures à $N't$, on a, d'après le n° **15** (III),

$$\varphi_1(t,s)+\varphi_2(t,s)+\varphi_3(t,s)=2s\int_0^\pi \mathrm{H}\,dp \text{ [*]}; \tag{6}$$

donc, en faisant converger s vers $N't$, on aura

$$t[\varphi_1(1,N')+\varphi_2(1,N')+\varphi_3(1,N')]=2t\,N'\int_0^\pi \mathrm{H}\,dp. \tag{7}$$

Si l'on réunit tout ce qui multiplie $N't\frac{d.}{dt}\chi(N't)$, dans les formules (4), (5) et (17, III), on trouvera pour coefficient total

$$-\left[\varphi_2(1,N')+\varphi_3(1,N')-2N'\int_0^\pi \mathrm{H}\,dp\right].$$

Donc, d'après l'équation (7), on aura, toute réduction faite,

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi N't\,\varphi_1(1,N')\frac{d.}{dt}\chi(N't),$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu à la fin du n° **8** (I).

4. De même la seconde des intégrales (4) et la seconde des intégrales (5) donnent, avec la seconde partie de l'intégrale (17, III),

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi N'\varphi_1(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Semblablement la somme des fonctions

$$\varphi'_2(t,s)+\varphi'_3(t,s),$$

atteint la même limite pour $s=N't$, par des valeurs supérieures ou inférieures de s. Pour des valeurs supérieures on peut différentier l'équation (6), et l'on a

$$\varphi'_1(t,s)+\varphi'_2(t,s)+\varphi'_3(t,s)=0,$$

[*] Le $\varphi(t,s)$ du premier Mémoire vaut deux fois le $\varphi(t,s)$ du troisième.

donc

$$-[\varphi'_2(t, s) + \varphi'_3(t, s)] = \varphi'_1(t, s);$$

d'où, passant à la limite

$$-[\varphi'_2(1, N') + \varphi'_3(1, N')] = \varphi'_1(1, N'),$$

par suite, en réunissant la dernière des intégrales (4) avec la dernière des intégrales (5), on trouve

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} N'\varphi_1(1, N')\chi(N't)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

Les résultats du n° 8 (I) se trouvent ainsi reproduits.

5. Quant aux intégrales triples, que nous avons négligé d'écrire, elles donneront

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N''t}^{N't}\varphi''_2(t, s)\chi(s)\, ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta, \\ &-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N''t}^{N't}\varphi''_3(t, s)\chi(s)\, ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta. \end{aligned}\right.$$

Elles se vérifient par le cas sphérique. $N't$ devient égal à l'une des deux autres limites, par exemple, à $N''t$. L'une des deux intégrales (8) disparaît et il est aisé de voir que l'autre revient à l'intégrale triple de même genre qui s'est présentée dans le deuxième Mémoire.

§ II.

6. Je passe à l'examen du cas où deux des nappes de la surface des u, v, w se couperaient et seraient en même temps enveloppées de toutes parts par la troisième. Dans ce cas, pour certains rapports entre u, v, w, on aurait $s' = s''$. La courbe d'intersection serait naturellement sur une certaine surface conique ayant pour centre l'origine des coordonnées u, v, w. Le résidu relatif à s changerait d'aspect. Il y a donc lieu à examiner spécialement cette circonstance. Pour faire voir en même temps une autre disposition du calcul, je reprendrai les transformations.

7. Dans les formules (2, III) les diverses parties de ξ, η, ζ sont de la forme

(9) $$\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-st]\sqrt{-1}}\,s\omega}{((S))}\,f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

ou de la forme

(10) $$\frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-st]\sqrt{-1}}\,\omega}{((S))}\,f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\ [*].$$

J'ai mis dans l'exponentielle $-s$ au lieu de $+s$; ce changement de signe n'a pas d'influence.

Rien n'empêche d'appliquer à la formule (9) la transformation indiquée au n° 7 du premier Mémoire, pages 10 et 11. Elle peut se faire sous le signe $\mathcal{E}$. On aura

(11) $$\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\,\frac{e^{(\rho u-st)\sqrt{-1}}\,s\omega}{((S))}\,\rho^2\chi(\rho)\,du\,dv\,dw\,d\rho\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\psi,$$

si l'on applique les formules (43, I, page 11), en posant $s = nu$, on trouve

(12) $$\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\,\frac{e^{u(\rho-nt)\sqrt{-1}}\,nm}{((T))_n}\,\chi(\rho)\,u^2\rho^2\,du\,dp\,dq\,d\rho\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\psi.$$

T est ce que devient S quand on y remplace s par n; u, v, w par $1, p, q$. Les résidus devront être pris par rapport à n.

Mais ici il a fallu faire attention au changement de variable indépendante sous le signe $\mathcal{E}$. (*Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy, tome I, page 172.)

---

[*] Elle peut se déduire de la précédente par une intégration par rapport à t, de 0 à t. La partie correspondante à la limite inférieure 0, disparaîtra dans le résidu total. Nous nous occuperons donc seulement de la formule (9) et nous négligerons la formule 10, qui s'y ramène.

L'intégrale (12) revient à

$$-\frac{1}{8\pi^3}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{e^{u(\rho-nt)\sqrt{-1}}\,nm}{(\mathrm{T})_n}\frac{\rho^2}{n^2}\chi(\rho)\,du\,dp\,dq\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Les valeurs de n, tirées de l'équation $\mathrm{T}=0$, sont indépendantes de u et de ρ. On peut donc faire, sous le signe $\mathcal{E}$, les intégrations relatives à ces variables. Il suffira, pour cela, d'appliquer la formule de Fourier. A cause des limites de ρ, il est clair que les valeurs négatives de n ne donneront rien. On aura

$$(13)\quad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{2nm}{(\mathrm{T})_n}t^2\chi(nt)\,dp\,dq\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Le résidu intégral devra être borné aux valeurs positives de n.

Supposons maintenant $v=pt$, $w=qt$, $s=nt$; la formule (13) deviendra

$$(14)\quad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{2s\omega}{(\mathrm{S})}\chi(s)\,dv\,dw\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

ou encore

$$(15)\quad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}\frac{s\omega}{(\mathrm{S})}\chi(s)\,r\,dr\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

on a fait

$$v=r\sin p,\quad w=r\cos p.$$

Le résidu intégral sera borné aux valeurs positives de s.

8. Si les racines de l'équation $\mathrm{S}=0$ étaient inégales, on raisonnerait comme dans le troisième Mémoire et, par la transformation des résidus partiels, on trouverait

$$(16)\quad -\frac{d^2.}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{K}}^{\infty}\mathcal{E}\frac{sr\omega}{(\mathrm{S})_r}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

sous les mêmes conditions que dans la formule (12, III), pour représenter la portion de l'intégrale (15) dans laquelle s prend des valeurs supérieures à une limite convenablement choisie.

9. Je dis que l'on peut passer de la formule (15) à la formule (16), même dans le cas des racines égales; par exemple, si $s' = s''$.

Le plan $u = t$ coupe les nappes de la surface des u, v, w, correspondantes à s' et s'', chacune suivant une courbe. Dans le cas de $s' = s''$, on a $S'_s = 0$, les deux courbes se rencontrent. Si elles se coupent, on a aussi $S'_r = 0$, pour un point d'intersection, afin que $\frac{dr}{ds}$ puisse avoir deux valeurs distinctes dans le voisinage de ce point.

Concevons que pour un point d'intersection on ait

$$p = \mathrm{P}, \quad r = \mathrm{R};$$

et posons généralement pour un point très-voisin

$$p = \mathrm{P} + p', \quad r = \mathrm{R} + r'.$$

On pourra mettre en évidence la partie la plus considérable de S, en écrivant sous la forme

$$(17) \qquad \mathrm{S} = \mathrm{A}\,r'^2 + \mathrm{B}\,r'p' + \mathrm{C}\,p'^2 + \mathrm{S}_1 \text{ [*]}.$$

Si l'on regarde p' comme infiniment petit du premier ordre, r' sera du même ordre, S_1 sera d'un ordre plus élevé que le deuxième. Cette quantité S_1 sera précisément égale à

$$\mathrm{S} - (\mathrm{A}\,r'^2 + \mathrm{B}\,r'p' + \mathrm{C}\,p'^2).$$

On aura semblablement

$$(18) \qquad \mathrm{S}'_r = 2\mathrm{A}\,r' + \mathrm{B}p' + \mathrm{S}'_1;$$

S'_1 sera d'un ordre supérieur au premier.

L'équation

$$(19) \qquad \mathrm{A}\,r'^2 + \mathrm{C}\,r'p' + \mathrm{B}\,p'^2 = 0,$$

---

[*] $\mathrm{S}'_p = 0$, sans cela, r' serait de l'ordre de $p'^{\frac{1}{2}}$; les deux courbes se toucheraient au lieu de se couper. La somme des éléments de l'intégrale pour les points voisins du point de contact serait évidemment infiniment petite. Il n'y aurait pas de difficulté

résolue par rapport à r', donnera deux racines de la forme

(20) $$\left\{\begin{array}{l} r' = (h + \sqrt{k})\,p', \\ r' = (h - \sqrt{k})\,p'. \end{array}\right.$$

Si l'on pose $S = 0$, on en tirera deux valeurs de r' qui différeront peu de celle-là, et que l'on pourra présenter sous la forme

(21) $$\left\{\begin{array}{l} r' = (h + \sqrt{k})\,p' + g, \\ r' = (h + \sqrt{k})\,p' + l. \end{array}\right.$$

g et l seront des quantités infiniment petites par rapport à p'.

Si, pour prendre le résidu relatif à la première des valeurs (21) de r', on veut substituer dans l'expression

$$\frac{2sr\omega}{S'_{r'}},$$

on pourra d'abord mettre cette expression sous la forme

(22) $$\frac{\Omega}{2Ar' - Bp'} + U;$$

U désignera une quantité infiniment petite par rapport au premier terme dans lequel Ω est de degré nul par rapport à r' et p'.

Mais pour la première des racines (20), on a

$$2Ar' - Bp' = +\sqrt{k}.p';$$

donc, si l'on substitue, dans l'expression (22), la première des racines (21), on obtiendra un résultat de la forme

(23) $$\frac{\Omega}{\sqrt{k}.p'} + U_1.$$

La seconde des racines (21) donnera

(24) $$-\frac{\Omega}{\sqrt{k}.p'} + U_2.$$

La somme des deux résidus partiels (23) et (24) sera

$$(25) \qquad U_1 + U_2,$$

quantité infiniment petite par rapport à $\frac{1}{p'}$. Si l'on intègre par rapport à p' entre des limites infiniment petites, on aura une portion de l'intégrale (16), qui sera elle-même infiniment petite et pourra être négligée. D'ailleurs dans l'élément de l'intégrale correspondant à $p' = 0$, le coefficient de dp' est fini, d'après la manière de prendre le résidu dans le cas des racines égales; on peut donc négliger aussi cet élément. Donc, enfin, dans l'intégrale (16) on peut sans erreur sensible négliger, à volonté tout se qui se rapporte aux points voisins d'un point d'intersection déterminé dans le plan $u = t$ par la rencontre des nappes relatives à s' et s''. Ce sera sans influence sur la valeur de cette intégrale.

10. On peut appliquer des considérations semblables à l'intégrale (15). Seulement il faudra de plus mettre le facteur $\chi(s)$ sous la forme

$$\chi(s') + \chi_1,$$

en posant

$$s = s' + v$$

et

$$\chi_1 = \chi(s' + v) - \chi(s') \text{ [*]}.$$

χ_1 s'évanouira avec v et devra être une quantité infiniment petite en même temps que v.

11. Avec un peu d'attention on se convaincra facilement que, pour des limites inférieures convenablement choisies, les portions négligeables des intégrales (15) et (16) se rapportent à la même partie du plan $u=t$. D'ailleurs les autres éléments sont équivalents chacun à chacun; donc, comme dans le troisième Mémoire, on peut substituer l'intégrale (16) à une partie correspondante de l'intégrale (15), même lorsque les résidus peuvent se rapporter à des racines égales.

[*] La fonction arbitraire χ devra être susceptible d'être différenciée une fois de plus que dans le cas des racines inégales.

12. Il suit de là que les conclusions du troisième Mémoire subsisteront, toutes les fois que, dans le plan $u = t$, l'origine des r sera tellement choisie que les six valeurs du rayon vecteur r, soient, pour chaque nappe de l'onde, deux à deux de signes contraires. Or cette condition sera remplie en général pour des valeurs de K et, par suite, pour des valeurs de s très-grandes par rapport à t; donc la conclusion du n° **13** (III) a lieu, même si deux nappes de la surface des u, v, w se coupent mutuellement.

13. On peut, en outre, restreindre la délimitation, comme au n° **14** (III). Il suffit de transporter l'origine des coordonnées en un point convenable. La courbe d'intersection des deux nappes intérieures, en général à double courbure, partage ces deux nappes en plusieurs régions. Nous nommerons, pour un instant, régions intérieures les portions de chaque nappe comprises dans l'autre, et régions extérieures les portions qui ne remplissent pas cette condition. Quand il existera un plan parallèle au plan $u = t$, tangent à une région intérieure, nous prendrons, comme au n° **13** (III), l'origine des r au point homologue du point de contact. Elle se trouvera alors dans toutes les nappes. Dans le cas contraire, nous prendrons pour origine le point homologue du point où un plan, parallèle au plan $u = t$, touche la courbe d'intersection des deux nappes. La droite menée de l'origine des u, v, w à ce point de contact, assujettie à couper la troisième nappe, ne peut, du même côté, couper ailleurs les deux autres; l'origine des r sera encore dans les trois nappes. Les conclusions subsisteront. La limite, dans ce dernier cas, sera, comme on le voit, moins étroite que dans le premier, mais bien plus resserrée qu'au n° **13** (III). Ce résultat ne me paraît avoir rien d'étonnant, d'après l'étude des singularités et particularités, dont je donnerai l'ensemble plus tard.

14. Je ne m'arrêterai pas à considérer le cas où les trois nappes s'entrecouperaient deux à deux. L'analyse précédente montre ce qu'il y aurait à faire.

15. Dans le cas même où les trois nappes se couperaient en un même point dans le plan $u = t$, pour les points voisins de celui-là dans le même plan, la somme des résidus partiels ne renfermerait pas de terme de l'ordre -2 ou de l'ordre -1 par rapport à r'. La somme de ces termes serait elle-même un résidu intégral nul [*]. C'est ainsi que, dans la somme des résidus partiels (25) pris au n° **9**, la somme des termes de l'ordre -1 est la même chose que

$$\mathcal{E}\frac{\Omega}{(Ar'^2 + Br'p' + Cp'^2)_{r'}} = 0.$$

16. Je terminerai par quelques remarques. Le résultat de la formule (13) du n° **10** (III) peut s'obtenir sans résidus. Il est une conséquence des propriétés des fractions rationnelles. Si $F(x)$ et $f(x)$ sont deux polynomes entiers et finis, tels que le degré du premier surpasse d'une unité le degré du second; en désignant par x_1, x_2, x_3, ... les racines de l'équation

$$F(x) = 0,$$

et par A_1, A_2, A_3, ... les quantités

$$\frac{f(x_1)}{F(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F(x_2)} + \frac{f(x_3)}{F(x_3)} \ldots\ldots$$

de l'identité

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{A_3}{x - x_3} \ldots\ldots,$$

[*] s prendrait aussi une valeur déterminée s_0, par exemple. On poserait donc

$$s = s_0 + v,$$

et l'on aurait, pour les points voisins du point d'intersection dans le plan $u = t$:

$$\begin{aligned} S &= \ \ Ar'^3 + Br'^2p' + Cr'^2v + \ldots + S_1,\\ S'_{r'} &= 3Ar'^2 + 2Br'p' + 2Cr'v + \ldots + S'_1,\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}\frac{sr\omega}{(S)_{r'}} = \mathcal{E}\frac{\Omega + ar' + bp' + cv}{(Ar'^3 + Br'^2p' + Cr'^2v + \ldots)_{r'}} + U = U,$$

U serait d'un ordre supérieur à l'ordre -1. Donc, etc.

Je n'examinerai pas, pour le moment, le cas où le polynome $Ar'^3 + Br'^2p'\ldots$ aurait des racines égales. Ce serait une singularité trop particulière.

on conclura que la somme

$$A_1 + A_2 + A_3 \ldots :$$

est égale au rapport des deux coefficients du premier terme de $f(x)$ et du premier terme de $F(x)$. La même somme $A_1 + A_2 \ldots$ sera nulle, si la différence des degrés est plus grande que 1.

Mais l'utilité des résidus se fait mieux sentir dans le cas des racines égales, qui ne s'est trouvé exceptionnel dans notre question, qu'à cause de la transformation des résidus partiels.

17. Enfin il est aisé de voir que les transformations employées dans le premier et le troisième Mémoires peuvent être la source de transformations plus générales.

On peut faire subir des réductions analogues aux belles intégrales multiples, données par M. Cauchy, pour un système quelconque d'équations aux différentielles partielles à coefficients constants. J'appliquerai les mêmes méthodes de réduction aux intégrales des équations homogènes, quel que soit le nombre des variables principales et indépendantes, et j'en déduirai la délimitation et l'interprétation de ces intégrales.

Cette généralisation, purement analytique, sera l'objet d'un travail que j'ai commencé et dont il est facile de prévoir les résultats.

Il est même possible d'étendre la méthode à des approximations successives pour obtenir la dispersion, dans le cas d'un ébranlement central, et les résultats analytiques analogues.

Je me bornerai, pour aujourd'hui, à la solution de cette question très-générale de la délimitation de l'onde, quelle que soit la nature du milieu élastique; pourvu qu'il offre une distribution symétrique par rapport à chaque point et partout la même.

RÈGLES
SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève Ingénieur des Mines.

Lorsqu'une série a tous ses termes positifs, on sait que pour décider s'il y a convergence ou divergence, il suffit de considérer le rapport d'un terme au précédent, et que, si ce rapport est, à partir d'une certaine limite, toujours supérieur à l'unité, la série est divergente. Si, au contraire, il est constamment inférieur à un nombre moindre que un, la série est convergente.

Les seuls cas douteux sont, celui où le rapport s'approche indéfiniment de l'unité, et celui où n'ayant aucune limite déterminée, il est tantôt plus petit, tantôt plus grand que un.

Lorsque cette première règle se trouve ainsi en défaut, on en connaît plusieurs autres qui s'appliquent quelquefois avec avantage.

L'une d'elles a été donnée par M. Cauchy; elle consiste en ce que, u_n désignant le terme général de la série, il y a convergence ou divergence, selon que l'expression $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$, où l'on fait croître n indéfiniment, reste, à partir d'une certaine valeur de n, toujours plus grande qu'un nombre déterminé quelconque plus grand que 1, ou toujours plus petite que l'unité. Cette règle peut s'appliquer dans les cas douteux de la précédente, mais elle-même présente un cas d'incertitude dont M. Cauchy ne s'est pas occupé.

Une autre règle a été donnée par M. Raabe dans le Journal scientifique de MM. Ettingshausen et Baumgartner; c'est cette regle que M. Duhamel avait trouvée de son côté (tome IV de ce Journal, page 214), et dont il est question dans la Note de M. Raabe (tome VI de ce Journal, page 85.) Cette règle, dont voici l'énoncé, s'applique, comme la précédente, au cas où le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers l'unité : « Si » l'on suppose ce rapport mis sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, il y aura conver- » gence ou divergence, suivant que la limite du produit $n\alpha$ (pour » $n=\infty$) sera plus grande ou plus petite que l'unité. »

Dans le cas où la limite serait négative, on devrait la considérer comme plus petite que 1, et il y aurait divergence. Les seuls cas douteux sont celui où le produit $n\alpha$ n'ayant pas de limite déterminée serait tantôt plus petit, tantôt plus grand que 1, et celui où la limite serait précisément l'unité.

Enfin un auteur anglais, M. Augustus de Morgan, a donné, dans un *Traité de calcul différentiel et intégral*, imprimé à Londres en 1839, une règle qu'il énonce ainsi :

« $\varphi(x)$ représentant une fonction croissante, soit proposée la série

$$\frac{1}{\varphi(a)}+\frac{1}{\varphi(a+1)}+\ldots+\frac{1}{\varphi(a+n)}+\text{etc.},$$

» et faisons $p_0=\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$: si, lorsque x devient infini, la limite a_0 » de p_0 est plus grande que 1, la série est convergente : si, au con- » traire, la limite a_0 est plus petite que 1, la série est divergente.

» Dans le cas où $a_0=1$ cherchez la limite de $lx(p_0-1)=p_1$; si » cette limite a_1 est plus grande que 1, il y a convergence ; si elle est » plus petite que 1, il y a, au contraire, divergence. Dans le cas où » l'on aurait $a_1=1$, on considérera la limite de $l.lx(p_1-1)=p_2$, » et, suivant qu'elle sera plus petite ou plus grande que 1, il y aura » convergence ou divergence; dans le cas où elle serait encore l'unité, » il faudrait considérer $l.l.lx(p_2-1)$, et ainsi de suite indéfiniment. »

Avant d'avoir eu connaissance du travail de M. de Morgan, j'étais parvenu de mon côté à une série de règles analogues aux siennes, mais de forme tout à fait différente. En les comparant de plus près, j'ai vu que cependant elles étaient les mêmes quant au fond, c'est-à-dire qu'elles s'appliqueront dans les mêmes circonstances et présenteront les mêmes cas douteux. J'ai remarqué aussi que la règle de M. Cauchy, celle qui a été trouvée par M. Raabe, et la première des règles de M. de Morgan, ne diffèrent les unes des autres que par la forme, et que les expressions dont elles font dépendre la convergence ont les mêmes limites. C'est une coïncidence de même nature qui existe entre chacune des règles auxquelles j'étais parvenu, et les règles correspondantes de M. de Morgan. Cela m'a conduit à penser qu'en prenant la règle de M. Raabe pour point de départ, il serait possible de former une troisième série de règles, présentant le même degré de généralité que les deux autres, et dans lesquelles la condition de convergence serait déduite de la considération du rapport de deux termes consécutifs. J'ai en effet démontré ces différentes règles, auxquelles l'analogie conduisait facilement, et j'ai reconnu que, comme celles auxquelles j'étais d'abord parvenu, elles faisaient dépendre la convergence d'expressions qui ont les mêmes limites que celles que considère M. de Morgan.

On pourrait même se servir de cette égalité de limites pour déduire les règles que je vais donner de celles qui ont été trouvées par M. de Morgan; mais, comme il est très-facile de les établir indépendamment les unes des autres, c'est cette marche que je choisirai, en me bornant à démontrer *à posteriori* leur coïncidence.

I.

Je commencerai par la série de règles, où je prends pour point de départ la règle de M. Cauchy.

Cette règle consiste, comme nous l'avons dit, en ce que, u_n représentant le terme général d'une série, il y a convergence ou divergence suivant que $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ a une limite plus grande ou plus petite que l'unité; si la limite est précisément 1, il y a doute.

Dans ce cas, il faut considérer $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, et, suivant que la limite de cette expression est plus grande ou moindre que 1, il y a convergence ou divergence; si la limite est négative, il y a toujours divergence.

Dans le cas où la limite précédente est précisément l'unité, il faut considérer le rapport $\frac{l\frac{1}{nu_n ln}}{llln}$; si ce rapport a une limite négative ou plus petite que 1 la série est divergente, si la limite est plus grande que 1 il y a convergence, et enfin si elle est égale à 1 il y a doute, et il faut recourir à une nouvelle expression $\frac{l\frac{1}{nu_n lnlln}}{lllln}$, dont la limite décide, comme dans les cas précédents, s'il y a convergence ou divergence : ainsi de suite indéfiniment.

Pour démontrer ces différentes règles, nous commencerons par prouver que les séries

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2(l2)^\alpha} + \frac{1}{3(l3)^\alpha} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(ln)^\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2\,l2\,(ll2)^\alpha} + \frac{1}{3\,l3\,(ll3)^\alpha} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n\,ln.(lln)^\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2\,l2ll2\,(lll2)^\alpha} + \frac{1}{3\,l3ll3\,(lll3)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n\,ln\,lln.(llln)^\alpha} + \ldots, \text{ etc.},$$

sont toutes convergentes si α est plus grand que 1, et divergentes si α est égal à 1 ou plus petit que 1.

Cela se déduit sans peine du théorème suivant, que M. Cauchy a démontré dans ses *Exercices de Mathématiques* : $\varphi(x)$ désignant une fonction positive décroissante de la variable x, la série

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+p) + \ldots\ldots$$

sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ aura ou n'aura pas une valeur finie.

En admettant ce théorème, dont la démonstration est fort simple, on voit que la proposition énoncée se trouvera établie si l'on prouve que les diverses intégrales

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x}\frac{1}{(lx)^\alpha}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{xlx}\frac{1}{(llx)^\alpha}, \text{ etc.},$$

ont une valeur finie ou infinie, suivant que α est plus grand ou plus petit que l'unité.

Or les intégrations indiquées peuvent s'effectuer si l'on remarque que $\frac{dx}{x}$ est la différentielle de lx, $\frac{dx}{xlx}$ celle de llx, et ainsi de suite; quand α n'est pas l'unité, les intégrales indéfinies sont

$$\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \frac{lx^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \frac{(llx)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ etc.},$$

et ces quantités deviennent ou ne deviennent pas infinies avec x suivant que $1-\alpha$ est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que α est plus petit ou plus grand que 1 : quand $\alpha = 1$ les puissances se changent en logarithmes qui sont infinis pour $x = \infty$. Donc, etc.

Cela posé, soit une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et supposons qu'à partir d'un certain terme on ait

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} > \alpha,$$

α étant un nombre supérieur à l'unité.

On en tire

$$l\frac{1}{u_n} > \alpha\, ln > l.n^{\alpha};$$

donc

$$\frac{1}{u_n} > n^{\alpha},$$

et par suite

$$u_n < \frac{1}{n^{\alpha}};$$

donc la série $\sum u_n$ a tous ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$; donc elle est elle-même convergente.

Si l'on avait au contraire l'inégalité

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} < \alpha',$$

α' étant plus petit que 1 ou même égal à 1, on en tirerait

$$u_n > \frac{1}{n^{\alpha'}},$$

et par conséquent la série proposée, ayant tous ses termes plus grands que ceux d'une série divergente, serait elle-même divergente.

Il n'y a donc doute que si la limite de $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ est précisément l'unité.

C'est là la règle de M. Cauchy, et la première de celles que nous avons énoncées au commencement de ce paragraphe.

Pour démontrer la seconde, supposons que $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{ln}$ ait pour limite une quantité α plus grande que 1, ou, plus généralement, supposons qu'à partir d'une certaine limite ce rapport soit constamment supérieur à un nombre k plus grand que l'unité, en sorte que l'on ait

$$\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln} > k;$$

on en tirera

$$l\frac{1}{nu_n} > l.(ln)^k,$$

et par suite,

$$\frac{1}{nu_n} > (ln)^k,$$

$$u_n < \frac{1}{n(ln)^k}.$$

Notre série a donc tous ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\sum \frac{1}{n.ln^k}$; elle est donc elle-même convergente. On verrait par un raisonnement tout semblable, que la condition

$$\frac{l\,\frac{1}{nu_n}}{lln} < 1,$$

supposée remplie à partir d'une certaine valeur de n, entraîne toujours la divergence.

Il est important de remarquer que cette nouvelle règle s'applique bien dans le cas douteux de la précédente, c'est-à-dire que l'expression dont elle dépend aura en général une limite différente de 1, lorsque $\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{ln}$ tendra lui-même vers l'unité. Pour s'en assurer, il suffit de mettre le rapport $\frac{l\,\frac{1}{nu_n}}{lln}$, sous la forme $\frac{l\,\frac{1}{u_n} - ln}{lln}$ et l'on voit que si $l\,\frac{1}{u_n}$ et ln avaient un rapport différent de l'unité, leur différence serait du même ordre que ln, et par conséquent la fraction serait infinie; le seul cas où $\frac{l\,\frac{1}{nu_n}}{lln}$ puisse avoir une limite finie, est donc celui où $\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{ln}$ a pour limite l'unité, c'est-à-dire le cas douteux de la règle précédente; il n'y a évidemment aucune raison pour que cette limite finie soit aussi elle égale à 1. Si ce cas se présentait, il faudrait recourir au rapport

$$\frac{l\,\frac{1}{nu_n\,ln}}{llln},$$

qui pourra alors avoir une limite finie, et la valeur de cette limite, si elle n'est pas encore l'unité, décidera s'il y a convergence ou divergence.

Dans le cas où l'on retomberait sur une limite égale à 1, il faudrait recourir à une quatrième expression, et ainsi de suite indéfiniment.

Nous n'avons considéré dans la démonstration que le cas où les limites des expressions $\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{ln}$, $\frac{l\,\frac{1}{nu_n}}{lln}$, $\frac{l\,\frac{1}{nu_n\,ln}}{llln}$, ..., sont positives; mais lorsque l'une de ces limites se trouvera négative, il y aura necessairement divergence, car alors, à partir d'un certain terme, on aura

$$\frac{1}{nu_n\, lnlln \ldots} < 1,$$

d'où

$$u_n > \frac{1}{nlnlln \ldots},$$

c'est-à-dire que u_n sera plus grand que le terme général d'une serie divergente; du reste, ce résultat est compris dans l'énoncé de la regle générale, puisque quand la limite est négative elle doit être considérée comme plus petite que l'unité.

Lorsque l'on sera parvenu à reconnaître la convergence d'une série par le moyen de l'une des regles précédentes, il sera facile de donner une limite de la valeur du reste lorsque l'on s'arrête à un certain terme, car nous avons vu, dans le cours de la démonstration, qu'alors tous les termes de la série proposée sont plus petits que ceux de l'une des séries

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \sum \frac{1}{n(ln)^\alpha}, \quad \sum \frac{1}{nln(lln)^\alpha}, \ldots$$

suivant qu'on est obligé de recourir à la première, la seconde, ou la troisieme regle : donc aussi la somme sera moindre que celle de ces séries, à partir du terme considéré ; mais il est facile de trouver une limite pour la somme de chacune de ces séries, car on a

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots\ldots\ldots\ldots < \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < \frac{1}{(1-\alpha)(n-1)^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{n(ln)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)(l(n+1))^\alpha} + \ldots\ldots < \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{x(lx)^\alpha} < \frac{1}{(1-\alpha)(l(n-1))^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{nln(lln)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)l(n+1)(ll(n+1))^\alpha} + \ldots < \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{xlx(llx)^\alpha} < \frac{1}{(1-\alpha)(ll(n-1))^{\alpha-1}},$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Faisons observer encore que les regles ci-dessus démontrées ne seront en défaut que dans le cas où l'une des expressions que nous avons à considérer n'aurait pas de limite déterminée et serait alternativement plus grande et plus petite que l'unité. Dans ce cas il n'y aura pas lieu d'essayer les expressions suivantes, car il est facile de voir que ces dernières croîtront indéfiniment, en étant alternativement positives et négatives.

Si, par exemple, $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ était tantôt plus petit, tantôt plus grand que 1, $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, c'est-à-dire $\frac{l\frac{1}{u_n} - ln}{lln}$, serait évidemment tantôt positif et tantôt négatif, et de plus indéfiniment croissant si $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ ne s'approche pas de l'unité.

De même, si $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$ est tantôt plus grand et tantôt plus petit que l'unité, $\frac{l\frac{1}{nu_n ln}}{llln}$, c'est-à-dire $\frac{l\frac{1}{un_n} - lun}{llln}$, sera évidemment tantôt positif et tantôt négatif, et de plus croîtra indéfiniment en valeur absolue si $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$ ne s'approche pas indéfiniment de l'unité.

III.

Je passe à la seconde série de règles.

Soit

$$u_0 + u_1 + \ldots u_n + u_{n+1} \ldots$$

une série à termes positifs dans laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers l'unité : M. Raabe a démontré qu'en mettant ce rapport sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, il y a convergence ou divergence, suivant que $n\alpha$ a une limite plus grande ou plus petite que l'unité : si α était toujours négatif, le produit $n\alpha$ serait lui-même négatif, et on devrait le considérer comme plus petit que 1 ; il y aurait divergence.

C'est là la première des règles dont nous nous occupons actuellement ; nous n'en rapporterons pas la démonstration, qui a déjà paru dans ce Journal.

Dans le cas où $n\alpha$ a pour limite l'unité, il faut mettre le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme $\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'}$, et il y aura convergence ou divergence suivant que $n\alpha' ln$ aura une limite plus grande ou plus petite que 1, une limite négative étant considérée comme plus petite que 1.

Si $n\alpha' ln$ tend lui-même vers 1, il faudra mettre le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\alpha''},$$

et considérer le produit $n\alpha'' lnlln$; suivant que ce produit aura une limite plus grande ou plus petite que 1, il y aura convergence ou divergence, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour démontrer ces différentes règles, nous admettrons le lemme suivant dont M. Duhamel fait usage dans son Mémoire : « Si la série » $u_0+u_1+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ est convergente, il en sera de » même de toute autre série $v_0+v_1+\ldots+v_n+v_{n+1}+\ldots$, telle » que le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ soit constamment moindre que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; et sem» blablement, si la série $u_0+u_1+\ldots$ est divergente, et que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ » soit plus grand que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, la série $v_0+v_1+\ldots$ sera aussi diver» gente. » Il est inutile de répéter que nous nous occupons exclusivement des séries dont les termes sont tous positifs.

Supposons actuellement qu'une série donnée

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

soit telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait pour limite l'unité, et que ce rapport étant mis sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, on ait aussi lim. $n\alpha = 1$; faisons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'},$$

et admettons qu'à partir d'un certain terme, on ait $n\alpha' ln > k$, k étant plus grand que 1, je dis que la série sera convergente. En effet, posons

$$n\alpha' ln = k_1, \quad \alpha' = \frac{k_1}{nl_n};$$

le rapport d'un terme au précédent deviendra, dans la série proposée,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln}}:$$

or je dis que ce rapport est toujours moindre que le rapport correspondant de la série

$$1 + \frac{1}{2(l2)^k} + \ldots + \frac{1}{n(ln)^k} + \ldots$$

Il faut prouver que l'on a

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln}} < \frac{n(ln)^k}{(n+1)[l(n+1)]^k},$$

ou bien

$$1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln} > \frac{(n+1)}{n}\frac{[l(n+1)]^k}{(ln)^k},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$n(ln)^k + (ln)^k + k_1(ln)^{k-1} > (n+1)[l(n+1)]^k,$$

et en transposant,

$$k_1(ln)^{k-1} > (n+1)[l(n+1)]^{k_1} - (ln)^{k_1}.$$

Il est facile de voir que n augmentant sans cesse, $[l(n+1)]^k - (ln)^k$ tend indéfiniment vers zéro; il sera donc permis, sans altérer l'inégalité que nous voulons démontrer, de remplacer dans le premier membre k_1 par k, ce qui le diminue de $(k_1 - k)\,ln^{k-1}$, quantité qui croît indéfiniment, et de remplacer dans le second membre le facteur $n+1$ par n, ce qui le diminuera seulement de la quantité très-petite $[l(n+1)]^k - (ln)^k$. L'inégalité à démontrer devient ainsi

$$k(ln)^{k-1} > n[l(n+1)^k - (ln)^k];$$

or si nous considérons la courbe dont l'équation est $y = (lx)^k$, il est facile de voir qu'elle est concave vers l'axe des x, et que, par suite, la différence de deux de ses ordonnées, correspondantes à des abscisses dont la différence est l'unité, doit être moindre que la valeur que prend la dérivée pour le premier des deux points; mais $\frac{k(ln)^{k-1}}{n}$ est précisément la valeur de cette dérivée, et l'inégalité que nous voulons vérifier est par conséquent démontrée. Le rapport de deux termes consécutifs de la série proposée est donc moindre que le rapport correspondant dans la série convergente $\sum \frac{1}{n(ln)^k}$; il y a donc convergence. Si, au contraire, le produit $n\alpha' ln$ avait été inférieur à l'unité, nous aurions comparé le rapport $\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln}}$ au rapport correspondant dans la série $\sum \frac{1}{nln}$, en nous rappelant que k_1 désigne maintenant un nombre plus petit que 1. On vérifie sans peine que l'on a alors

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln}} > \frac{nln}{(n+1)l(n+1)},$$

ou

$$1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln} < \frac{n+1}{n}\,\frac{ln+1}{ln},$$

car en chassant les dénominateurs et réduisant, cette inégalité se ramene à

$$\frac{k_1}{n+1} < (ln+1) - ln.$$

et sous cette forme elle devient évidente, puisque la courbe $y = lx$ étant concave vers l'axe des x, la différence de deux ordonnées, dont les abscisses diffèrent d'une unité, est plus grande que la valeur que prend la dérivée à celui des deux points qui a la plus grande abscisse, et l'on a

$$l(n-1) - ln > \frac{1}{n+1},$$

ce qui démontre à plus forte raison l'inégalité précédente, ou k_1 est plus petit que 1. Si α était négatif, le même raisonnement prouverait qu'il y a divergence.

Dans le cas où $n\alpha' ln$ aurait pour limite l'unité, on mettrait le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \alpha''},$$

et il faudrait considérer le produit $n\alpha'' lnlln$; on démontrerait, comme dans le cas précédent, qu'il y a convergence ou divergence suivant que la limite de ce produit est plus grande ou plus petite que l'unité : il suffira de comparer la valeur que prend ce rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dans chacun de ces deux cas, avec le rapport correspondant de la série $\sum \frac{1}{nln(lln)^k}$, k étant un nombre plus grand que 1 dans le premier cas, et plus petit que 1 dans le second.

Le raisonnement étant tout à fait de même nature, il est inutile de le donner ici.

Ces règles, comme celles du paragraphe précédent, n'auront d'autres cas douteux que ceux où les diverses expressions que nous désignons par $n\alpha' ln$, $n\alpha'' lnlln$, etc..., n'ayant pas de limite déterminée, seraient tantôt plus grandes, tantôt moindres que l'unité. Il faut encore y joindre le cas infiniment peu probable où toutes ces expressions, jusqu'à l'infini, auraient l'unité pour limite.

D'après la forme de ces nouvelles règles, on voit qu'elles s'appliqueront surtout avec avantage aux séries dont les divers termes seront exprimés par des produits de facteurs dont le nombre augmente indéfiniment, mais de telle manière que la plupart d'entre eux disparaissent dans le rapport de deux termes consécutifs, ce qui rendra ce rapport plus commode à considérer que ne l'eussent été les termes eux-mêmes. Lorsqu'au contraire le terme général sera exprimé d'une manière simple en fonction explicite de son rang, ce sera la première série de règles qui s'appliquera avec le plus de facilité.

IV

Je vais montrer actuellement que les expressions dont je fais dépendre la convergence ou la divergence ont les mêmes limites que celles qui sont désignées par a_0, a_1, a_2, ..., dans l'ouvrage de M. de Morgan. On se rappelle que la série étant représentée par $\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(x)} + \ldots$, $\varphi(x)$ étant une fonction croissante de la variable x, on a

$$a_0 = \lim . \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)};$$

or la première expression que nous ayons à considérer, dans la règle de M. Cauchy, est $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$, expression qui, d'après la notation de M. de Morgan a évidemment la même limite que $\frac{l\varphi(x)}{lx}$, c'est-à-dire, en appliquant la règle des fractions $\frac{\infty}{\infty}$, que $\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$.

La première des règles de M. de Morgan ne diffère donc pas de celle de M. Cauchy; je dis qu'il en est de même de celle de M. Raabe, qui est la première de notre seconde série : soit en en effet

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1-\gamma},$$

ou, suivant la notation de M. Morgan,

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{1+\alpha}{1};$$

on en tire

$$\alpha = \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{\varphi(n)},$$

et par suite

$$n\alpha = n\,\frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{\varphi(n)};$$

mais on a, en appelant θ un nombre plus petit que 1,

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \varphi'(n+\theta);$$

l'expression $n\alpha$ devient donc

$$\frac{n\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n)} = \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)}\,\frac{\varphi'(n+\theta)}{\varphi'(n)};$$

or je dis que, quelle que soit la valeur de θ, valeur qui varie avec n, $\frac{\varphi'(n+\theta)}{\varphi'(n)}$ tend vers l'unité, car par hypothèse le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, et par suite $\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$, s'approche indéfiniment de l'unité, et puisque $\varphi(n)$ est décroissant, il en sera de même de $\frac{\varphi(x+\theta)}{\varphi(x)}$, où θ conserverait toujours la valeur qu'on doit lui attribuer dans le rapport considéré; donc, en appliquant la règle des fractions $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\varphi'(x+\theta)}{\varphi'(x)}$ a aussi pour limite l'unité, et doit être très-rapproché de cette limite, si x est remplacé par le nombre très-grand n.

Je dis semblablement que la quantité que M. de Morgan désigne par a_1 est la même que lim. $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, et que lim. $n\alpha' ln$, dont les secondes règles de nos deux séries font dépendre la convergence. On a en effet

$$a_1 = \text{lim.}\; lx\left[1 - \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right];$$

et, d'après la notation de M. de Morgan,

$$\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln} = \frac{l\frac{\varphi(n)}{n}}{lln};$$

en appliquant la règle des fractions $\frac{\infty}{\infty}$, il vient

$$\lim.\frac{l\frac{\varphi(n)}{n}}{lln} = \lim\left[\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} - \frac{1}{n}\right] nln = \lim.\, ln\left[\frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)} - 1\right]\cdot$$

c'est précisément ce que nous voulions démontrer.

Si nous considérons maintenant la règle de la deuxième série, nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'}\,;$$

on en tire

$$n\alpha' = \frac{n\varphi(n+1) - (n+1)\varphi(n)}{\varphi(n)},$$

ou bien

$$\lim.\, n\alpha' ln = \lim.\, ln\left[n\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{\varphi(n)} - 1\right] = \lim.\, ln\left[n\frac{\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n)} - 1\right].$$

Or, au lieu de

$$ln\left[\frac{n\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n)} - 1\right],$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} l(n+\theta)&\left[\frac{(n+\theta)\varphi'(n+\theta)-\varphi(n+\theta)}{\varphi(n+\theta)}\right]\frac{ln}{l(n+\theta)}\cdot\frac{\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)} \\ &- \frac{\theta\varphi'(n+\theta)\,l(n+\theta)}{\varphi(n+\theta)}\cdot\frac{ln}{l(n+\theta)}\cdot\frac{\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)} \\ &+ \frac{\varphi(n)-\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)}\,ln. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que $\frac{ln}{l(n+\theta)}$ et $\frac{\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)}$ tendent l'un et l'autre vers l'unité, et que $n+\theta$ est une variable croissante que l'on peut désigner par x, la première partie a évidemment la même limite que

$$lx\left[\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} - 1\right]$$

Quant aux deux autres parties, elles tendent l'une et l'autre vers zéro, car $\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ayant une limite finie, $\frac{lx\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ a évidemment pour limite zéro; il en est donc de même de $\frac{l(n+\theta)\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n+\theta)}$, et de

$$\frac{\varphi(n+\theta)-\varphi(n)}{\varphi(n)}\,ln = ln\,\frac{\varphi'(n+\theta_1)}{\varphi(n)} = \frac{l(n+\theta_1)\varphi'(n+\theta_1)}{\varphi(n+\theta_1)}\cdot\frac{\varphi(n+\theta_1)}{\varphi(n)}\cdot\frac{ln}{l(n+\theta_1)},$$

θ_1 désignant un nombre moindre que θ et par suite moindre que l'unité.

Il y a donc coïncidence entre les secondes règles de chacune de nos séries et la seconde règle de M. de Morgan.

Je ne pousserai pas plus loin cette vérification, qui ne présente aucune difficulté.

V.

Soit la série

$$1 + \frac{1}{\sqrt[2]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} + \ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent a pour limite l'unité; si donc nous voulons appliquer la premiere série de règles, qui ici est évidemment la plus commode, il faut considérer la limite du rapport

$$\frac{l\sqrt[n]{n^{n+1}}}{ln} = \frac{n+1}{n}.$$

La limite de ce rapport est l'unité; il faut donc recourir à la seconde règle, et considérer

$$\frac{l\frac{\sqrt[n]{n^{n+1}}}{n}}{lln} = \frac{\left(\frac{n-1}{n}-1\right)ln}{lln} = \frac{ln}{nl_n}.$$

La limite est ici zéro, et par conséquent il y a divergence: on verrait de même que la série dont le terme général est $\frac{1}{n^{1+(ln)^{\alpha}}}$, est convergente si α est plus petit que 1, et divergente lorsqu'il sera égal ou inférieur à l'unité.

Soit encore la série

$$1 + 2^w + \frac{3^w}{2^{w+\alpha}} + \ldots + \frac{n^w}{(n+1)^{w+\alpha}} + \ldots,$$

que M. Raabe a considérée, tome VI de ce Journal, page 87. M. Raabe démontre, en faisant usage de considérations détournées, que la limite dont sa règle fait dépendre la convergence est, dans ce cas, égale à α, en sorte qu'il y a convergence ou divergence suivant que α est plus grand ou plus petit que 1; si $\alpha = 1$ il y a doute, et M. Raabe ne s'est pas occupé de ce cas.

Notre première série de règles va nous permettre de décider très-facilement ce qui arrive alors.

Si nous considérons d'abord

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} = \frac{(w+\alpha)\,l(n+1) - w\,ln}{ln},$$

la limite est évidemment α; et en effet nous savons qu'elle est toujours la même que celle dont dépend la règle de M. Raabe. Si $\alpha = 1$, il faut considérer

$$\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln} = \frac{(w+1)[l(n+1) - ln]}{lln},$$

la limite est zéro, et il y a divergence.

Comme dernière application je considérerai la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n)}x^{n+1} + \ldots (*).$$

(*) Cette série a été traitée par M. Gauss dans un Mémoire qui fait partie des Commentaires de Göttingue, année 1813. Il déduit sa condition de convergence d'un théo-

Il est clair que c'est notre deuxième série de règles dont l'application doit présenter le plus de commodité. Le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(\delta+n)}\,x,$$

il a pour limite x il y a donc convergence ou divergence, suivant que x est plus petit ou plus grand que l'unité; si $x=1$, le rapport devient

$$\frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+\beta)n+\gamma\delta}=\frac{1}{1+\dfrac{n(\gamma+\beta-\alpha-\beta)-\alpha\beta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}};$$

le produit dont la convergence dépend est donc ici

$$\frac{n(\gamma+\delta-\alpha-\beta)-\alpha\beta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta};$$

ce produit aura une limite plus grande ou plus petite que 1, et par conséquent il y aura convergence ou divergence, suivant que $\gamma+\delta-\alpha-\beta$ aura une valeur plus grande ou plus petite que 1.

Si $\gamma+\delta-\alpha-\beta=1$, il faut mettre la quantité α, c'est-à-dire

$$\frac{n(\gamma+\beta-\alpha-\beta)-\alpha\delta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}=\frac{n-\alpha\beta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta},$$

---

rème qui est une conséquence immédiate des règles établies dans cet article. Voici l'énoncé de ce théorème.

Si dans une série le rapport d'un terme au précédent est représenté par la fraction rationnelle

$$\frac{n^\alpha+A\,n^{\alpha-1}+B\,n^{\alpha-2}+\ldots}{n^\alpha+A'\,n^{\alpha-1}+\ldots\ldots},$$

il y aura convergence si $A-A'$ est plus grand que 1, et divergence dans le cas contraire.

sous la forme $\frac{1}{n} + \alpha'$; on voit sans peine que

$$\alpha' = \frac{[\gamma\delta - \alpha\beta - (\alpha + \beta)]n - \alpha\beta}{n^2 + (\alpha + \beta)n + \alpha\beta};$$

le produit de α' par ln tend nécessairement vers zero; la série est donc toujours divergente dans ce cas.

Il y a donc convergence, seulement lorsque $\gamma + \delta - \alpha - \beta$ est supérieur à l'unité.

Je ne multiplierai pas davantage les applications, la maniere de faire usage de nos règles ne pouvant donner lieu à aucune difficulté.

NOTE

SUR UN POINT DU CALCUL DES VARIATIONS;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

Lorsque l'on cherche à rendre une certaine intégrale maxima ou minima, en conservant à une autre intégrale une valeur constante, la règle donnée par Euler ramène la question à la recherche du maximum absolu d'une autre intégrale, que l'on obtient en ajoutant l'une des deux premières au produit de l'autre par un facteur indéterminé.

On a donné plusieurs démonstrations de ce théorème; celle que je vais exposer me semble plus directe et peut-être plus facile. Elle est sans doute moins simple que la démonstration si connue et dégagée de tout calcul dont on se contente quelquefois; mais cette dernière démonstration me paraît insuffisante : elle prouve bien que toutes les solutions auxquelles la règle citée conduit satisfont à la question, mais non pas qu'elles soient les seules possibles.

Supposons qu'il soit question de rendre $\int_a^b \mathrm{U}dx$ maximum, $\int_a^b \mathrm{V}dx$ restant constant; il faut, comme on sait, que la variation $\delta \int_a^b \mathrm{U}dx$ s'annulle toutes les fois que $\delta \int_a^b \mathrm{V}dx$ sera elle-même égale à o; ou, en donnant à ces variations la forme connue, et supposant, pour plus de simplicité, que la question fixe d'avance tout ce qui est relatif aux limites, afin de faire disparaître des variations les termes en dehors du signe $\int$, il faut que $\int_a^b \omega u dx$ s'annulle pour toutes les valeurs de ω qui donneront $\int_a^b \omega v dx = 0$, u et v étant des fonctions qui se déduisent, comme on sait, de U et V.

Il est évident que l'on satisfait à cette condition en posant

$$u = cv,$$

c étant une constante, car alors les deux intégrales ont, quel que soit ω, un rapport constant, et s'annullent par conséquent en même temps : mais il faut prouver que cette condition $u = cv$ est nécessaire. Pour cela, supposons que le rapport $\frac{u}{v}$ ne soit pas constant, et désignons-le par $f(x)$, les deux intégrales deviendront

$$\int_a^b \omega v f(x) dx, \quad \int_a^b \omega v dx;$$

puisque $f(x)$ n'est pas constant, on peut trouver une constante c, qui, entre deux limites convenablement choisies x_0, x_1, soit toujours plus grande que $f(x)$, c'est-à-dire plus près de l'infini positif, et qui, entre deux autres limites x'_0, x'_1, soit, au contraire, constamment moindre que cette même fonction. Nous supposerons de plus ces limites assez rapprochées pour qu'aucune des fonctions $f(x)$, u et v ne change de signe dans leur intervalle.

Considérons une valeur de ω qui annulle à la fois les deux intégrales : s'il y a réellement maximum ou minimum, il suffira pour cela que cette valeur annulle la seconde. Changeons cette fonction ω seulement entre les limites x_0, x_1, et x'_0, x'_1, il est clair que ce changement pourra être fait de manière que la deuxième intégrale augmente entre les premières limites précisément autant qu'elle diminue dans les secondes, de telle sorte qu'elle conserve sa valeur o ; on peut même évidemment supposer que cela se fasse en donnant à l'accroissement arbitraire de ω constamment le même signe entre x_0, x_1, ainsi qu'entre x'_0, x'_1. Soit alors α l'accroissement de la deuxième intégrale entre x_0 et x_1, α sera aussi sa diminution entre x'_0 et x'_1 ; mais, d'après la condition $f(x) < c$ entre les premières limites, et puisque ω, v et $f(x)$ conservent constamment le même signe, l'accroissement de la première intégrale entre x_0 et x_1 sera moindre que $c\alpha$, tandis que l'inégalité $f(x) > c$ montre que sa diminution entre x'_0 et x'_1 sera, au contraire, plus grande que $c\alpha$; comme ω n'a été changé qu'entre ces limites, il ne peut pas y avoir de compensation, et la nouvelle valeur de ω, bien qu'annulant la seconde intégrale $\int_a^b \omega v dx$, donne à la première $\int_a^b \omega u dx$ une valeur différente de o. Il n'y a donc ni maximum ni minimum relatif, à moins que $\frac{u}{v}$ ne soit constant.

Si les limites étaient variables, les deux variations qui doivent s'annuler en même temps deviendraient

$$\varphi_a - \varphi_b + \int_a^b \omega u dx,$$

$$\psi_a - \psi_b + \int_a^b \omega v dx,$$

φ_a, φ_b, ψ_a, ψ_b, renfermant à tous leurs termes les valeurs que ω et ses dérivées prennent aux deux limites a et b, ou les variations de ces limites elles-mêmes. D'abord il est évident que l'on doit avoir, comme tout à l'heure, $u = cv$, car, quelles que soient les conditions aux limites, on les remplira toujours en supposant toutes les variations qui en dépendent égales à o, ce qui fera disparaître les termes φ_a, φ_b, ψ_a, ψ_b, et permettra par conséquent de répéter le raisonnement précédent. Ces deux intégrales deviennent donc

$$\varphi_a - \varphi_b + c \int_a^b \omega v dx,$$

$$\psi_a - \psi_b + \int_b^a \omega v dx.$$

Supposons que l'on choisisse un système quelconque de valeurs possibles pour les variations aux limites; on pourra toujours faire en sorte que ω soit déterminé dans l'intervalle a et b, de manière qu'avec ces valeurs limites, la somme

$$\psi_a - \psi_b + \int_a^b \omega\, dx$$

soit égale à o; mais alors on devra avoir aussi

$$\varphi_a - \varphi_b + c\int_a^b \omega v\, dx = o,$$

donc

$$\varphi_a - \varphi_b = c(\psi_a - \psi_b),$$

et cela pour des valeurs quelconques des variations aux limites.

Or les deux équations

$$u = cv, \quad \varphi_a - \varphi_b = c(\psi_a - \psi_b),$$

sont précisément celles qu'il faudrait considérer pour rendre l'intégrale $\int_a^b (U - cV)\, dx$ maximum ou minimum.

On sait comment, cette première question une fois résolue, on peut déterminer la valeur de c par la condition que $\int_a^b V\, dx$ ait précisément la valeur que la question lui assignait, car jusqu'ici nous avons seulement exprimé que cette intégrale est constante.

NOTE

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ

D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE QUELCONQUE,

ET D'UNE PYRAMIDE SPHÉRIQUE;

PAR M. L.-A.-S. FERRIOT,

Recteur honoraire de l'Academie de Grenoble.

I.

« Le centre de gravité d'une zone de la sphère est au milieu de l'axe » de cette zone. »

En effet, tout plan passant par l'axe coupe cette zone en deux parties égales; donc le centre de gravité est sur cet axe; de plus, les zones de même hauteur étant équivalentes, ce centre de gravité est au milieu de l'axe. Ces deux circonstances me paraissent suffisantes pour justifier l'énoncé; cependant si l'on voulait une démonstration plus explicite, on pourrait la présenter de la manière suivante.

Imaginons la zone proposée $mnpq$ (*fig.* 1) partagée en un nombre quelconque de zones équivalentes par des plans équidistants perpendiculaires à l'axe, et soit δ la distance du centre de gravité de la première zone partielle au milieu de son axe. Soient δ, δ', δ'',..., les distances du centre de gravité des autres zones aux milieux de leurs axes respectifs, et admettons pour un moment que toutes ces distances sont égales à la plus grande, que nous supposerons etre δ. Il est clair que dans cette hypothèse, le centre de gravité O du système de toutes ces zones, et par conséquent celui de la zone entière, se trouvera aussi à la même distance δ du milieu I de son axe gG; or, quelque petite que soit la hauteur d'une zone, il est évident que le centre de gravité est toujours compris entre les deux bases de cette zone : donc puisque la hauteur de chaque zone partielle peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, la distance $OI = \delta$ est moindre que tout ce qu'on voudra et par conséquent nulle, et à plus forte raison si les distances δ', δ'', δ''',... sont plus petites que δ.

Corollaire Ier. Le centre de gravité d'un hémisphère est au milieu du rayon perpendiculaire à la base de cet hémisphère, c'est-à-dire au milieu de la hauteur de cette zone hémisphérique.

Corollaire II. Tout hémisphère se composant de quatre triangles tri-rectangles, les centres de gravité de ces triangles égaux sont nécessairement à la même hauteur, au-dessus de la base de l'hémisphère, que le centre de gravité de cet hémisphère.

Corollaire III Tout triangle tri-rectangle faisant partie de trois hémisphères, il en résulte que son centre de gravité se trouve tout à la fois sur trois plans perpendiculaires sur les trois rayons qui aboutissent aux trois sommets de ce triangle.

Ou autrement,

Le centre de gravité d'un triangle tri-rectangle est situé à l'extrémité de la diagonale du cube construit sur les moitiés des rayons qui aboutissent aux sommets de ce triangle.

Corollaire IV. Le centre de gravité d'un fuseau dont l'angle est droit se déduit facilement du centre de gravité du triangle rectangle.

En effet, ce fuseau étant l'assemblage de deux triangles tri-rectangles, son centre de gravité est le centre de gravité de ceux de ces deux triangles, et se trouve par conséquent au milieu de la ligne qui les joint.

Corollaire V. Pour avoir le centre de gravité d'un fuseau quelconque, de celui dont l'angle est BOE (*fig.* 2), considérez en même temps le fuseau complémentaire EOC, et remarquez que les centres de gravité des deux fuseaux partiels, et celui du fuseau d'un quadrant qui est leur somme, sont nécessairement en ligne droite; de plus le centre de gravité de chacun de ces fuseaux est sur la ligne qui divise l'angle correspondant en deux parties égales, ligne ici représentée par Op' pour l'un des fuseaux et par Op'' pour l'autre.

Donc si, par le point P, centre de gravité du fuseau d'un quadrant, on mène une droite $p'Pp''$, de manière que les parties interceptées Pp' et Pp'' soient en raison inverse des fuseaux dont les angles sont BOE et EOC, ou, ce qui est la même chose, en raison inverse des angles BOE et EOC eux-mêmes, les points p' et p'' seront les centres de gravité de ces fuseaux.

Remarque. On trouverait facilement le centre de gravité d'un triangle bi-rectangle quelconque formé par trois arcs de grands cercles; on trouverait de même celui du triangle formé par deux méridiens et un parallèle à l'équateur, et de beaucoup d'autres encore au moyen de considérations particulières; mais je vais embrasser le cas général, en partant toutefois de la connaissance du centre de gravité d'un fuseau quelconque.

II.

Je commence par rappeler une proposition connue dont on trouve une démonstration dans la Géométrie de Legendre, douzième édition, livre III, proposition XXXIV, savoir :

« Si des points P et Q, comme foyers (*fig.* 3), et avec des rayons

$$(mP,\ mQ),\quad (m'P,\ m'Q),\quad (m''P,\ m''Q),\ldots$$

» assujettis à la proportion indéfinie

$$mP : mQ :: m'P : m'Q :: m''P : m''Q \ldots,$$

» on décrit des arcs de cercle, les points d'intersection m', m'', m''', ...
» seront tous sur un cercle de rayon

$$CA = \frac{AP \times AQ}{AQ - AP},$$

» et si l'on imagine que ce cercle tourne autour de son diamètre AB, » il engendrera une sphère dont les foyers seront encore P et Q. »

Cela posé, *si l'on appelle* P, P′, P″ *les centres de gravité des trois fuseaux dont le triangle* ABC *fait partie, je dis que le centre de gravité de ce triangle sera l'intersection des trois sphères dont les foyers sont* (P, P′), (P, P″), (P′, P″).

En effet, soient P, p', p'' les centres de gravité du fuseau A, du triangle ABC et du triangle A′BC (*fig.* 4). Ces trois centres de gravité seront nécessairement en ligne droite, et les distances Pp', Pp'' seront en raison inverse des surfaces des triangles ABC et A′BC, de sorte qu'on aura la proportion

$$(1)\qquad \text{ABC} : \text{A}'\text{BC} :: \text{P}p'' : \text{P}p' \quad \text{ou} \quad :: x_1 : y_1,$$

à cause que la valeur absolue des termes Pp'' et Pp' n'est point connue, mais seulement leur rapport.

Par la même raison, si l'on représente par B′AC le triangle qui complète le fuseau dont l'angle est B, on aura cette autre proportion

$$(2)\qquad \text{ABC} : \text{B}'\text{AC} :: x' : y',$$

dans laquelle, comme dans la précédente, les deux termes x' et y' sont indéterminés, leur rapport ne l'étant pas.

Actuellement, remplaçons y' par y_1 dans la proportion (2), ce qui est permis; x' prendra de lui-même la valeur qui convient à cette proportion, qui est alors

$$(3)\qquad \text{ABC} : \text{B}'\text{AC} :: x' : y_1.$$

Puis éliminant y_1 entre (1) et (3), il vient

$$\text{A}'\text{BC} : \text{B}'\text{AC} :: x' : x_1.$$

Cette dernière proportion signifie que si des points P, P′ comme foyers et avec des rayons (x', x_1) (x'', x_{11}) (x''', x_{111})... assujettis à la proportion indéfinie

$$x' : x_1 :: x'' : x_{11} :: x''' : x_{111} \ldots,$$

on décrit des arcs de cercle, tous les points obtenus de cette manière seront situés sur une sphère dont on connaît le centre et le rayon, et qui contient nécessairement le centre de gravité du triangle ABC.

Par la même raison, ce centre de gravité se trouve encore sur deux autres sphères dont l'une a pour foyers (P, P″) et l'autre (P′, P″), ce qui résout le problème et justifie l'énoncé.

Première remarque. Trois sphères se coupant toujours en deux points symétriquement placés par rapport au plan qui joint les trois centres, le second point d'intersection donne le centre de gravité du triangle A′B′C′ symétrique de ABC, et qu'on obtient en prolongeant en arrière les rayons OA, OB, OC (*fig.* 4).

Deuxième remarque. Lorsque le triangle ABC est isoscèle, le triangle des trois points (P, P′, P″) l'est aussi, et l'une des trois sphères devient un plan. Alors, les centres de gravité des deux triangles ABC, A′B′C′ sont donnés par l'intersection de ce plan et du cercle intersection des deux autres sphères.

Troisième remarque. Enfin, si le triangle proposé est équilatéral, sans être tri-rectangle, le triangle des trois points (P, P′, P″) sera également équilatéral, circonstance qui réduira les trois sphères dont ces points sont les foyers, à trois plans perpendiculaires sur les milieux des côtés du triangle PP′P″, plans qui se couperont selon une ligne droite L passant par le centre de la sphère sur laquelle on opère, et qui contient évidemment le centre de gravité cherché du triangle ABC.

Pour achever de déterminer la position de ce centre de gravité sur cette ligne droite, on décomposera le triangle ABC en trois triangles isoscèles, comme on voit (*fig.* 5); puis, par le centre de gravité d'un de ces triangles isoscèles, on mènera un plan perpendiculaire à la ligne L, et le point d'intersection de ces deux objets sera le centre de gravité du triangle équilatéral quelconque ABC.

Centre de gravité d'une pyramide triangulaire sphérique quelconque, mais formée par des arcs de grands cercles.

Pour avoir le centre de gravité d'une pyramide sphérique triangulaire quelconque, il suffit de considérer cette solidité comme la somme d'une infinité de pyramides triangulaires égales, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, et pour somme de leurs bases la surface du triangle sphérique que l'on considère, parce qu'alors chacune de ces pyramides ayant son centre de gravité aux trois quarts du rayon à partir du centre, tous ces centres de gravité forment la surface d'un autre triangle sphérique semblable au premier, situé sur une sphere concentrique et d'un rayon égal à $\frac{3}{4}$, celui de la première sphère étant 1.

Comme cas particulier, on trouvera que le centre de gravité d'un hémisphère solide est aux $\frac{3}{8}$ de sa hauteur à partir de sa base.

On trouvera de même que le centre de gravité d'un triangle tri-rectangle est situé à l'extrémité de la diagonale d'un cube construit sur les $\frac{3}{8}$ de chacun des trois rayons qui aboutissent aux trois sommets du triangle ABC et à partir du centre de la sphère.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes.*

Prenons pour variable indépendante l'arc s de la courbe qui aboutit au point dont les coordonnées, rapportées à trois axes rectangulaires, sont x, y, z : on sait que le rayon de courbure en ce point est donné par la formule

$$(1) \qquad \rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

D'un autre côté les deux plans osculateurs qui répondent aux valeurs s et $s + ds$ de la variable indépendante comprennent entre eux un angle infiniment petit $d\theta$, et si l'on fait

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\omega},$$

on a

$$\omega = \frac{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z},$$

en posant, pour abréger,

$$A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z, \quad C = dxd^2y - dyd^2x.$$

En ayant égard à l'équation (1), on peut mettre cette valeur de ω

sous la forme suivante :

$$(2)\qquad \omega = \frac{ds^6}{\rho^2(\mathrm{A}\,d^3x + \mathrm{B}\,d^3y + \mathrm{C}\,d^3z)}.$$

Le problème à résoudre consiste à intégrer les équations (1) et (2), dans lesquelles ρ et ω sont des constantes, et auxquelles il faut joindre la relation

$$(3)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

En différentiant cette dernière équation, nous trouvons, à cause de $d^2s = 0$,

$$(4)\qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0.$$

De l'équation (1) nous tirons

$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \frac{1}{\rho^2}\,ds^4,$$

et en différentiant,

$$(5)\qquad d^2x\,d^3x + d^2y\,d^3y + d^2z\,d^3z = 0.$$

L'équation (2) nous donne ensuite

$$\mathrm{A}\,d^3x + \mathrm{B}\,d^3y + \mathrm{C}\,d^3z = \frac{1}{\omega\rho^2}\,ds^6 :$$

différentions et remarquons que l'on a identiquement

$$d\mathrm{A}\,d^3x + d\mathrm{B}\,d^3y + d\mathrm{C}\,d^3z = 0 :$$

il vient

$$\mathrm{A}\,d^4x + \mathrm{B}\,d^4y + \mathrm{C}\,d^4z = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(6)\qquad \mathrm{A}_1\,dx + \mathrm{B}_1\,dy + \mathrm{C}_1\,dz = 0.$$

en faisant

$$\mathrm{A}_1 = d^2y\,d^4z - d^2z\,d^4y,\quad \mathrm{B}_1 = d^2z\,d^4x - d^2x\,d^4z,\quad \mathrm{C}_1 = d^2x\,d^4y - d^2y\,d^4x.$$

Si maintenant nous différentions deux fois de suite l'équation (4), nous trouverons, en ayant égard à l'équation (5),

$$dx\,d^4x + dy\,d^4y + dz\,d^4z = 0,$$

et de cette dernière, jointe à l'équation (4), nous conclurons facilement

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{B_1} = \frac{dz}{C_1}.$$

Nous pouvons donc, dans l'équation (6), remplacer dx, dy, dz par les quantités proportionnelles A_1, B_1, C_1 : il nous vient de cette façon

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 0,$$

et par conséquent

$$(7) \qquad A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Les expressions désignées par A_1, B_1, C_1 étant des différentielles exactes, on peut intégrer immédiatement les équations (7); on trouve ainsi

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y &= f\,ds^5, \\ d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z &= g\,ds^5, \\ d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x &= h\,ds^5, \end{aligned} \right.$$

f, g, h désignant trois constantes arbitraires.

Si maintenant nous ajoutons les trois équations (8), après les avoir multipliées respectivement par d^2x, d^2y, d^2z, il nous viendra, en divisant par ds^5,

$$f\,d^2x + g\,d^2y + h\,d^2z = 0,$$

et en intégrant, et nommant k une constante,

$$(9) \qquad f\,dx + g\,dy + h\,dz = k\,ds.$$

Faisons

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos 6,$$

$$\frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos\gamma,$$

et l'équation (9) pourra s'écrire

$$(10)\qquad \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = \frac{k}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}.$$

Sous cette forme elle exprime que toutes les tangentes à la courbe cherchée font des angles égaux avec une même droite, et cette droite est celle qui fait avec les axes des coordonnées les angles α, β, γ.

Pour simplifier, nous pouvons prendre maintenant l'axe des z parallèle à cette droite : nous aurons alors

$$\frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos\varepsilon,$$

en nommant ε l'angle constant que font avec cet axe les tangentes à la courbe cherchée.

De cette équation nous tirons $d^2z = 0$, ce qui montre que l'on peut prendre z pour variable indépendante, et $ds = \frac{dz}{\cos\varepsilon}$. Substituons cette valeur dans l'équation (3) ; elle devient

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 \operatorname{tang}^2\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$dy = \sqrt{dz^2 \operatorname{tang}^2\varepsilon - dx^2},$$

et en différentiant,

$$d^2y = -\frac{dx\, d^2x}{\sqrt{dz^2 \operatorname{tang}^2\varepsilon - dx^2}}.$$

Portons dans l'équation (1) les valeurs de ds, d^2z et d^2y ; elle devient, après les réductions,

$$\rho^2 d^2x^2 \sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon = dz^4 \operatorname{tang}^2\varepsilon - dx^2\, dz^2 :$$

on en tire

$$dz = \frac{\rho \sin\varepsilon \cos\varepsilon \dfrac{d^2x}{dz}}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\varepsilon - \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2}},$$

et en intégrant et nommant c une constante,

$$z - c = \pm \rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon . \text{ arc sin } \frac{dx}{dz \operatorname{tang} \varepsilon}.$$

On tire de cette équation

$$dx = \pm dz \operatorname{tang} \varepsilon \sin \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

et par conséquent

$$(11) \qquad x - a = \pm \rho \sin^2 \varepsilon \cos \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

a étant une constante.

D'un autre côté l'équation

$$dy = \sqrt{dz^2 \operatorname{tang}^2 \varepsilon - dx^2}$$

devient

$$dy = \pm dz \operatorname{tang} \varepsilon \cos \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

et il en résulte, b désignant une nouvelle constante,

$$(12) \qquad y - b = \pm \rho \sin^2 \varepsilon \sin \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon}.$$

Les équations (11) et (12), d'où l'on déduit encore celle-ci

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2 \sin^4 \varepsilon,$$

appartiennent à une hélice tracée sur un cylindre droit dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, et dont le rayon est $\rho \sin^2 \varepsilon$.

Ainsi l'hélice est la seule courbe dont la courbure et la torsion soient constantes.

THÈSE

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

AUTOUR D'UN POINT FIXE;

Par M. BRIOT,

Professeur au Collége royal d'Orléans.

Cette thèse a pour but la démonstration des théorèmes de mécanique énoncés dans le Mémoire publié par M. Poinsot, sous le titre de *Théorie nouvelle de la rotation des corps*.

Un déplacement quelconque imprimé à un corps solide tournant autour d'un point fixe peut être produit par une rotation autour d'un axe fixe. Il s'ensuit que, dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, il y a à chaque instant une série de points en ligne droite qui ont une vitesse nulle; cette droite s'appelle *axe instantané de rotation*. Les lieux des axes instantanés dans le corps et dans l'espace sont deux cônes ayant pour sommet commun le point fixe, et *le mouvement du corps peut être représenté par le mouvement du premier cône roulant sans glisser sur la surface du second cône*.

§ Ier.

Etat initial résultant d'une impulsion primitive.

Décomposons le couple d'impulsion en trois couples perpendiculaires aux trois axes principaux d'inertie; d'après les propriétés des axes permanents, chacun de ces couples produira autour de l'axe auquel il est perpendiculaire une rotation égale à l'intensité de ce couple divisée par le moment d'inertie du corps suivant l'axe. Si donc on représente par L, M, N ces trois couples composants, par A, B, C les trois moments principaux d'inertie, on aura autour des trois axes principaux d'inertie trois rotations $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$. Ces trois rotations se composent en une seule représentée par la diagonale du parallélipipède construit sur les rotations composantes; l'axe initial de rotation formera donc avec les axes principaux d'inertie des angles dont les cosinus sont proportionnels aux quantités $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$, projections de la rotation initiale sur ces mêmes axes. En prenant pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie, l'ellipsoïde central a pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Menons à cet ellipsoïde un plan tangent parallèle au couple d'impulsion; appelons x, y, z les coordonnées du point de contact, l'équation de ce plan tangent sera

$$Axx' + Byy' + Czz' = 1,$$

et l'on aura les relations suivantes

$$\frac{Ax}{L} = \frac{By}{M} = \frac{Cz}{N},$$

ou

$$\frac{x}{\left(\frac{L}{A}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{M}{B}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{N}{C}\right)}.$$

Ces relations montrent que la droite qui va du centre au point de contact, diamètre conjugué du plan tangent, se confond avec l'axe initial de rotation. Ainsi :

Théorème I^er. *L'axe instantané de la rotation produite par un* *couple d'impulsion quelconque est le diamètre conjugué au plan de ce couple dans l'ellipsoïde central.*

Quant à la vitesse angulaire, elle est évidemment égale au moment du couple estimé perpendiculairement à ce diamètre et divisé par le moment d'inertie du corps suivant ce même diamètre; car pendant l'impulsion on pourrait rendre fixe ce diamètre, l'effet produit serait le même.

§ II.

Du couple des forces centrifuges.

Si l'on considère le corps à un certain instant, la vitesse actuelle pourra être produite par un couple d'impulsion dont le plan serait conjugué à l'axe instantané de rotation. Soient O le point fixe (*fig.* 1, *Pl.* I), OP l'axe instantané de rotation à un certain moment, OA l'axe du couple d'impulsion qui produirait la vitesse actuelle (ce couple n'est autre chose que le couple des quantités de mouvement). Appliquons aux différents points du corps des forces centrales telles que sous leur influence le corps tourne d'un mouvement uniforme autour de OP, et des forces centrifuges égales et contraires. Ce système de forces centrifuges se compose en un couple que nous appellerons *couple des forces centrifuges*. Lorsque ce couple est nul et qu'aucune force extérieure n'agit sur le corps, il est clair que le corps doit tourner indéfiniment autour de OP comme autour d'un axe fixe; mais cela n'arrive que lorsque OP se confond avec l'un des axes principaux d'inertie, que pour cette raison on a nommés axes permanents de rotation; dans tous les autres cas ce couple n'est pas nul et il agit avec le couple des forces extérieures pour changer l'axe et la grandeur de la rotation. On voit par là combien est importante l'étude de ce couple des forces centrifuges: nous allons rechercher sa direction et sa grandeur.

Considérons le mouvement pendant un temps très-petit θ; en vertu de la vitesse acquise et des forces centrales, le corps décrira, en tournant autour de OP d'un mouvement uniforme, un angle

$\alpha = \omega\theta$ (ω représente la vitesse angulaire); l'axe OA du couple des quantités de mouvement tournera comme s'il était lié au corps et viendra en OA′ sans changer de grandeur. L'action du couple des forces centrifuges (j'appelle F son intensité) pendant le temps θ peut être remplacée par un petit couple d'impulsion $F\theta$; il faudra composer ce couple $F\theta$ avec le couple OA′ des quantités de mouvement: le couple résultant sera le couple des quantités de mouvement au commencement du second instant, si l'on fait abstraction des forces extérieures qui agissent sur le corps; or dans ce cas le principe des aires a lieu, c'est-à-dire que le couple des quantités de mouvement ne change pas; donc le couple $F\theta$ est représenté par le côté OF du parallélogramme OA′AF. OA′ étant égal à OA et l'angle A′OP étant égal à l'angle AOP, si l'on fait décroître α indéfiniment, à la limite AA′ où OF sera perpendiculaire au plan AOP. Donc,

Théorème II. *Le plan du couple des forces centrifuges n'est autre chose que le plan qui passe par l'axe instantané de rotation et par l'axe du couple des quantités de mouvement.*

Des points A et A′ abaissons dans les plans AOP et A′OP des perpendiculaires AI et A′I sur OP; on a

$$AA' = 2AI \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

J'appelle U l'angle AOP; $AI = OA \sin U$; l'angle α étant infiniment petit, je remplace le sinus par l'arc; on a donc

$$F\theta = AA' = OA \sin U\alpha = OA\omega \sin U\theta;$$

d'où

$$F = OA\omega \sin U.$$

Ainsi,

Théorème III. *La grandeur du couple des forces centrifuges est égale à la surface du parallélogramme construit sur l'axe du couple des quantités de mouvement et sur la rotation actuelle ω.*

Quant au sens de ce couple, il est facile de voir qu'il tend à faire tourner son plan en allant de l'axe du couple des quantités de mouvement vers l'axe de rotation à travers le parallélogramme.

§ III.

Équations générales du mouvement.

Les théorèmes que nous venons de démontrer conduisent d'une manière très-simple aux équations générales du mouvement. Et d'abord, cherchons les projections de l'axe du couple des forces centrifuges sur les axes principaux d'inertie. J'appelle p, q, r, les projections de la rotation actuelle ω sur ces axes; les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement sur ces mêmes droites seront $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$; en vertu du théorème II, les projections cherchées seront représentées par

$$m(\mathrm{B}-\mathrm{C})qr,\quad m(\mathrm{C}-\mathrm{A})rp,\quad m(\mathrm{A}-\mathrm{B})pq.$$

En vertu du théorème III, $m = \pm 1$; le sens du couple dira quel signe il faut prendre. En effet, supposons $p = 0$, les deux droites OA et OP seront toutes deux situées dans le plan $y\mathrm{O}z$ (*fig.* 2); $\tang \mathrm{PO}y = \frac{r}{q}$ et $\tang \mathrm{AO}y = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\frac{r}{q}$, de sorte que si C est plus petit que B, et de plus q et r positives, ces deux droites auront la position indiquée sur la figure; mais alors l'axe du couple des forces centrifuges tombera sur la partie positive de l'axe des x. Donc $m = -1$ et les projections cherchées sont

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C})qr,\quad (\mathrm{C}-\mathrm{A})rp,\quad (\mathrm{A}-\mathrm{B})pq.$$

On peut trouver directement les expressions précédentes, ce qui donne une nouvelle démonstration des théorèmes II et III. Soient M (*fig.* 3) un point du corps, MI la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe de rotation OP. La force centrifuge est dirigée suivant

MS et a pour valeur ω^2MI; en appelant x, y, z les coordonnées du point M, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point I, ses trois composantes sont

$$\omega^2(x - x_1),\quad \omega^2(y - y_1),\quad \omega^2(z - z_1).$$

On a

$$\text{OI} = \text{OM}\cos\text{MOP} = \frac{px+qy+rz}{\omega},\quad x_1 = \frac{p.\text{OI}}{\omega},\quad y_1 = \frac{q.\text{OI}}{\omega},\quad z_1 = \frac{r.\text{OI}}{\omega};$$

d'où les composantes de la force centrifuge

$$\begin{aligned}
\text{X} &= q(qx - py) + r(rx - pz),\\
\text{Y} &= r(ry - qz) + p(py - qx),\\
\text{Z} &= p(pz - rx) + q(qz - ry),
\end{aligned}$$

et les moments des forces centrifuges

$$\begin{aligned}
&\sum m(\text{Z}y - \text{Y}z) = qr\sum m(z^2 - y^2) = (\text{B} - \text{C})\,qr,\\
&\sum m(\text{X}z - \text{Z}x) = rp\sum m(x^2 - z^2) = (\text{C} - \text{A})\,rp,\\
&\sum m(\text{Y}x - \text{X}y) = pq\sum m(y^2 - x^2) = (\text{A} - \text{B})\,pq.
\end{aligned}$$

Voyons maintenant les équations du mouvement. Nous prenons pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie quand le corps a tourné de l'angle α autour de OP (*fig.* 1). Le couple des quantités de mouvement au second instant, lequel a pour projections

$$\text{A}(p + dp),\quad \text{B}(q + dq),\quad \text{C}(r + dr),$$

est le couple résultant, 1° du couple OA′ des quantités de mouvement à la fin du premier instant: les projections de ce couple sont Ap, Bq, Cr; 2° du petit couple d'impulsion qui remplace l'action des forces centrifuges pendant le temps dt, et dont les projections sont, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre,

$$(B - C)\, qr\, dt, \quad (C - A)\, rp\, dt, \quad (A - B)\, pq\, dt;$$

3° du petit couple d'impulsion qui remplace l'action des forces extérieures pendant le temps dt : je représente les projections de ce couple par $\mathrm{L}dt$, $\mathrm{M}dt$, $\mathrm{N}dt$. On a donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} C\,(p + dp) &= Ap + (B - C)\, qrdt + \mathrm{L}dt, \\ B\,(q + dq) &= Bq + (C - A)\, rpdt + \mathrm{M}dt, \\ C\,(r + dr) &= Cr + (A - B)\, pqdt + \mathrm{N}dt. \end{aligned}$$

ou

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\,\frac{dp}{dt} - (B - C)\, qr &= \mathrm{L}, \\ B\,\frac{dq}{dt} - (C - A)\, rp &= \mathrm{M}, \\ C\,\frac{dr}{dt} - (A - B)\, pq &= \mathrm{N}. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les trois équations d'Euler.

§ IV.

Du mouvement, lorsque le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice.

Quand aucune force accélératrice n'agit sur le corps, les seconds membres des équations (1) sont nuls, et l'on a immédiatement deux intégrales premières qui correspondent, l'une au principe des aires

$$(2) \qquad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

l'autre au principe des forces vives

$$(3) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Ces deux intégrales premières conduisent par l'analyse à des théorèmes remarquables qui donnent une idée nette du mouvement; mais nous arriverons aux mêmes conséquences en suivant la méthode de M. Poinsot, par la simple considération du couple des forces centrifuges. Cherchons d'abord autour de quel axe ce couple tend à faire tourner le corps. Soit OH (*fig.* 4) la projection de OP sur le plan du couple des quantités de mouvement; soit OQ le diamètre conjugué de OH dans l'ellipse suivant laquelle ce plan coupe l'ellipsoïde central; les trois droites OP, OH et OQ formeront un système de trois diamètres conjugués dans l'ellipsoïde. Donc OQ conjugué du plan AOH, plan du couple des forces centrifuges, est l'axe de rotation autour duquel ce couple tend à faire tourner ce corps. Donc,

Théorème IV. *L'axe autour duquel le couple des forces centrifuges tend à faire tourner le corps est situé dans le plan du couple des quantités de mouvement.* Dans le cas que nous considérons ce plan est le plan fixe du maximum des aires.

Si nous composons la rotation OP avec la rotation infiniment petite OQ, produite par le couple des forces centrifuges dans le temps θ, la résultante OR sera la rotation au second instant. Or, si l'on a représenté la vitesse de rotation au premier instant par le rayon vecteur de l'ellipsoïde, OQ et OP étant conjuguées, PR sera tangente à l'ellipsoïde. c'est-à-dire que le point R sera encore sur l'ellipsoïde. Donc,

Théorème V. *Quand le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice, la vitesse de rotation est proportionnelle au rayon vecteur qui va du centre au pôle instantané de rotation.* (Nous appelons pôle le point où l'axe de rotation perce la surface de l'ellipsoïde.

PR étant parallèle à OQ, et OQ restant constamment dans le plan fixe, il s'ensuit que le lieu des pôles dans l'espace est une courbe plane parallèle à ce plan fixe. De plus, le plan tangent au pôle à l'ellipsoïde étant parallèle au plan fixe, on en conclut que ce plan tangent est lui-même fixe dans l'espace. Ainsi,

Théorème VI. *Le plan tangent à l'ellipsoïde central au pôle de rotation est fixe dans l'espace.*

A l'aide des théorèmes précédents on arrive à une représentation très-simple du mouvement d'un corps qui tourne autour d'un point fixe sans être sollicité par aucune force accélératrice. *L'ellipsoïde central roule sans glisser sur le plan fixe avec lequel on l'a mis en contact primitivement, et la vitesse angulaire de rotation est proportionnelle au rayon vecteur qui va du centre au point de contact.*

§ V.

Des deux courbes décrites par le pôle instantané de rotation.

Le lieu des pôles à la surface de l'ellipsoïde, lieu que M. Poinsot a nommé *poloïde*, peut être considéré comme la suite des points où l'ellipsoïde serait touché par un plan mobile qui resterait toujours à la même distance δ du centre.

L'équation de l'ellipsoïde est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \tag{4}$$

et celle du plan tangent

$$Axx' + Byy' + Czz' = 1. \tag{5}$$

On a donc

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}},$$

ou

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{1}{\delta^2} = l. \tag{6}$$

Les deux équations (4) et (6) sont les équations de la poloïde; ces deux équations combinées donnent

$$A(A - l)x^2 + B(B - l)y^2 + C(C - l)z^2 = 0: \tag{7}$$

c'est l'équation du lieu des axes instantanés dans l'intérieur du corps; ce lieu est *un cône du second degré elliptique autour de l'axe maximum ou autour de l'axe minimum de l'ellipsoïde,* suivant que δ est plus grand ou plus petit que l'axe moyen de l'ellipsoïde.

La poloïde est donc une courbe fermée à double courbure qui a quatre sommets principaux où elle est divisée en quatre parties égales et symétriques; elle se projette en une ellipse sur le plan perpendiculaire à celui des deux axes qui lui sert d'essieu, en un arc d'ellipse sur le plan perpendiculaire à l'autre axe, enfin en un arc d'hyperbole sur le plan perpendiculaire à l'axe moyen.

Des équations (4) et (6), en appelant ρ la longueur du rayon vecteur mené du centre à la poloïde, on déduit les relations suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{AB}.\rho^2 = (\mathrm{A}-\mathrm{C})(\mathrm{B}-\mathrm{C})z^2 - l + (\mathrm{A}+\mathrm{B}), \\ \mathrm{BC}.\rho^2 = (\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{A})x^2 - l + (\mathrm{B}+\mathrm{C}), \\ \mathrm{CA}.\rho^2 = (\mathrm{C}-\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})y^2 - l + (\mathrm{C}+\mathrm{A}). \end{array}\right.$$

Soit B le moment principal moyen d'inertie; dans la dernière des équations (8), le coefficient de y^2 est négatif, donc *le maximum de ρ a lieu* pour $y = 0$, c'est-à-dire *aux sommets de la poloïde situés dans le plan principal moyen de l'ellipsoïde.* Les deux premières équations montrent que *le minimum de ρ a lieu aux deux autres sommets.*

L'équation différentielle de la poloïde entre le rayon vecteur ρ et l'arc de la poloïde s'obtient aisément; si l'on pose en effet

$$(9)\qquad \mathrm{H} = (\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{B}-\mathrm{C})(\mathrm{A}-\mathrm{C}),$$

les équations (8) donnent

$$z^2 = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{H}}\left[\mathrm{AB}.\rho^2 + l - (\mathrm{A}+\mathrm{B})\right],$$

$$dz^2 = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{H}}\,\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\rho^2\,d\rho^2}{\mathrm{AB}.\rho^2 + l - (\mathrm{A}+\mathrm{B})};$$

d'où

$$(10)\qquad \sqrt{\mathrm{H}}\,ds = \rho\,d\rho\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\mathrm{AB}\rho^2+l-(\mathrm{A}+\mathrm{B})}+\frac{\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\mathrm{BC}.\rho^2+l-(\mathrm{B}+\mathrm{C})}+\frac{\mathrm{C}^2\mathrm{A}^2(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{\mathrm{CA}.\rho^2+l-(\mathrm{C}+\mathrm{A})}}.$$

Le lieu des pôles sur le plan fixe peut être considéré comme engendré par la poloïde qu'on ferait rouler autour du centre sur ce plan fixe. Soient I (*fig.* 5) la projection du centre sur le plan fixe; IG et IH les rayons de deux circonférences tracées sur ce plan ayant pour centre commun I, et telles que les rayons vecteurs allant du centre de l'ellipsoïde à ces deux circonférences soient les rayons vecteurs maximum et minimum de la poloïde. Le lieu des pôles sur le plan fixe sera entièrement compris entre ces deux circonférences, et il se composera d'une série d'arcs égaux à l'arc $aba'b'a_1$ engendré par un tour de la poloïde. Si l'arc aa_1 est commensurable avec la circonférence, cette courbe, que M. Poinsot a nommée *serpoloïde* à cause de sa forme, se ferme après un certain nombre de révolutions, et l'axe instantané revient en même temps au même lieu du corps et de l'espace; dans le cas contraire la courbe ne se ferme pas, et l'axe qui revient toujours périodiquement au même lieu dans le corps ne revient jamais au même lieu dans l'espace.

L'équation (10) est aussi l'équation différentielle de la serpoloïde entre le rayon vecteur émané du centre O et l'arc. Si l'on voulait avoir l'équation polaire de cette courbe par rapport au point I, il faudrait dans l'équation (10) remplacer ρ et s par leurs valeurs données par les équations suivantes :

$$(11)\qquad \rho^2 = \delta^2 + \rho_1^2,\quad ds^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2\,d\vartheta^2.$$

Pour compléter la solution il ne reste plus qu'à déterminer la vitesse angulaire de rotation en fonction du temps. On a

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = h\rho\frac{d\rho}{dt} = p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt},$$

et, en vertu des équations (1) privées de seconds membres,

$$h\rho\frac{d\rho}{dt} = pqr\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right) = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{ABC}}\,pqr.$$

Les équations (8) donnent

$$(A - B)\left[AB.\rho^2 + l - (A + B)\right] = \frac{H}{h}\, r^2,$$

$$(B - C)\left[BC.\rho^2 + l - (B + C)\right] = \frac{H}{h}\, p^2,$$

$$(C - A)\left[CA.\rho^2 + l - (C + A)\right] = \frac{H}{h}\, q^2,$$

d'où

$$(12)\qquad \frac{ABC}{\sqrt{h}}\,\rho d\rho = dt\,\sqrt{-\left[AB.\rho^2 + l - (A+B)\right]\left[BC.\rho^2 + l - (B+C)\right]\left[CA.\rho^2 + l - (C+A)\right]}.$$

Les deux transcendantes elliptiques (10) et (12) déterminent complétement le mouvement. La combinaison de ces deux équations donne $\frac{ds}{dt}$, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle le pôle se meut sur la serpoloïde.

§ VI.

Examen de quelques cas particuliers.

Dans le cas où δ est égal à l'axe moyen de l'ellipsoïde, l'équation (7) représente deux plans; donc la poloïde est une ellipse dont le plan passe par l'axe moyen. L'équation (10), si l'on remplace ρ et s par leurs valeurs (11), se réduit dans ce cas à

$$(13)\qquad d\theta = \frac{\sqrt{AC}.d\rho_1}{\rho_1\sqrt{(A-B)(B-C) - ABC\rho_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{B}}\,\frac{d\rho_1}{\sqrt{m^2 - \rho_1^2}},$$

en posant

$$m^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{ABC}.$$

L'intégrale de cette expression est

$$(14)\qquad \rho_1 = \frac{2m}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}},$$

en choisissant l'axe polaire de telle sorte que pour $\theta = 0$, ρ_1 ait sa valeur maximum qui est m. Cette équation (14) représente une double spirale; les deux branches partant toutes deux du point G (*fig.* 6) s'en vont, l'une d'un côté, l'autre de l'autre, aboutir, après un nombre infini de circonvolutions, au point asymptotique I. Dans ce cas on peut aussi intégrer l'équation (12), car elle se réduit à

$$(15)\qquad \frac{\sqrt{h}}{B}\,dt = \frac{\pm\rho\, d\rho}{(B\rho^2+1)\sqrt{n^2-\rho^2}},\quad n^2 = \frac{A+C-B}{AC}.$$

Le pôle étant placé originairement en un point quelconque de la spirale, il se mouvra sur cette spirale dans un sens ou dans l'autre, selon le sens de la rotation; et, après avoir dépassé le sommet G, s'il le dépasse, il se rapprochera indéfiniment du point I, en même temps que la vitesse angulaire converge vers une valeur finie; mais il n'atteindra jamais le point I.

Dans le cas où l'ellipsoïde central est un ellipsoïde de révolution, la poloïde devient un cercle autour de l'axe de révolution; la serpoloïde devient aussi un cercle.

§ VII.

Autre manière de se représenter la rotation d'un corps qui n'est soumis à aucune force accélératrice.

Considérons le plan AOP (*fig.* 4) qui passe par l'axe fixe et l'axe de rotation instantané; OH est la trace de ce plan sur le plan fixe du maximum des aires. Le mouvement du plan AOH ou de la ligne OH dans le plan fixe ou équateur, constitue le mouvement de *précession;* le mouvement de l'axe de rotation dans le plan AOH constitue le mouvement de *nutation.* La rotation ω autour de OP peut se décomposer en deux rotations, l'une $\omega\cos U$ autour de OA, l'autre $\omega \sin U$ autour de OH; or $\omega\cos U$ est une quantité constante, donc *le mouvement de précession est uniforme.* Quant au mouvement de nutation, il est facile à déterminer, car $\rho\cos U =$ const., et l'on connaît ρ en fonction de t.

Cherchons le lieu de la ligne OH dans le corps; les équations du plan fixe et du plan AOH sont

$$\mathrm{A}px + \mathrm{B}qy + \mathrm{C}rz = 0,$$

$$(\mathrm{B} - \mathrm{C})\,qrx + (\mathrm{C} - \mathrm{A})\,rpy + (\mathrm{A} - \mathrm{B})\,pqz = 0;$$

d'où

$$\frac{x}{p(\mathrm{A}-l)} = \frac{y}{q(\mathrm{B}-l)} = \frac{z}{r(\mathrm{C}-l)}.$$

Éliminons p, q, r, on a

$$(16)\qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}-l}x^2 + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B}-l}y^2 + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}-l}z^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré; d'où une nouvelle image du mouvement du corps solide: on peut le représenter par celui *d'un cône elliptique qui roule sur le plan fixe du maximum des aires avec une vitesse variable et qui glisse sur ce plan avec une vitesse constante*.

Dans le cas où δ est égal à l'axe moyen de l'ellipsoïde, l'équation (16) se réduit à $y = 0$; d'ailleurs $\frac{x}{z} = \frac{p}{r}\frac{\mathrm{A}-l}{\mathrm{C}-l}$ et $\frac{p}{r}$ est constante; donc, dans ce cas, la ligne OH est fixe dans le corps, c'est un diamètre situé dans le plan moyen de l'ellipsoïde central, de sorte que *le mouvement du corps consiste simplement à tourner sur ce diamètre avec une vitesse variable, tandis que ce diamètre décrit uniformément un cercle dans l'espace*.

§ VIII.

Propriétés des trois axes principaux d'inertie relatives à la stabilité de la rotation.

Les axes principaux sont tous trois des axes permanents de rotation, mais il y existe une grande différence entre les axes extrêmes et l'axe moyen, relativement à la stabilité de la rotation. En effet, si l'on écarte l'axe instantané de l'un des axes extrêmes d'une quantité très-petite, l'écartement restera très-petit dans tout le cours du mouvement, à cause que le pôle instantané décrira sa poloïde autour de cet axe extrême. Au contraire, pour peu qu'on écarte l'axe instantané de l'axe moyen, l'écartement deviendra considérable, le pôle instantané s'en allant décrire sa poloïde autour de l'un des axes extrêmes. Ainsi les axes principaux extrêmes sont des axes permanents stables, l'axe principal moyen est un axe permanent instable. Quant à la stabilité relative des deux axes extrêmes, on peut s'en faire une idée par l'aire des deux fuseaux déterminés sur la surface de l'ellipsoïde central par les deux plans que représentent l'équation (7) quand $B = l$.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UNE

FORMULE ANALYTIQUE REMARQUABLE,

SUIVIE

DE QUELQUES PROPOSITIONS ARITHMÉTIQUES QUI S'EN DÉDUISENT;

Par M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait du Journal de M. Crelle. — Traduction de M. Cabart.)

Le premier exemple d'une série développée suivant des puissances croissantes dont les exposants forment une progression arithmétique du second ordre a été donné par Euler dans l'*Introductio in Analysin infinitorum*.

Dans le chapitre *De partitione numerorum*, § 323, il trouve, par induction, que le développement du produit infini

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots$$

donne une série dont le terme général est

$$(-1)^m x^{\frac{3m^2 \pm m}{2}}.$$

On a donc, puisque $3m^2 - m$ se déduit de $3m^2 + m$ en changeant $+m$ en $-m$,

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}.$$

Ce résultat intéressant, que plus tard Euler a démontré de la manière la plus ingénieuse dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, est une conséquence immédiate des développements que fournit la théorie des *fonctions elliptiques*. (Voyez *Fundam. nova funct. ellipt.*, § 66.)

La théorie des fonctions elliptiques ne fournit pas seulement le développement du produit infini ci-dessus : elle donne encore le développement du cube de ce produit ; et, dans la série qui l'exprime, les exposants forment pareillement une progression arithmétique du second ordre. Voici cette série :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

De là ce résultat remarquable, et jusqu'à ce jour unique dans l'analyse,

$$[1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots]^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 \ldots$$

ou

$$(1) \qquad \left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right]^3 = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

[Voyez *Fundam. nova funct. ellipt.*, § 66, *équation* (7).]

Je ne connais du moins aucune autre série dans laquelle les exposants des puissances forment une progression arithmétique du second ordre, et dont le cube ou toute autre puissance reproduise une série semblable. Mais plus cette formule est remarquable, plus, ce me semble, il est digne de nos efforts de montrer qu'on y est conduit, indépendamment de toute théorie, par une voie élémentaire.

Prenons dans l'équation (1) les logarithmes des deux membres, différentions par rapport à x et multiplions par $2x$; nous aurons

$$\frac{3\sum(-1)^m (3m^2+m) x^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}} = \frac{\sum(-1)^n (2n+1)(n^2+n) x^{\frac{n^2+n}{2}}}{\sum(-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}}.$$

Chassant les dénominateurs et écrivant tout dans un membre,

$$(2)\qquad \sum\sum(-1)^{m+n}(2n+1)[3(3m^2+m)-(n^2+n)]\,x^{\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2}}=0.$$

Dans cette équation on doit mettre pour n tous les *nombres entiers* depuis 0 jusqu'à $+\infty$, et pour m tous les *nombres entiers* depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. L'expression

$$3(3m^2+m)-(n^2+n)$$

se décompose dans les deux facteurs

$$3m-n,\quad 3m+n+1.$$

Nous pouvons de plus, puisque l'équation (2) doit subsister pour toute valeur de x, remplacer x par une puissance quelconque de x, et multiplier aussi l'équation par une puissance de x. Si de la sorte on écrit x^{24} pour x, l'exposant de x dans le terme général deviendra

$$36m^2+12m+3(4n^2+4n)=(6m+1)^2+3(2n+1)^2-4;$$

multipliée en outre par x^4, l'équation (2) se change en

$$\sum\sum(-1)^{m+n}(2n+1)(3m-n)(3m+n+1)\,x^{(6m+1)^2+3(2n+1)^2}=0.$$

Posons ici

$$(3)\qquad 6m+1=a,\quad 2n+1=b.$$

Il vient

$$3m+n+1=\frac{a+b}{2},\quad 3m-n=\frac{a-b}{2},$$

$$(-1)^{m+n}=(-1)^{3m-n}=(-1)^{\frac{a-b}{2}},$$

et finalement

$$(4)\qquad \sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}\,b\,(a^2-b^2)\,x^{a^2+3b^2}=0.$$

Cette sommation se rapporte à toute valeur positive ou négative de a de la forme $6m+1$ et à toute valeur impaire positive de b.

De même que l'équation (4) a été déduite de l'équation (1), on pourrait inversement déduire l'équation (1) de l'équation (4). Nous n'avons donc qu'à vérifier l'équation (4), puisque par cela seul l'équation (1) sera établie.

Comme l'équation (4) doit subsister pour toute valeur de x, les termes pour lesquels a^2+3b^2 prend la même valeur doivent disparaître d'eux-mêmes. Nous verrons qu'en effet il en est ainsi, et de telle sorte que deux termes prennent toujours le même coefficient avec des signes contraires, et par conséquent se détruisent l'un l'autre.

Les entiers a et b étant impairs, la formule

$$a^2+3b^2=\left(\frac{a\mp 3b}{2}\right)^2+3\left(\frac{a\pm b}{2}\right)^2$$

donne deux nouveaux systèmes de valeurs entières a', b', pour lesquels $a'^2+3b'^2$ prend la même valeur que a^2+3b^2, à savoir,

$$a'=\frac{a-3b}{2},\quad b'=\frac{a+b}{2},$$

$$a'=\frac{a+3b}{2},\quad b'=\frac{a-b}{2};$$

comme a' et b' peuvent être aussi bien négatifs que positifs, on a en tout huit couples de valeurs des nombres a' et b', qui sont

$$(5)\qquad a'=\pm\frac{a-3b}{2},\quad b'=\pm\frac{a+b}{2},$$

$$(6)\qquad a'=\pm\frac{a+3b}{2},\quad b'=\pm\frac{a-b}{2}.$$

Mais pour que ces formules se rapportent à un nouveau terme de la série (4), a' et b' doivent être soumis aux mêmes conditions que a et b; a' doit donc laisser le reste $+1$ à la division par 6, et b' être impair et positif. Ces restrictions réduisent à une seule les huit paires de valeurs que présentaient les équations (5) et (6).

En effet, la somme des deux nombres $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ étant a, et a étant un nombre impair, l'un de ces nombres doit être pair et l'autre doit être impair. Nous représenterons l'impair par $\frac{a+\varepsilon b}{2}$, de sorte que $\varepsilon = +1$ quand $\frac{a+b}{2}$ est impair, $\frac{a-b}{2}$ pair; $\varepsilon = -1$, quand $\frac{a+b}{2}$ est pair, $\frac{a-b}{2}$ impair; ou, en notations,

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

D'après cela, on doit avoir

$$b' = \pm \frac{a+\varepsilon b}{2}$$

pour que la condition que b' soit un nombre impair soit remplie.

A cette valeur de b' se joint la valeur de

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2},$$

ce qui nous donne

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \pm \frac{a+\varepsilon b}{2}.$$

Des quatre couples de valeurs qui sont contenus dans ces formules, nous devons encore en exclure deux, car, puisque b' doit être positif, nous devons déterminer le double signe de $\frac{a+\varepsilon b}{2}$, de sorte que $\pm \frac{a+\varepsilon b}{2}$ soit positif. Nous écrirons $b' = \varepsilon' \frac{a+\varepsilon b}{2}$; ε' étant $= \pm 1$ et choisi de façon à rendre b' positif. Ainsi

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \varepsilon' \frac{a+\varepsilon b}{2}.$$

Nous pouvons maintenant facilement décider de l'ambiguïté du signe de a'. La formule qui le fournit montre que, selon qu'on choisit le signe supérieur ou le signe inférieur, $2a' - a$, ou $2a' + a$ est divisible par 3; mais comme $a' = 6m' + 1$, et que a doit être de même forme, $2a' + a$ peut seul être divisible par 3, tandis que $2a' - a$ laisse 1 pour reste.

C'est donc le signe inférieur que nous devons prendre, et nous aurons

$$a' = -\frac{a - 3\varepsilon b}{2}.$$

Que cette formule soit effectivement de la forme $6m' + 1$, c'est ce qu'il est facile de démontrer. Pour cela, il faut qu'elle laisse le reste 1 à la division par 2 aussi bien qu'à la division par 3. Cela est vrai pour le dernier cas, et la valeur de $a' = -\varepsilon' b' + 2\varepsilon b$ prouve qu'il en est de même pour le premier.

Nous avons d'après cela a' et b' au moyen des formules

$$(7) \qquad a' = -\frac{a - 3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \varepsilon' \frac{a + \varepsilon b}{2},$$

dans lesquelles $\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}$, et $\varepsilon' = \pm 1$, selon que $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ est positif ou négatif.

Ainsi a' et b' forment un système de nouvelles valeurs que a et b peuvent recevoir dans la somme (4), et pour lesquelles l'exposant $a^2 + 3b^2$ conserve sa valeur primitive.

Résolvons les équations (7) par rapport à a et b, et nous obtiendrons

$$(8) \qquad a = -\frac{a' - 3\varepsilon' b'}{2}, \quad b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2}.$$

Ces équations ont exactement la forme des équations (7); seulement ε et ε' ont changé de rôle. Ce résultat est très-important, car il nous fait voir d'abord que ε' dépend de a' et de b' comme ε dépend de a et de b. Comme b est impair, il suit de l'équation

$$b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2},$$

que $\varepsilon' = +1$ quand $\frac{a'+b'}{2}$ est impair et $\frac{a'-b'}{2}$ pair, et que $\varepsilon' = -1$ quand $\frac{a'-b'}{2}$ est impair et $\frac{a'+b'}{2}$ pair. On a donc

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}}.$$

Les équations (8) montrent en outre, que l'opération qui conduit des valeurs de a et de b aux valeurs de a' et de b', conduirait des valeurs de a' et de b' aux valeurs de a et de b. Les deux couples de valeurs a, b et a', b' sont ainsi réciproques l'un de l'autre, et l'on serait ramené en suivant la même méthode aux valeurs primitives, et pas à d'autres.

L'équation (4) sera donc vérifiée, aussitôt que nous aurons prouvé que les deux coefficients de $x^{a^2+3b^2} = x^{a'^2+3b'^2}$ qui correspondent aux valeurs a, b et a', b', se détruisent mutuellement. Cette preuve se fait sans difficulté. La somme de ces deux coefficients est en effet

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2) + (-1)^{\frac{a'-b'}{2}} b'(a'^2-b'^2);$$

mais par la substitution des valeurs de a' et de b' de (7) on obtient

$$a'^2 - b'^2 = \frac{(a-3\varepsilon b)^2-(a+\varepsilon b)^2}{4} = -2\varepsilon ab + 2b^2 = -2\varepsilon b(a-\varepsilon b),$$

et par suite

$$b'(a'^2-b'^2) = -\varepsilon\varepsilon' b(a^2-b^2),$$

ce qui rend la somme des deux coefficients égale à

$$\left[(-1)^{\frac{a-b}{2}} - \varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}\right] b(a^2-b^2);$$

or on a

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}, \quad \varepsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}};$$

il vient donc

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} - \varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}} = (-1)^{\frac{a-b}{2}} - (-1)^{\frac{a-b}{2}} = 0.$$

Ainsi les deux termes considérés se détruisent, et l'équation (4) est satisfaite.

Il pourrait arriver que l'on eût $a' = a$ et $b' = b$. Dans ce cas, le coefficient de $x^{a^2+3b^2}$ qui, dans la somme (4), est composé avec a et b, se détruit de lui-même et disparaît. En effet, il résulte de la première des équations (7) que, si $a' = a$,

$$3a = 3\varepsilon b,$$

donc

$$a = \pm b.$$

Or le coefficient de la série (4) a le facteur $(a^2 - b^2)$; il devient donc, dans ce cas, $= 0$.

La facilité avec laquelle on démontre la formule (1) porte à rechercher les propositions de la théorie des nombres auxquelles elle conduit; cette recherche n'est pas sans intérêt.

Écrivons encore x^{24} à la place de x dans l'équation (1), et multiplions les deux membres par x^3, nous aurons

$$(9)\qquad \left[\sum (-1)^m x^{(6m+1)^2}\right]^3 = \sum (-1)^n (2n+1) x^{3(2n+1)^2}.$$

Dans cette équation, m peut recevoir toutes les valeurs possibles, positives et négatives, tandis que n n'admet que des valeurs entières positives, o compris comme aussi dans le premier cas. Si l'on pose

$$(6m+1)^2 = a^2,$$

et qu'on prenne a toujours positivement, a sera de la forme $6x+1$ pour m positif, et de la forme $6x-1$ pour m négatif.

On peut donc écrire ainsi l'équation (9),

$$(10)\qquad \left[\sum \pm x^{aa}\right]^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{bb},$$

dans laquelle b représente un nombre impair positif quelconque, a tout nombre impair positif de la forme $6k \pm 1$, ou tout nombre impair non divisible par 3. Le signe de x^{aa} dans la première somme doit être pris positivement quand a est de la forme $12k \pm 1$, et négativement quand a est de la forme $12k \pm 5$.

L'équation (9) ou l'équation (10) a été déduite de l'équation (1), en remplaçant x par x^{24} et multipliant ensuite par x^3; il en résulte, puisque les exposants dans l'équation (9) sont des nombres entiers, que dans l'équation (10) l'exposant de chaque terme dans le développement du cube $\left(\sum \pm x^{aa}\right)^3$ est de la forme $24k + 3$. En effet, chaque exposant dans le développement du cube de cette série est la somme de trois carrés impairs dont aucun ne procède de 3 ; et comme tout carré impair est de la forme $8k + 1$, la somme de trois carrés impairs divisée par 8 doit laisser pour reste 3. De plus, tout carré qui ne procède pas de 3 a la forme $3k + 1$; donc la somme de trois carrés dont aucun ne procède de 3 doit être un multiple de trois. La somme de trois carrés impairs, dont aucun ne procède de 3, doit donc laisser 3 pour reste à la division par 8 et se diviser par 3, partant être de la forme $24k + 3$.

Réciproquement on peut démontrer que si l'on décompose un nombre quelconque de la forme $24k + 3$ en trois carrés, chacun de ces carrés doit être impair et non divisible par 3, ou avoir une racine de la forme $6k \pm 1$, en exceptant toutefois le cas où le nombre procédant de 9, chacun des carrés dans lesquels il se décompose est divisible par 9 ou a sa racine divisible par 3.

En effet, quand on décompose un nombre impair en trois carrés, il peut se faire ou qu'un seul soit impair ou que tous les trois soient impairs. Comme un carré impair a la forme $4k + 1$, et que les carrés pairs procèdent de 4, le nombre dans le premier cas doit avoir la forme $4k + 1$; tout nombre de la forme $4k+3$ peut donc seulement être décomposé en trois carrés impairs. De plus, quand il arrive qu'on décompose un nombre divisible par 3 en trois carrés, aucun de ces carrés n'est divisible par 3 ou tous le sont. En effet, un carré divisé par 3 ou s'évanouit, ou laisse $+ 1$ pour reste; la somme de trois carrés divisée par 3, laissera pour reste ou 0 ou $+ 1$ ou $+ 2$, selon que tous les carrés seront divisibles par 3 ou qu'aucun d'eux ne le sera, que deux d'entre eux seront divisibles par 3, qu'un seul le sera. Quand donc on excepte le cas où chacun des trois carrés est divisible par 3, et aussi nécessairement par 9, ce qui ne peut arriver que lorsque le nombre proposé est lui-même divisible par 9, on ne peut décomposer un nombre divisible par 3 qu'en trois carrés dont aucun n'est divisible par 3. Or un nombre de la forme $24k+3$ a la forme $4k+3$ tout aussi bien que la forme $3k$; il n'est donc, par suite de ce qui précède, décomposable qu'en trois carrés impairs dont aucun ne procède de 3, quand on exclut le cas où le nombre, étant un multiple de 9, se décompose en trois carrés divisibles chacun par 3.

Si l'on élève, d'après les règles connues, la série

$$\sum \pm x^{aa}$$

à la troisième puissance, et si l'on recherche le coefficient du terme en x^p où p a la forme $24\alpha+3$, chaque décomposition de p en trois carrés dont aucun n'est divisible par 3, donne pour la partie du coefficient total correspondante à chaque résultat particulier, ou le nombre ± 6 quand les trois carrés sont inégaux, ou le nombre ± 3 quand deux des carrés sont égaux, ou le nombre ± 1 quand les trois carrés sont égaux. Dans le premier cas on doit prendre le signe supérieur quand les trois racines ou une seule ont la forme $12k \pm 1$; le signe inférieur, au contraire, quand deux racines ont la forme $12k \pm 1$ ou qu'aucune n'a cette forme. Dans les deux autres cas où $p = aa + 2a'a'$, ou $p = 3aa$, on doit choisir le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que a est de la forme $12k \pm 1$ ou de la forme $12k \pm 5$.

Soit C_p le coefficient de x^p dans le développement du cube de la série proposée, de sorte que

$$\left(\sum \pm x^{aa}\right)^3 = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{6(m+1)^2}\right]^3 = \sum C_p x^p;$$

p est, comme nous l'avons vu, un nombre de la forme $24k+3$, et n'est assujetti qu'à cette condition. Maintenant, p étant un nombre quelconque de la forme $24k+3$, soit :

A le nombre total des décompositions de p en trois carrés inégaux non divisibles par 3, dans le cas où les racines sont toutes les trois comprises dans l'une des formes $12k+1$, $12k-1$, ou bien sont l'une de la forme $12k+1$, $12k-1$, les deux autres ayant, au contraire, la forme $12k+5$, $12k-5$;

A' le nombre total des décompositions de p en trois carrés inégaux non divisibles par 3, dans le cas où les racines sont toutes les trois représentées par $12k+5$, $12k-5$; ou bien, l'une étant donnée par $12k+5$, $12k-5$, les deux autres sont données par $12k+1$, $12k-1$;

B le nombre total des décompositions de p dans la forme $aa+2a'a'$, dans laquelle a et a' ne procèdent pas de 3 et sont différents l'un de l'autre, et a est compris sous l'une des formes $12k+1$, $12k-1$;

B' le nombre des décompositions de p dans une expression de la forme $aa+2a'a'$, expression dans laquelle a et a' ne sont pas divisibles par 3 et sont différents, et dans laquelle aussi a a l'une des formes $12k+5$, $12k-5$.

Par suite des remarques précédemment faites, quand p n'est pas le triple d'un carré non divisible par 3, on a

$$C_p = 6(A - A') + 3(B - B').$$

Si p est le triple d'un carré non divisible par 3, on ajoute à la droite de cette expression $+1$ ou -1, selon que la racine de ce carré a l'une des formes $12k+1$, $12k-1$, ou bien l'une de celles-ci $12k+5$, $12k-5$.

Mais l'équation (10)

$$\left(\sum \pm x^{aa}\right)^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{3bb},$$

dans laquelle b représente un nombre impair positif quelconque, fait voir que si p n'est pas le triple d'un carré impair, le terme x^p dans le développement du cube de la série proposée n'existe pas, ou que $C_p=0$. Nous avons par suite, *quand p n'est pas le triple d'un carré impair*, la formule

$$(11) \qquad 2A + B = 2A' + B',$$

qui exprime une propriété remarquable des nombres de la forme

$24\alpha + 3$, par rapport à leur décomposition en trois carrés. Cette formule donne lieu aux théorèmes suivants.

« *Théorème* 1. Qu'on décompose un nombre p de la forme $24\alpha + 3$, » qui n'est pas le triple d'un carré, de toutes les manières possibles » en trois carrés de la forme $(6m \pm 1)^2$, et qu'on ajoute le nombre » des décompositions qu'on obtient ainsi, en comptant double celles » qui donnent lieu à trois carrés différents, on aura, pour les décom» positions dans lesquelles une ou trois des valeurs de m sont paires, » exactement le même nombre que dans le cas où une ou trois des » valeurs de m sont impaires. »

Quelques exemples éclairciront cette proposition. Nous les présentons dans la table suivante, où A, A′, B, B′ conservent la signification que nous leur avons assignée, et la liaison que nous en avons déduite,

$$2A + B = 2A' + B'.$$

$p = 51 = 1 + 2.25 = 49 + 2.1$, $A = A' = 0$, $B = B' = 1$,
$p = 99 = 1 + 2.49 = 49 + 2.25$, $A = A' = 0$, $B = B' = 1$,
$p = 123 = 121 + 2.1 = 25 + 2.49$, $A = A' = 0$, $B = B' = 1$,
$p = 171 = 169 + 2.1 = 121 + 2.25$; $A = 0$, $A' = 1$, $B = 2$, $B' = 0$,
$= 1 + 49 + 121$
$p = 195 = 1 + 25 + 169 = 25 + 49 + 121$; $A = A' = 1$, $B = B' = 0$,
$p = 219 = 169 + 2.25 = 121 + 2.49$; $A = 0$, $A' = 1$, $B = 1$, $B' = 0$,
$= 1 + 49 + 169$.
etc..., etc...

Nous allons à présent considérer le cas où p est le triple d'un carré impair bb, pour lequel l'équation (10) fournit la valeur suivante de C_p,

$$C_p = (-1)^{\frac{b-1}{2}} b.$$

D'ailleurs on a, quand b n'est pas divisible par 3,

$$C_p = 6(A - A') + 3(B - B') \pm 1,$$

égalité où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que b sera de la forme $12k \pm 1$, ou de la forme $12k \pm 5$.

Quand b est divisible par 3, la formule doit être réduite à

$$C_p = 6(A - A') + 3(B - B');$$

car la quantité ± 1, qu'on ajouterait à la valeur de ce coefficient, proviendrait des cubes des termes isolés de la série

$$\sum \pm x^{(6m+1)^2};$$

mais, comme les cubes de ces termes isolés sont $\pm x^{3(6m+1)^2}$ ou $\pm x^{3(6m-1)^2}$, le terme x^p n'aura pour origine le cube d'un terme de la série proposée que dans le cas où p sera le triple d'un carré non divisible par 3.

Quand, p étant le triple d'un carré impair bb, on égale entre elles les deux expressions trouvées pour C_p, on obtient la formule

$$(12) \qquad 2(A - A') + (B - B') = (-1)^{\frac{b-1}{2}} \frac{b+\varepsilon}{3},$$

dans laquelle ε tient la place d'une des quantités 0, $+1$ ou -1, à savoir de celle des trois qui donne pour $\frac{b+\varepsilon}{3}$ un nombre entier. On peut conséquemment compléter le théorème 1 par le suivant.

« *Théorème* 2. Quand p est le triple d'un carré impair, de sorte que » $p = 3bb$, les deux nombres qui, dans le théorème 1, étaient égaux » l'un à l'autre, ne le sont plus; mais le premier est plus grand que le » second quand b est de la forme $4k+1$, et, au contraire, le second » est plus grand que le premier quand b est de la forme $4k+3$; » l'excès de l'un sur l'autre est $\frac{1}{3}b$ quand b est divisible par 3, ou, » quand b n'est pas divisible par 3, c'est le nombre qui approche le » plus d'être égal à $\frac{1}{3}b$. »

La table suivante peut servir à éclaircir ce théorème. Dans les exemples qu'elle présente, les nombres A, A′, B, B′ doivent satisfaire à la formule (12).

	b	$\frac{b+\varepsilon}{3}$	A	A′	B	B′
$3 = 3.1$	1	0	1	0	0	0
$27 = 25 + 2.1$	3	1	0	0	0	1
$75 = 3.25 = 1 + 25 + 49$	5	2	1	0	0	0
$147 = 3.49 = 1 + 25 + 121$	7	2	0	1	0	0
$243 = 1 + 2.121 = 25 + 49 + 169$	9	3	1	0	1	0
Etc., etc.						

J'ajouterai encore les remarques suivantes sur les décompositions en expressions de la forme $aa + 2aa'$, dans lesquelles a n'est pas multiple de 3.

Soit 3^i la plus haute puissance de 3 par laquelle p se laisse diviser, de telle sorte que $\frac{p}{3^i}$ soit un entier non divisible par 4, que je désignerai par

$$p' = \frac{3^i}{p}.$$

Soit

$$p' = a\alpha + 2\alpha'\alpha' :$$

un des deux nombres α ou α' sera divisible par 3, car si ni α ni α' ne se divisaient par 3, $\alpha\alpha$, tout aussi bien que $\alpha'\alpha'$, divisé par 3, laisserait $+1$ pour reste, et par conséquent $p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$ serait divisible par 3, ce qui est contre l'hypothèse. Soit

$$(1 + \sqrt{-2})^i = \beta + \beta'\sqrt{-2};$$

β et β' représentent deux nombres entiers dont on obtient facilement les valeurs au moyen des formules connues pour la puissance d'un binome, savoir,

$$\beta = 1 - 2\,\frac{i(i-1)}{2} + 2^2\,\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

$$\beta' = i - 2\,\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2} + 2^2\,\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Si dans l'équation précédente on écrit $-\sqrt{-2}$ à la place de $\sqrt{-2}$, on obtient

$$(1-\sqrt{-2})^i = \beta - \beta'\sqrt{-2},$$

et par la multiplication des deux formules,

$$3^i = \beta\beta + 2\beta'\beta'.$$

Si l'on pose

$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = a + a'\sqrt{-2},$$
$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2}) = b + b'\sqrt{-2},$$

a, a', b, b' représentent des nombres entiers, savoir,

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \qquad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$
$$a' = \alpha'\beta + \alpha\beta', \qquad b' = \alpha'\beta - \alpha\beta';$$

en changeant dans chacune des deux formules le signe des radicaux, on obtient encore

$$(\alpha - \alpha'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2}) = a - a'\sqrt{-2},$$
$$(\alpha - \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = b - b'\sqrt{-2};$$

et si l'on multiplie deux à deux les formules qu'on a déduites l'une de l'autre par le changement de signe des radicaux,

$$3^i(\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha') = 3^i p' = aa + 2a'a',$$
$$3^i(\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha') = 3^i p' = bb + 2b'b',$$

ou

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b'.$$

On déduit ainsi de la décomposition de p' dans une expression de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$ deux décompositions du nombre p dans des expressions de même forme, et ces deux expressions sont toujours différentes l'une de l'autre, excepté quand p' est un carré $=\alpha\alpha$ et que l'on déduit les deux expressions de p de l'expression $p' = \alpha\alpha$, pour laquelle $\alpha' = 0$.

Pour ce cas on voit facilement par les valeurs données pour a, b, a', b', que

$$a = b, \quad a' = -b',$$

et que par conséquent les deux expressions

$$aa + 2a'a', \quad bb + 2b'b'$$

sont identiques. Mais c'est le seul cas pour lequel ces expressions rentrent l'une dans l'autre, ainsi qu'il est facile de le voir par le raisonnement suivant.

On doit avoir pour cela ou $a = b$ ou $a = -b$, et les valeurs données pour a et pour b montrent que cela ne peut arriver que si l'un des produits $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ disparaît, ce qui exige que l'une des quantités α, α', β, β' s'annulle. Mais ni β, ni β' ne peuvent être nuls; α ne peut non plus être égal à o, car p' serait un nombre pair $= 2\alpha'\alpha'$, et p' est impair, puisque il donne le nombre impair p quand on le multiplie par $3'$: les deux expressions ne coïncident donc que si α' disparaît; ce qu'il fallait démontrer.

De ce que aucun des deux nombres β, β' ne disparaît, il résulte aussi, entre autres choses, qu'aucun des deux ne peut être divisé par 3. Soit

$$(f - f'\sqrt{-2})(g - g'\sqrt{-2}) = h + h'\sqrt{-2};$$

d'où

$$fg - 2f'g' = h,$$
$$fg' + f'g = h'.$$

Si f, f', ainsi que g et g' divisés par 3 donnent le même reste, les nombres $f'g'$, fg', $f'g$ laissent le même reste que fg, et par conséquent les deux nombres h et h' divisés par 3 laissent le même reste que $-fg$. En effet, le nombre h laisse le même reste que $fg - 2f'g = -fg$, et le nombre h' laisse le même reste que $fg + fg = 2fg = 3fg - fg$, donc le même reste que $-fg$.

Il suit de là que, si

$$(f - f'\sqrt{-2})(g + g'\sqrt{-2}) = h + h'\sqrt{-2}.$$

et si f et f', g et g', divisés par 3, laissent le même reste, et qu'aucun de ces nombres ne soit divisible par 3, les nombres h et h' divisés par 3 laissent le même reste, et ne sont pas divisibles par 3.

En effet, les nombres h et h' divisés par 3 laissent le même reste que $-fg$, ils ne peuvent donc être divisibles par 3 que si cela est pour l'un des deux nombres f ou g; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si à ces deux facteurs on en ajoute successivement plusieurs de même forme et de mêmes propriétés, et qu'à chaque fois on fasse usage de la proposition trouvée ci-dessus, on obtient la proposition plus générale que voici :

Quand i facteurs

$$f_1 + f'_1\sqrt{-2}, \quad f_2 + f'_2\sqrt{-2}, \ldots, \quad f_i + f'_i\sqrt{-2}$$

sont donnés, et satisfont aux conditions que f et f' sont des nombres entiers non divisibles par 3, mais laissent des restes égaux à la division par ce nombre, le produit de tous ces facteurs, auquel on peut donner la forme

$$\mathrm{F} - \mathrm{F}'\sqrt{-2},$$

F et F' étant entiers, a encore la même propriété; c'est-à-dire que F et F' sont à la fois non divisibles par 3, et laissent tous les deux le même reste quand on les divise par ce facteur.

Il résulte aussi de la proposition donnée ci-dessus, que ce reste est le même que le reste laissé par le nombre

$$(-1)^{i-1} f_1 . f_2 . f_3 \ldots f_i = -(-f_1)(-f_2)\ldots(-f_i).$$

Prenons tous ces facteurs égaux : il suit alors de ce qui précède que, si f et f' divisés par 3 laissent tous deux le reste $+1$, ou tous deux le reste -1, et que l'on écrive la $i^{\text{ième}}$ puissance de l'expression $f + f'\sqrt{-2}$ sous la forme

$$\mathrm{F} + \mathrm{F}'\sqrt{-2} = \left(f + f'\sqrt{-2}\right)^i,$$

les nombres F et F' laisseront tous deux le même reste que $-(-f)^i$.

Si donc la puissance est paire, c'est-à-dire si i est pair, F et F' divisés par 3 laisseront toujours le reste -1; au contraire, si i est impair, F laissera toujours le même reste $+1$ ou -1 que f.

Dans le cas que nous avons considéré, nous avions

$$(1+\sqrt{-2})^i = \beta + \beta'\sqrt{-2}.$$

Ici $f=f'=1$, β et β' divisés par 3 doivent laisser tous les deux le reste $+1$, ou tous les deux le reste -1, selon que i est impair ou pair, et jamais aucun de ces deux nombres ne peut être divisible par 3, encore moins disparaître.

On peut faire résulter ces propriétés des nombres β et β', de leurs valeurs données ci-dessus, et déduites de la formule du binome. Dans ces valeurs, les coefficients sont multipliés par les puissances de (-2): quand on ne considère que le reste que fournit cette quantité divisée par 3, on peut écrire $+1$ à la place de (-2), et conclure que β et β', divisés par 3, laissent les même restes que les nombres

$$i + \frac{i(i-1)}{2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$i + \frac{i(i-1)(i-2)}{2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Ces nombres reviennent aux expressions suivantes :

$$\frac{1}{2}\left[(1+1)^i + (1-1)^i\right] = 2^{i-1},$$
$$\frac{1}{2}\left[(1+1)^i - (1-1)^i\right] = 2^{i-1};$$

en sorte que β et β' divisés par 3 laissent le même reste que 2^{i-1} ou, ce qui est la même chose, le même que $(-1)^{i-1}$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé ci-dessus.

Les deux décompositions de p que nous avons tirées d'une décomposition de p' dans une expression de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$, savoir,

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b',$$

appartiennent aux décompositions que nous avons considérées, en supposant qu'aucun des nombres a, a', b, b' ne soit divisible par 3. Ceci résulte clairement des valeurs données ci-dessus pour ces nombres

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \quad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$
$$a' = \alpha'\beta + \alpha\beta', \quad b' = \alpha'\beta - \alpha\beta';$$

α et α' représentent deux nombres dont l'un est divisible par 3, l'autre ne l'étant pas; β et β', au contraire, deux nombres dont aucun n'est divisible par 3.

On peut encore, de la forme des valeurs de a et de b, tirer les conséquences suivantes :

Puisque a et b sont impairs, ainsi qu'il ressort clairement de l'équation

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b',$$

dans laquelle p est un nombre impair de la forme $24k + 3$, et que a et b ne sont pas divisibles par 3, ils sont compris sous l'une des quatre formes $12k \pm 1$, $12k \pm 5$. Leur produit ab aura aussi l'une de ces quatre formes, savoir, une des deux formes $12k \pm 1$ quand a et b sont tous les deux de la forme $12k \pm 1$, ou de la forme $12k \pm 5$; au contraire, ab aura la forme $12k \pm 5$ quand, l'un des deux nombres a et b étant $12k \pm 1$, l'autre sera de la forme $12k \pm 5$.

Des valeurs données pour a et b,

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \quad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$

il résulte

$$ab = a^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2.$$

Si α' est multiple de 3, $\alpha\beta$ est un nombre impair non divisible par 3, car α et β sont toujours impairs, comme il paraît par les équations

$$3^i = \beta\beta + 2\beta'\beta', \quad p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha';$$

et, si α' est divisible par 3, α n'est pas divisible par 3; les nombres β et β' ne sont jamais divisibles par 3. Il suit de là que $\alpha^2\beta^2$ laisse le reste $+1$ à la division par 4 et à la division par 3, et a par conséquent la forme $12k + 1$. Le nombre $4\alpha'^2\beta'^2$ est, en outre, quand α' est divisible par 3, divisible par 12. Par conséquent, quand α' est divisible par 3, le nombre

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2$$

a la forme $12k + 1$. Quand α est divisible par 3, α', et par suite $\alpha'\beta'$, ne se laissent plus diviser par 3; $\alpha'^2\beta'^2$ a donc alors la forme $3k + 1$, et $4\alpha'^2\beta'^2$ la forme $12k + 4$. De plus β^2 est de la forme $12k + 1$, puisque β', divisé par 4 et par 3, laisse dans les deux cas le reste $+1$; α est un nombre impair divisible par 3, et ainsi de la forme $12k + 3$, $12k + 9$; le carré α^2 est toujours de la forme $12k + 9$, et, β^2 ayant la forme $12k + 1$, $\alpha^2\beta^2$ sera de la forme $12k + 9$.

Ainsi, quand α est divisible par 3, $4\alpha'^2\beta'^2$ a la forme $12k + 4$, $\alpha^2\beta^2$ la forme $12k + 9$. Donc

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2$$

est de la forme $12k + 5$. Par conséquent ab sera de la forme $12k + 1$, ou de la forme $12k + 5$, selon que α' ou α seront l'un ou l'autre divisibles par 3.

En laissant arbitraires les signes de a et de b qui ne sauraient être déterminés par la décomposition de p en expressions de la forme $aa + 2a'a'$, $bb + 2b'b'$, on pourra dire toujours que ab a l'une des formes $12k \pm 1$, ou l'une des formes $12k \pm 5$, selon que α' ou α se divisent par 3.

Si donc des parties intégrantes de p de la forme $aa + 2a'a'$, dans lesquelles a, a' sont des nombres non divisibles par 3, on forme deux classes, la première comprenant toutes les expressions dans lesquelles a est sous l'une des deux formes $12k \pm 1$, la seconde renfermant toutes celles dans lesquelles a est sous l'une des deux formes $12k \pm 5$, les deux décompositions de p auxquelles on est conduit, comme on l'a vu, par une décomposition de p' dans une expression de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$, donneront lieu à des expressions qui appartiendront aux mêmes classes ou à des classes différentes, selon que l'une des quantités α' ou α sera divisible par 3.

Si p', qui peut désigner un nombre impair quelconque non divisible par 3, est décomposable de plusieurs manières dans des expressions de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$, α' ou α seront toujours l'un ou l'autre divisibles par 3. Dans le premier cas p' a la forme $ff + 18ff'$, dans le second cas la forme $9gg + 2g'g'$, et comme p' et par suite aussi f et g' ne sont pas divisibles par 3, ff et $2g'g'$ laissent les restes $+1$ et $+2$, et la première forme ne peut convenir qu'aux valeurs de $p' = 3k + 1$, la seconde forme aux valeurs de $p' = 3k + 2$. Ainsi, selon que p' est de la forme $3k + 1$, ou de la forme $3k + 2$, les deux décompositions de $p = 3^i p'$, que nous avons déduites d'une décomposition de p', produiront des expressions qui appartiendront aux mêmes classes ou à des classes différentes.

Il ne nous reste plus qu'à faire voir que toute décomposition de p dans une expression de la forme $aa + 2a'a'$, dans laquelle a n'est pas divisible par 3, peut être, en effet, déduite de p' en se servant des formules données.

On peut le prouver de la manière suivante. Puisque p est divisible par 3^i et qu'on a

$$a^2\beta^2 - 4a'^2\beta'^2 = a^2(\beta^2 + 2\beta'^2) - 2\beta'^2(a^2 + 2a'^2) = 3^i aa - 2p\beta'\beta',$$

le nombre

$$a^2\beta^2 - 4a'^2\beta'^2 = (a\beta + 2a'\beta')(a\beta - 2a'\beta'),$$

doit être aussi divisible par 3^i.

Mais des deux facteurs $a\beta + 2a'\beta'$ et $a\beta - 2a'\beta'$, un seul doit être divisible par 3, car s'ils l'étaient tous deux, leur somme $2a\beta$ serait aussi divisible par 3, ce qui est impossible, ni a ni β n'étant divisibles par 3. Or puisque le produit des deux facteurs est divisible par 3^i, et qu'un des facteurs n'est pas divisible par 3, l'autre facteur doit seul être divisible par 3^i. Soit $a\beta + 2a'\beta'$ ce facteur, ce qu'on peut toujours supposer, car le signe de a' est indéterminé, et l'on peut le déterminer par cette condition, en laissant d'ailleurs le signe de a invariable.

Multipliant ce facteur par β', et mettant à la place de $2\beta\beta'$ sa valeur $3^i - \beta\beta$, on obtient

$$\beta'(a\beta + 2a'\beta') = -\beta(a'\beta - a\beta') + 3^i a'.$$

et de cette équation il résulte, puisque $a\beta + 2a'\beta'$ est divisible par 3^i, mais que β n'est pas divisible par 3, que $a'\beta - a\beta'$ est aussi divisible par 3^i.

Soit

$$\frac{a\beta + 2a'\beta'}{3^i} = \alpha, \qquad \frac{a'\beta - a\beta'}{3^i} = \alpha';$$

il en résulte

$$\frac{(a + a'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2})}{3^i} = \alpha + \alpha'\sqrt{-2},$$

et, d'après ce qu'on a prouvé, les quantités α et α' sont entières.

Si l'on change le signe du radical et si l'on multiplie la nouvelle équation qui en résulte par la précédente, on aura

$$\frac{(aa + 2a'a')(\beta\beta + 2\beta'\beta')}{3^{2i}} = \frac{p}{3^i} = p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha';$$

ce qui est la décomposition déjà obtenue pour p'. De cette expression on revient à celle que donne la décomposition de $p = aa + 2a'a'$, au moyen de l'équation

$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = a + a'\sqrt{-2}.$$

On voit donc que toute décomposition de p dans une expression de la forme $aa - 2a'a'$, dans laquelle a n'est pas divisible par 3, peut toujours se déduire de la manière indiquée ci-dessus, d'une décomposition de $\frac{1}{3^i}p = p'$. On pourra donc décomposer p en expressions de la forme obtenue, au moyen des décompositions de p'.

Nous avons vu que de chaque décomposition de p' on pouvait déduire pour p deux sortes d'expressions qui appartiennent aux mêmes classes ou à des classes différentes, selon que p' est de la forme $3k + 1$ ou de la forme $3k - 2$; nous avons vu en outre que les décompositions de p ainsi obtenues ont été toutes considérées dans ce qui précède. Nous appelons B le nombre total des décompositions de p de la première classe, et B' le nombre total des décompositions de la seconde classe. Nous n'y comprenons pas le cas où $p' = \alpha\alpha$.

La décomposition

$$p = 3^i . p' = \alpha\alpha\beta\beta + 2\alpha\alpha\beta'\beta',$$

qui a lieu alors, exige que p soit le triple d'un carré, puisque i doit être impair si $p = 3^i aa$ doit être de la forme $24k + 3$. Si p' est de la forme $3k + 2$, la première et la seconde classe comprennent un même nombre d'expressions élémentaires, car de chaque décomposition de p' résulte une décomposition de p pour chacune des deux classes. On a donc, quand $p' = \frac{1}{3^i} p$ a la forme $3k + 2$,

$$B = B';$$

par où la formule (11) se réduit à

$$A = A'. \tag{12}$$

Si p' a la forme $3k + 1$, B et B' seront des nombres pairs, si p n'est pas le triple d'un carré, puisque de chaque décomposition de p' s'en déduisent deux pour p qui appartiennent à la même classe.

On peut encore, de la formule trouvée ci-dessus,

$$\left[\sum (-1)^m x^{(6m+1)^2}\right]^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} bx^{3bb},$$

dans laquelle m désigne tous les nombres positifs et négatifs, b tous les nombres positifs impairs, faire sortir d'autres conséquences dont je vais présenter ici l'exposé succinct.

On voit par cette formule que l'on peut toujours décomposer de plusieurs manières le triple d'un carré impair en trois carrés de la forme $(6m + 1)^2$, de sorte que N étant un nombre impair quelconque, on peut toujours satisfaire à l'équation

$$3NN = (6m + 1)^2 + (6m' + 1)^2 + (6m'' + 1)^2,$$

et cela de plusieurs manières, en sorte qu'à l'exception du cas où $b = 1$, on n'a jamais la décomposition en trois carrés égaux.

De l'équation précédente résulte

$$3NN = (6m + 1)^2 + 2(3m' + 3m'' + 1)^2 + 18(m' - m'')^2.$$

et par suite

$$NN = [2(m + m' + m'') + 1]^2 + 2(2m - m' - m'')^2 + 6(m' - m'')^2.$$

Une formule semblable aurait pu se déduire de chaque décomposition de $p = 24k + 3$ dans une expression de la forme

$$(6m + 1)^2 + (6m' + 1)^2 + (6m'' + 1)^2,$$

pour $\frac{1}{3}p = 8k + 1$.

Soient

$$2(m + m' + m'') + 1 = n,$$
$$2m - m' - m'' = n',$$
$$m' - m'' = n'',$$

on aura

$$NN = nn + 2n'n' + 6n''n'',$$

et par conséquent

$$\frac{NN - nn}{2} = n'n' + 3n''n''.$$

Comme on peut toujours supposer que les nombres m, m', m'' ne sont pas tous les trois égaux entre eux, on pourra aussi toujours admettre que les nombres n' et n'' ne disparaissent pas tous les deux à la fois. Ainsi N sera toujours plus grand que n.

De la somme et de la différence de deux nombres impairs, l'une est toujours divisible par 4, tandis que l'autre, divisée par 4, laisse le reste 2. J'admettrai que $N - n$ soit divisible par 4; si $N + n$ était au contraire divisible par 4, on aurait, dans ce qui suit, à placer $-n$ à la place de $+n$.

Que l'on considère maintenant le cas particulier où N est un nombre premier; dans ce cas $\frac{N - n}{2}$ et $\frac{N + n}{2}$, et par suite aussi les nombres $\frac{N - n}{2}$ et $\frac{N + n}{2}$, n'ont aucun facteur commun. Ces deux nombres étant premiers l'un à l'autre, et faisant partie d'un nombre de la forme

$n'n' + 3n''n''$, auront aussi la même forme, d'après les principes de l'Arithmétique.

On peut donc poser

$$\frac{N+n}{2} = \alpha\alpha + 3\gamma\gamma,$$

$$\frac{N-n}{4} = \beta\beta + 3\delta\delta,$$

d'où suit, pour tout nombre premier, l'équation

$$N = \alpha\alpha + 2\beta\beta + 3\gamma\gamma + 6\delta\delta,$$

dans laquelle α, β, γ, δ sont des nombres entiers.

Il suit de la généralisation connue d'un théorème d'Euler, que des nombres de la forme

$$\alpha\alpha + B\beta\beta + C\gamma\gamma + BC\delta\delta$$

reproduisent cette forme quand on les multiplie entre eux. La forme dans laquelle nous venons de décomposer tout nombre premier est évidemment dans ce cas. Comme le nombre premier 2 a aussi cette forme, et que tout nombre peut être considéré comme produit par des nombres premiers, on peut donner à tous les nombres entiers possibles la forme

$$\alpha\alpha + 2\beta\beta + 3\gamma\gamma + 6\delta\delta,$$

α, β, γ, δ étant entiers.

Des considérations toutes semblables à celles que je viens de présenter dans ce Mémoire pourraient s'appliquer à d'autres formules données dans les *Fundamenta*.

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE

SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR J. LIOUVILLE [*].

Quoique les géomètres soient loin d'avoir résolu d'une manière complète et générale le problème des trois corps, ils en ont obtenu cependant des solutions particulières dont on peut faire usage quand les coordonnées et les vitesses initiales remplissent certaines conditions. Lagrange et Laplace en ont donné divers exemples, que l'on trouve réunis et démontrés d'une manière simple dans le chapitre VI du X^{me} livre de la *Mécanique céleste*. En voici un digne d'attention : Considérant trois masses rangées en ligne droite, Laplace prouve que si, après avoir établi entre ces masses et les distances qui les séparent une relation convenable, on imprime à deux d'entre elles autour du centre de la troisième des vitesses parallèles l'une à l'autre et proportionnelles à leurs distances au centre, les trois masses sous l'influence de leurs actions mutuelles resteront par la suite constamment en ligne droite, la droite qui les contient étant bien entendu mobile ; les vitesses et les distances pourront changer avec le temps, mais le rapport des vitesses et celui des distances seront égaux et invariables; la loi du mouvement de chaque masse sera d'ailleurs la même que pour un point matériel attiré vers un centre fixe.

On sait que, dans notre système, les planètes dont la distance au Soleil est la plus grande se meuvent aussi le plus lentement, et que les carrés des temps des révolutions augmentent à peu près comme les cubes des grands axes des orbites. Dans le système particulier que nous venons d'indiquer, les choses ne se passeraient point ainsi. Quelle que

[*] Ce Mémoire sera publié dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1845

soit en effet celle de nos trois masses que l'on veuille prendre pour centre du mouvement, les deux autres qui doivent rester en ligne droite avec elle accompliront nécessairement leurs révolutions dans un temps égal, malgré l'inégalité des distances. C'est là assurément un théorème fort remarquable; mais n'oublions pas qu'il suppose, qu'il exige certaines conditions spéciales, et surtout une relation convenable entre les masses et les distances. Étant données trois masses quelconques, on peut du reste toujours faire en sorte que la relation dont il s'agit ait lieu. Pour fixer les idées, admettons que les trois masses soient celles du Soleil, de la Terre et de la Lune, et nous reconnaîtrons avec Laplace que cette relation serait satisfaite en plaçant la Lune sur le prolongement de la droite qui joint le centre du Soleil au centre de la Terre, à une distance de cette dernière planète égale à très-peu près à la centième partie de la distance de la Terre au Soleil : une modification légère dans la valeur de la masse de la Terre rendrait le nombre cité (un centième) rigoureusement exact. Cela étant, Laplace en conclut que si, à l'époque arbitraire prise pour origine, la Lune s'était trouvée en opposition avec le Soleil à une distance de cet astre représentée par 101, celle de la Terre étant représentée par 100, et que les vitesses relatives de la Terre et de la Lune autour du Soleil eussent été aussi à cette époque parallèles et dans le rapport de 100 à 101, la Lune serait toujours restée en opposition avec le Soleil, de manière à ne jamais cesser d'éclairer la Terre pendant les nuits.

L'illustre auteur reproduit cette assertion dans l'*Exposition du Système du Monde :* « Quelques partisans des causes finales ont imaginé, » dit-il, que la Lune a été donnée à la Terre pour l'éclairer pendant les » nuits. Dans ce cas la nature n'aurait point atteint le but qu'elle se » serait proposé, puisque nous sommes souvent privés à la fois de la » lumière du Soleil et de celle de la Lune. Pour y parvenir, il eût » suffi de mettre à l'origine la Lune en opposition avec le Soleil dans » le plan même de l'écliptique, à une distance égale à la centième » partie de la distance de la Terre au Soleil, et de donner à la Lune et » à la Terre des vitesses parallèles et proportionnelles à leurs distances » à cet astre. Alors la Lune, sans cesse en opposition au Soleil, eût » décrit autour de lui une ellipse semblable à celle de la Terre; ces » deux astres se seraient succédé l'un à l'autre sur l'horizon, et comme

» à cette distance la Lune n'eût point été éclipsée, sa lumière aurait » constamment remplacé celle du Soleil. »

Pour l'exactitude absolue de la proposition énoncée, il faut qu'à l'origine du temps la relation entre les masses et les distances et la proportionnalité de ces dernières aux vitesses aient été rigoureusement vérifiées, ainsi que le parallélisme des vitesses; il faut de plus qu'aucune cause perturbatrice ne vienne par la suite troubler le mouvement, ce qu'on ne peut pas admettre. A la vérité, si le système que nous considérons est un système stable qui tende à résister aux perturbations et à revenir de lui-même à son état régulier de mouvement, cette remarque aura peu d'importance. Il faudrait sans doute avoir égard aux petits dérangements occasionnés par les diverses causes dont l'effet n'est pas insensible, mais cela n'empêcherait pas la Lune d'être toujours à très-peu près sur le prolongement de la droite qui joint le Soleil à la Terre. Or, en tenant compte de la réfraction, on voit qu'un certain écart de la Lune à cette droite ne l'empêcherait pas d'éclairer la Terre pendant la totalité de chaque nuit. Au contraire, si l'état de mouvement dont nous avons parlé plus haut est instable, s'il tend à se détruire de lui-même de plus en plus dès qu'il a éprouvé de légers dérangements (et c'est en effet ce qui a lieu, comme on le verra dans mon Mémoire), alors il faudra reconnaître que ce genre de mouvement ne peut pas exister d'une manière permanente dans la nature. La vraie question, on le comprend donc, est celle de la stabilité. Se contenter de dire avec l'auteur d'une dissertation imprimée à Rome en 1825 [*], que le système de nos trois masses doit éprouver des perturbations de la part des autres planètes et qu'ainsi l'opposition de la Lune au Soleil ne peut pas subsister à toute époque mathématiquement, d'une manière absolue (*scrupulosissime*), c'est énoncer une vérité évidente, triviale, et non pas faire une objection sérieuse. Quelle théorie en effet serait à l'abri d'une semblable objection?

Le problème qu'il fallait résoudre et que je traite dans mon Mémoire est le suivant : *Trois masses étant placées non plus rigoureusement,*

[*] En voici le titre : *Paucis expenditur cl. Laplace opinio de illorum sententiâ qui lunam conditam dicunt ut noctu tellurem illuminet.*

mais à très-peu près dans les conditions énoncées par Laplace, on demande si l'action réciproque des masses maintiendra le système dans cet état particulier de mouvement ou si elle tendra au contraire à l'en écarter de plus en plus. Pour le résoudre d'après la méthode ordinairement suivie dans les questions de stabilité, j'ai dû considérer des équations différentielles linéaires qui se sont d'abord trouvées être à coefficients variables, même en négligeant, comme on pouvait le faire ici, l'excentricité de l'orbite terrestre. Une transformation simple m'a conduit ensuite à des équations à coefficients constants que j'ai pu intégrer. L'intégration terminée, j'ai reconnu que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contrebalancés, sont au contraire agrandis d'une manière rapide par les actions mutuelles de nos trois masses : cette conclusion subsiste quels que soient les rapports de grandeur des masses. Si la Lune avait occupé à l'origine la position particulière que Laplace indique, elle n'aurait pu s'y maintenir que pendant un temps très-court.

NOTE
SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES
DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. ALFRED SERRET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

L'intégrale définie représentée par $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est, comme on sait, égale à la racine carrée de la circonférence dont le diamètre est 1. On peut, par des considérations fort simples, parvenir à une représentation géométrique des fonctions $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{2^n}\right),\ldots$, dans lesquelles le numérateur de l'argument est 1.

On a, par une formule connue,

$$(1)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)},$$

et en faisant $n = m$, on en déduit

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{m-1} x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x\,dx = 2^{m-2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, l'équation de la lemniscate, c'est-à-dire de la courbe telle que le produit des distances de l'un quelconque de ses points à deux points fixes est égal au carré de la demi-distance des deux points fixes, est en coordonnées polaires

$$r^2 = \frac{(2a)^2}{2} \cos 2t,$$

a étant la demi-distance des points fixes, ou ce que j'appellerai le paramètre de la courbe. Cette courbe est formée de deux boucles symétriques de part et d'autre de l'origine; on trouve pour longueur totale de son périmètre

$$2^{\frac{1}{2}} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Si donc on appelle π_2 le périmètre de la lemniscate dont le paramètre est 1, on aura, en observant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2}\sqrt{\pi}.$$

Cette relation est digne de remarque, car π et π_2 sont pour le cas de $a = 1$ (c'est-à-dire en prenant pour unité le paramètre ou diamètre a) les périmètres de deux courbes dont les équations

$$r = \frac{2a}{2} \cos t, \quad r^2 = \frac{(2a)^2}{2} \cos 2t,$$

offrent une parfaite ressemblance.

Considérons l'équation générale

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt;$$

ou plus simplement

$$r^m = 2^{m-1} \cos mt.$$

en prenant le paramètre a pour unité.

La courbe qu'elle représente est formée de m boucles fermées toutes égales entre elles; je désignerai par π_m le périmètre total de ces m boucles.

La moitié de l'une de ces boucles a pour longueur

$$2^{\frac{m-1}{m}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{1}{m}-1} mt\, dt = 2^{\frac{m-1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{m}-1} dx.$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{1}{2m} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Le périmetre total π_m étant égal à $2m$ fois cette expression, on en conclut que

$$(3) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) = \sqrt{\pi_m}\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Si l'on remplace m successivement par les différentes puissances de 2 depuis la puissance 0, on aura la série de formules

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2}\sqrt[4]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \sqrt{\pi_4}\sqrt[4]{\pi_2}\sqrt[8]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\pi_8}\sqrt[4]{\pi_4}\sqrt[8]{\pi_2}\sqrt[16]{\pi},$$

. . . .

. . . .

On peut encore exprimer au moyen des périmètres π_m l'intégrale eulérienne $\Gamma\left(\frac{p}{2^n}\right)$, p étant un entier; mais la relation générale à laquelle on est conduit paraît trop compliquée pour mériter d'être transcrite ici. Bornons-nous à quelques cas particuliers.

La fonction $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ s'obtient immédiatement au moyen de la relation connue

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

d'où l'on déduit

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}.\pi_2^{-\frac{1}{2}}.\pi^{\frac{3}{4}}.$$

On obtiendrait de la même manière $\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)$, au moyen des deux équations connues

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2a),$$

et de l'équation (3).

Je ferai remarquer en passant que la dernière de ces deux relations, qui exprime une des propriétés fondamentales des intégrales d'Euler, peut être facilement déduite des équations (1) et (2). Il suffit en effet, pour l'obtenir, de faire $n=1$ dans l'équation (1), et d'égaler ensuite les deux valeurs de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,dx$ fournies par l'équation (2) et l'équation (1).

On obtiendrait encore $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$ au moyen des deux relations que nous venons de rappeler et de l'équation (3); on pourrait même en général passer de là aux intégrales de la forme $\Gamma\left(\frac{1}{3.2^n}\right)$, mais les formules auxquelles on parviendrait ainsi présentent peu d'intérêt.

Si m est un nombre fractionnaire ou irrationnel, la formule

$$\pi_m = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

subsiste toujours; seulement π_m représente non plus le périmètre total de la courbe dont l'équation est

$$r^m = 2^{m-1}\cos mt,$$

mais bien le produit par $2m$ de l'arc de courbe dont les points correspondent aux valeurs de t comprises entre o et $\frac{\pi}{2m}$.

Outre le cercle et la lemniscate dont nous avons parlé, l'équation précédente renferme comme cas particulier correspondant à $m = \frac{1}{2}$, celle de l'épicycloïde extérieure de module 1. Cette courbe jouit, comme on sait, de la propriété d'être semblable à toutes ses développées. Cette considération m'a porté à rechercher si parmi les courbes représentées généralement par l'équation précédente, il ne s'en trouverait pas qui jouissent de cette même propriété, qui jusqu'ici n'a été reconnue qu'aux épicycloïdes (comprenant la cycloïde) et à la spirale logarithmique; mais je ne suis arrivé à aucun résultat satisfaisant.

Il est bon toutefois de signaler une propriété géométrique assez curieuse de ces courbes : c'est que la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est à ce rayon vecteur dans un rapport constant, ou, en d'autres termes, que la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur engendre une courbe semblable à la première.

On trouve en effet cette expression du rayon de courbure,

$$R = \frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{m+1}(\cos mt)^{\frac{1}{m}-1}:$$

de plus pour déterminer l'inclinaison i de la normale sur le rayon vecteur, on obtient la formule

$$\operatorname{tang} i = -\operatorname{tang} mt;$$

et la valeur qui en résulte pour la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est

$$\frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{1+m} \cos mt^{\frac{1}{m}} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{1+m}.$$

Quant à l'équation de la courbe décrite par la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur, elle sera évidemment

$$r^m = \frac{\left(\frac{2m}{1+m}\right)^m}{2} \cos mt\,;$$

elle se déduira donc de l'équation générale

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt\,,$$

en faisant

$$a = \frac{m}{1+m}.$$

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES

ET DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. E. BRASSINE,

Professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

Nous appellerons, dans tout ce qui suit, *points conjugués* des points placés sur une courbe ou une surface du second degré, aux extrémités d'un système quelconque de diamètres conjugués. Si, par exemple, sur une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, x', y' désignent les coordonnées d'un point m', les coordonnées x'', y'' du point conjugué m'' seront liées avec les premières par les relations

$$y'' = \frac{b}{a}x', \quad x'' = -\frac{ay'}{b}.$$

Cela posé, nous énoncerons les propositions suivantes.

1°. Si l'on prend deux points conjugués quelconques sur une ellipse donnée, et si l'on joint chacun de ces points avec les deux foyers de cette courbe, on démontre que : *la somme des rectangles que l'on obtient en multipliant entre eux les deux rayons vecteurs aboutissant à chacun des points conjugués, égale la somme des carrés des demi-axes.*

Si les foyers sont désignés par les lettres F, F′, on aura la relation

$$Fm' \times F'm' + Fm'' \times F'm'' = a^2 + b^2.$$

2°. Si dans un ellipsoïde de révolution on joint chacun des trois points conjugués, d'un système conjugué quelconque, avec les deux foyers, *la somme des trois rectangles que l'on obtient, en multipliant entre eux les deux rayons vecteurs aboutissant à chacun des points conjugués, égale la somme des carrés des trois demi-axes de l'ellipsoïde.*

Si l'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

cette somme de rectangles vaudra $2a^2 + c^2$.

3°. Si l'on considère les trois couples de foyers, symétriquement placés sur le grand et le moyen axe d'un ellipsoïde quelconque, on démontre que : si l'on joint chaque couple de foyers avec les trois points conjugués m', m'', m''', et que l'on effectue les produits des deux rayons vecteurs de chaque couple aboutissant à un même point, *la somme des carrés des produits provenant des rayons vecteurs de deux couples quelconques de foyers, moins la double somme des carrés des produits provenant des rayons vecteurs du troisième couple de foyers, est une quantité constante.*

Cette proposition, convenablement modifiée, s'appliquerait aisément à l'ellipsoïde de révolution ou à l'ellipse. Nous ferons d'ailleurs observer que nous considérons toujours, dans nos énoncés relatifs à l'ellipsoïde, les foyers des sections que l'on obtient en faisant successivement x, y, z égaux à zéro dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de sa surface rapportée à son centre et à ses axes.

4°. Dans une ellipse ou dans un ellipsoïde, *la somme des carrés des rayons vecteurs, partant de foyers et aboutissant aux extrémités d'un système de diamètres conjugués ou aux points conjugués, est constante.*

On trouverait encore une somme constante si l'on faisait la somme des carrés des lignes qui joignent les extrémités des axes avec les points conjugués.

Si par chacun des deux ou des trois points conjugués, pris sur une ellipse ou un ellipsoïde, on mène la normale à cette courbe ou à cette surface, on démontre que *la somme des carrés des normales conjuguées est constante;* d'où il résulte que *la somme des puissances* *deux tiers des rayons de courbure d'une ellipse, menés aux points conjugués m', m'' de cette courbe, est aussi constante.*

La somme des carrés des sous-normales conjuguées est constante dans l'ellipse comme dans l'ellipsoïde.

5°. Si par les points conjugués m', m'' d'une ellipse, on mène deux normales, chacune de ces normales divisera le grand axe ou la distance des foyers en deux segments, et l'on démontre que *si l'on ajoute le rectangle des segments formés par la normale avec le rectangle des segments formés par la normale conjuguée, la somme sera constante.*

Si par les mêmes points conjugués m', m'' on mène deux tangentes à l'ellipse, et qu'on les prolonge jusqu'à la circonférence décrite sur le grand axe de cette ellipse, les deux tangentes, devenues cordes de cette circonférence, seront divisées aux points m', m'' en deux segments tels que : *si l'on ajoute le rectangle des deux segments de la première tangente, avec le rectangle des deux segments de la seconde tangente, la somme sera constante.*

On peut observer aussi que les triangles compris entre les axes et les tangentes conjuguées sont équivalents.

6°. Si nous considérons, sur une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, un point quelconque m' déterminé par les coordonnées x', y', et sur la circonférence décrite sur le grand axe, un point M′ déterminé par les deux coordonnées x', $\frac{ay'}{b}$, on sait que la tangente au point M′ donne, par son intersection avec le grand axe, un point de la tangente à l'ellipse au point m'. Ce même point M′ peut servir à la détermination directe de la normale au point m'. Il suffit, en effet, de joindre le point M′ avec le centre O et de prolonger le rayon M′O jusqu'à ses deux rencontres avec une nouvelle circonférence décrite du point O comme centre avec la somme des demi-axes comme rayon, pour obtenir deux points qui appartiennent aux normales menées au point m' et au point opposé dont les coordonnées sont $-x'$, $-y'$.

Une construction analogue servirait à déterminer la normale au point x', y', z' de l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; il suffirait de mener par le point x', y', $\frac{a}{c}z'$ de la sphère $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, un rayon dont on chercherait l'intersection avec une nouvelle sphere $x^2 + y^2 + z^2 = (a+c)^2$.

La construction de la normale, en un point de l'ellipsoïde quelconque $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, exigerait l'emploi de deux ellipsoïdes de révolution auxiliaires

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} + \frac{c^2z^2}{(ab+c^2)^2} = 1.$$

Ces propriétés peuvent faciliter la solution de quelques questions, et rendre élégantes certaines constructions de la géométrie descriptive, relatives aux plans tangents.

7°. Si par trois points conjugués m', m'', m''', d'un ellipsoïde, on fait trois sections circulaires, parallèles à un *des axes*, la *somme des aires des trois sections sera constante*. Si par exemple on considère l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tel que $a > c > b$, l'aire des trois cercles parallèles à l'axe des z sera égale au double du cercle qui a c pour rayon.

Si l'on considère trois points conjugués m', m'', m''' situés sur la surface d'un ellipsoïde, pour chacun de ces points on peut évaluer les deux rayons de courbure *maxima* et *minima* des sections normales principales. La moyenne géométrique entre ces deux rayons aura une valeur que nous désignerons par R' pour le point m' et par R'', R''' pour les points m'', m'''. Cela posé, on démontre que *la somme de ces trois moyennes est constante*. De sorte qu'on a toujours

$$R' + R'' + R''' = a.b.c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

8°. Quelques-uns des énoncés précédents conviennent, avec de simples modifications de signes, à l'hyperbole ou aux hyperboloïdes. Nous observerons d'ailleurs que les relations très-simples $y'' = \frac{bx'}{a}$, $x'' = \mp \frac{ay'}{b}$, entre les coordonnées des points conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, peuvent servir à démontrer très-aisément les propositions précédentes relatives à ces courbes, ainsi que toutes les propriétés connues de leurs diamètres conjugués. Pour les surfaces du second ordre on peut employer les relations que nous allons établir en démontrant deux théorèmes connus.

Considérons la sphère $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ et les deux ellipsoïdes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, rapportés au même centre et aux mêmes axes; imaginons du centre o de la sphère trois rayons rectangulaires qui coupent sa surface aux points M′, M″, M‴ déterminés par des coordonnées x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''; il est évident que x', x'', x''' peuvent être considérés comme les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les directions rectangulaires oM′, oM″, oM‴; par suite

(1) $$\left\{\begin{array}{l} x'^2 + x''^2 + x'''^2 = a^2, \\ \text{et par une raison semblable,} \\ y'^2 + y''^2 + y'''^2 = a^2, \quad z'^2 + z''^2 + z'''^2 = a^2. \end{array}\right.$$

Imaginons sur l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, trois points m', m'', m''', déterminés par les coordonnées x', y', $\frac{c}{a}z'$, x'', y'', $\frac{c}{a}z''$, x''', y''', $\frac{c}{a}z'''$; ces points seront les extrémités de trois diamètres conjugués om', om'', om''', et l'on voit que pour les coordonnées de ces extrémités il existera des relations analogues aux relations (1); par suite

$$om'^2 + om''^2 + om'''^2 = 2a^2 + c^2.$$

Enfin trois points μ', μ'', μ''' de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ déterminés par les coordonnées x', $\frac{b}{a}y'$, $\frac{c}{a}z'$, x'', $\frac{b}{a}y''$, $\frac{c}{a}z''$ forment un système conjugué, et les égalités que l'on déduit des relations (1) donnent

$$o\mu'^2 + o\mu''^2 + o\mu'''^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les trois rayons oM′, oM″, oM‴, de la sphère, sont les arêtes d'une pyramide oM′M″M‴ dont le volume est évidemment $\frac{a^3}{6}$. Mais cette pyramide peut être considérée comme l'excès d'un tronc de prisme triangulaire dont les arètes parallèles sont z', z'', z''' sur trois pyramides quadrangulaires qui ont leur sommet en o et pour bases des trapèzes dont les côtés parallèles sont $z' z''$, $z'' z'''$, $z' z'''$. Dans les deux ellipsoïdes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, les pyramides $om'm''m'''$, $o\mu'\mu''\mu'''$, formées par les demi-diamètres conjugués, sont les différences de prismes et de pyramides analogues; mais ces nouveaux solides sont successivement aux premiers dans le rapport de $c : a$ et de $cb : a^2$. Donc les pyramides $om'm''m'''$ et $o\mu'\mu''\mu'''$ auront respectivement pour mesure $\frac{1}{6}a^2c$ et $\frac{1}{6}abc$.

APPLICATION DU THÉORÈME DE M. STURM

AUX TRANSFORMÉES DES ÉQUATIONS BINOMES;

Par G. GASCHEAU,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'Académie d'Orléans.

---

1. L'équation binome de degré impair, étant débarrassée de sa racine réelle 1, conduit à une équation réciproque de degré pair; et celle-ci dépend d'une transformée de degré sous-double. Après avoir traité cette question, M. Lefébure de Fourcy ajoute :

« Par la règle de M. Sturm, on reconnaît facilement que toutes les » racines de ces transformées sont réelles. » (*Leçons d'Algèbre*, troisième édition, page 487, note.)

En cherchant une démonstration générale de cette proposition, je suis arrivé à une propriété des transformées dont il s'agit qui m'a paru assez curieuse.

Soit l'équation

$$y^{2m+1} = 1;$$

ses $2m$ racines imaginaires sont données par l'équation réciproque

$$y^m + \frac{1}{y^m} + y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}} + \ldots + y + \frac{1}{y} + 1 = 0.$$

On prend, pour inconnue de la transformée, la fonction

$$z = y + \frac{1}{y}.$$

Représentant par n un nombre entier positif quelconque, je pose

$$\mathrm{U}_n = y^n + \frac{1}{y^n}$$

et

$$S_n = y^n + \frac{1}{y^n} + y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}} + \ldots + y + \frac{1}{y} + 1;$$

d'où je conclus

$$(1) \qquad S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_1 + 1.$$

En faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, on forme ces deux tableaux :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} U_1 = z, & S_1 = z + 1, \\ U_2 = z^2 - 2, & S_2 = z^2 + z - 1, \\ U_3 = z^3 - 3z, & S_3 = z^3 + z^2 - 2z - 1, \\ U_4 = z^4 - 4z^2 + 2, & S_4 = z^4 + z^3 - 3z^2 - 2z + 1, \\ U_5 = z^5 - 5z^3 + 5z, & S_5 = z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1, \\ U_6 = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2, & S_6 = z^6 + z^5 - 5z^4 - 4z^3 + 6z^2 + 3z - 1. \\ \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

La propriété de la fonction S_n qui démontre la proposition énoncée dans la note de M. Lefébure de Fourcy peut être exprimée par le théorème suivant :

Écrivez toutes les fonctions S_1, S_2, $S_3 \ldots$, *jusqu'à* S_n; *prenez la dérivée, par rapport à z, de chacune de ces fonctions ; je dis que la série des polynomes ainsi formés est précisément la suite des polynomes que l'on obtient en appliquant le théorème de M. Sturm à l'équation* $S_n = 0$. (Il est bien entendu que chaque fonction de la suite de M. Sturm doit être débarrassée des facteurs numériques communs à tous ses termes.)

Ce théorème étant admis, on remarque que les premiers termes des fonctions S_1, S_2, $S_3, \ldots$, S_n sont positifs; il en sera donc de même des premiers termes de leurs dérivées : donc la règle relative aux conditions de réalité des racines, donnée par M. Lefébure (page 463, n° 495), apprendra que toutes les racines de l'équation $S_n = 0$ sont réelles.

La démonstration du théorème s'appuie sur quelques lemmes que je vais établir.

2. On connaît la loi de formation des fonctions U; elle est exprimée par l'égalité

$$(3)\qquad U_n = U_{n-1} z - U_{n-2}.$$

Or je dis que les fonctions S sont assujetties aux mêmes conditions, c'est-à-dire qu'*une fonction* S *se forme en multipliant la précédente par* z, *et en retranchant du produit l'avant-précédente ;* de sorte que l'on a

$$(4)\qquad S_n = S_{n-1} z - S_{n-2}.$$

En effet, la relation (3) donne

$$\begin{aligned}
U_n &= U_{n-1} z - U_{n-2};\\
U_{n-1} &= U_{n-2} z - U_{n-3};\\
U_{n-2} &= U_{n-3} z - U_{n-4};\\
&\vdots\\
U_3 &= U_2 z - U_1,\\
U_2 &= U_1 z - 2.
\end{aligned}$$

Ajoutant ces égalités, en ayant égard à l'équation (1), on trouve

$$S_n - U_1 - 1 = (S_{n-1} - 1) z - (S_{n-2} + 1);$$

comme on a $U_1 = z$, cette égalité, réduction faite, revient à la relation (4), qui était à démontrer.

3. Considérons une fonction S de la seconde colonne du tableau (2) : pour obtenir le reste de la division de ce polynome par sa dérivée, il conviendra préalablement de multiplier le dividende par le carré de l'exposant de z dans son premier terme, afin d'éviter les fractions. Si nous voulons opérer de la même maniere sur la dérivée d'une fonction S de ce même tableau et sur la dérivée de la fonction suivante, pour avoir le reste de la division de ces deux polynomes, nous aurons également soin de multiplier le premier terme du dividende par le carré du coefficient du premier terme du diviseur.

En effectuant donc ces préparations et ensuite les divisions auxquelles elles se rapportent sur quelque fonction que ce soit du tableau (2), on reconnaîtra que les deux formules suivantes présentent exactement le résultat des opérations en question exécutées sur ces fonctions, pour toutes les valeurs de n comprises dans ce tableau :

$$(5) \qquad (n-1)^2 S'_n = [n(n-1)z+1]S'_{n-1} - n^2 S'_{n-2};$$

$$(6) \qquad n^2 S_n = (nz+1)S'_n - (2n+1)S'_{n-1}.$$

Chaque lettre accentuée représente la première dérivée de la fonction exprimée par la même lettre sans accent. Les multiplicateurs $(n-1)^2$ et n^2 des premiers membres sont les facteurs qu'il a fallu introduire pour éviter les fractions. Les coefficients n^2 et $2n+1$, qui affectent les derniers termes des seconds membres, sont analogues à ceux que l'on peut supprimer dans l'opération du plus grand commun diviseur. Remarquons, d'ailleurs, que, dans l'égalité (5), S'_{n-2} est d'un degré en z inférieur d'une unité à celui de S'_{n-1} ; que, dans la suivante (6), S'_{n-1} est de la même manière inférieur à S'_n. Cela posé, nous trouverons, dans les formules (5) et (6), la traduction de ces deux théorèmes :

1°. *Si l'on divise, l'une par l'autre, les dérivées de deux fonctions* S *consécutives*, PRISES EN REMONTANT *dans le tableau* (2), *le reste de l'opération, débarrassé d'un facteur numérique, sera égal, au signe près, à la dérivée de la fonction qui suit la seconde des deux proposées ;*

2°. *Si l'on divise une fonction* S *du tableau* (2) *par sa dérivée, on obtiendra, pour reste réduit, la dérivée de la fonction suivante prise en signe contraire.*

On établit facilement ces deux théorèmes par la méthode d'induction. Supposant donc que les équations (5) et (6) soient vérifiées, il s'agit de prouver que l'on aura,

$$1^\circ \qquad n^2 S'_{n+1} = [n(n+1)z+1]S'_n - (n+1)^2 S'_{n-1};$$

$$2^\circ \quad (n+1)^2 S_{n+1} = [(n+1)z+1]S'_{n+1} - (2n+3)S'_n.$$

Le théorème du n° 2 donne

$$S_{n+1} = zS_n - S_{n-1};$$

prenant les dérivées des deux membres de cette égalité, on a

$$S'_{n+1} = S_n + z S'_n - S'_{n-1}.$$

Éliminons S_n entre cette dernière et l'équation (6), et nous trouverons l'équation 1° ci-dessus. Cette première formule est donc démontrée.

Pour obtenir l'équation 2°, je remarque d'abord que l'hypothese, admettant l'équation (6), donne aussi

$$(n-1)^2 S_{n-1} = [(n-1)z + 1] S'_{n-1} - (2n-1) S'_{n-2}.$$

Éliminant S'_{n-2} entre celle-ci et l'équation (5), on obtient

$$n^2 S_{n-1} = (2n-1) S'_n - (nz - 1) S'_{n-1}.$$

La valeur de S_{n-1}, donnée par cette équation, et la valeur de S_n, fournie par l'équation (6), étant portées dans l'égalité $S_{n+1} = z S_n - S_{n-1}$, on trouve

$$n^2 S_{n+1} = (nz^2 + z - 2n + 1) S'_n - [(n-1)z - 1] S'_{n-1}.$$

Enfin nous pouvons éliminer S'_{n-1} entre cette dernière et l'équation ci-dessus 1°, qui vient d'être démontrée; et le résultat de cette élimination sera l'équation 2°, qui était à démontrer.

4. Les deux propriétés précédentes donnent immédiatement la démonstration du théorème énoncé n° **1**. En effet, soit Z le premier membre de la transformée en z fournie par une équation binome de degré impair, de sorte que l'on ait $Z = S_n$; les théorèmes traduits par les équations (6) et (5) donneront cette suite d'équations :

$$\begin{aligned}
n^2 Z &= (nz + 1) Z' - (2n + 1) S'_{n-1},\\
(n-1)^2 Z' &= [n(n-1)z + 1] S'_{n-1} - n^2 S'_{n-2},\\
(n-2)^2 S'_{n-1} &= [(n-1)(n-2)z + 1] S'_{n-2} - (n-1)^2 S'_{n-3}.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ces egalités prouvent que la suite donnée par le théoreme de M. Sturm, appliqué à l'équation $Z = 0$, sera

$$Z,\ Z',\ S'_{n-1},\ S'_{n-2},\ldots,\quad \text{ou}\quad S_n,\ S'_n,\ S'_{n-1},\ S'_{n-2},\ldots$$

5. Connaissant la suite donnée par le théorème de M. Sturm, on peut s'assurer que les racines de l'équation $Z = 0$ ou $S_n = 0$ sont comprises entre $+2$ et -2; d'où l'on conclura que toutes les valeurs de y, déduites de l'équation $y + \frac{1}{y} = z$, sont imaginaires. Il faut donc prouver que *la suite dont il s'agit n'a que des permanences pour $z = 2$, et qu'elle ne présente que des variations pour $z = -2$.*

Avec $z = \pm 2$, on a $y = \pm 1$; donc, à cause de la relation $U_n = y^n + \frac{1}{y^n}$, la valeur $z = 2$ donnera à toutes les fonctions U la même valeur 2; et, pour $z = -2$, chaque polynome conservera la valeur numérique 2; mais les fonctions d'indice pair seront positives, et les fonctions d'indice impair seront négatives. L'égalité (1) prouve que $z = 2$ donne aux fonctions successives S les valeurs des nombres impairs consécutifs 3, 5, etc., et que $z = -2$ les rend alternativement égales à $+1$ et à -1. Donc, en résumant, on a

pour $z = 2$,

$$U_n = 2 \quad \text{et} \quad S_n = 2n + 1;$$

pour $z = -2$,

$$U_{2p} = 2, \quad U_{2q+1} = -2, \quad \text{et} \quad S_{2p} = 1, \quad S_{2q+1} = -1.$$

Cherchons maintenant ce que deviennent les dérivées de ces fonctions pour les mêmes valeurs $+2$ et -2 attribuées à z. On remarque d'abord que la valeur $z = 2$ donne à chacune des dérivées des fonctions U du tableau (2) une valeur numérique égale au carré de son indice; appliquant ensuite la méthode d'induction à la dérivée de l'équation (3), on étend cette remarque à toutes les dérivées des fonctions U. Il résulte d'ailleurs de la forme de ces polynomes que le changement du signe de z entraîne seulement le changement du signe de chaque dérivée d'indice pair. L'égalité (1) prouve que la dérivée de S_n est égale à la somme des dérivées des fonctions U depuis U_1 jusqu'à U_n; donc, pour $z = 2$, on aura

$$S'_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

donc S′ est positif. Pour $z = -2$, on obtiendra

$$S'_n = 1 - 2^2 + 3^2 - \ldots \pm n^2;$$

et comme chaque terme est plus grand que le précédent, il s'ensuit que S'_n sera positif ou négatif selon que n sera impair ou pair; donc enfin,

pour $z = 2$,

$$U'_n = n^2, \quad \text{et} \quad S'_n > 0;$$

pour $z = -2$,

$$U'_{2p} = -(2p)^2, \quad U'_{2q+1} = (2q+1)^2, \quad \text{et} \quad S'_{2p} < 0, \quad S'_{2q+1} > 0.$$

Avec un peu d'attention, on trouve dans ces deux résultats la démonstration de la proposition énoncée.

Note de M. Sturm, *à l'occasion de l'article précédent.*

On peut reconnaître la réalité des racines de l'équation $S_n = 0$ où l'inconnue est z, sans faire usage des restes que fournit le calcul du plus grand commun diviseur entre S_n et sa dérivée (par rapport à z).

Considérons la suite des fonctions $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n$. Chacune est liée aux deux précédentes par la relation

$$(1) \qquad S_{i+1} = S_i z - S_{i-1}.$$

On a d'ailleurs

$$S_0 = 1, \quad \text{et} \quad S_1 = z + 1.$$

En faisant $z = 2$, on trouve par l'équation (1) que les valeurs de ces fonctions sont

$$+1, \quad +3, \quad +5, \quad +7, \text{ etc.}$$

Pour $z = -2$, elles sont alternativement

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1, \ldots,$$

Ainsi les signes de ces fonctions pour $z = -2$ étant écrits par ordre, ne présentent que des variations au nombre de n, tandis que pour $z = 2$ elles ont toutes le même signe. Si donc z croît d'une manière continue depuis -2 jusqu'à $+2$, la suite des signes de ces fonctions $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, doit perdre successivement les n variations qui s'y trouvent d'abord pour $z = -2$. Mais quand une fonction S_i intermédiaire entre S_0 et S_n s'évanouit et change de signe pour une certaine valeur de z, on voit par l'équation (1) que les deux fonctions adjacentes S_{i+1}, S_{i-1}, ont des valeurs différentes de zero et de signes contraires, de sorte que le nombre des variations n'est pas changé dans la suite des signes. Il faut donc, pour qu'il n'y ait plus de variations quand z devient égal à 2, que la fonction du plus haut degré S_n s'évanouisse en changeant de signe au moins n fois, et qu'à chaque fois une variation disparaisse; d'ailleurs S_n ne peut s'évanouir plus de n fois, n étant son degré. Donc l'équation $S_n = 0$ a ses n racines toutes réelles, inégales, et comprises entre -2 et $+2$.

Il y a plus, puisque chaque racine fait disparaître une variation, on voit que si l'on substitue à la place de z un nombre A quelconque compris entre -2 et $+2$, autant la suite des signes des fonctions $S_0, S_1, \ldots, S_n$ pour $z = A$ présentera de variations, autant l'équation $S_n = 0$ aura de racines comprises entre A et la limite 2. Et si l'on substitue deux nombres A et B, le nombre de variations perdues en passant de l'un à l'autre indiquera combien ils comprennent de racines de $S_n = 0$.

La même proposition s'appliquant à S_{n-1}, on en conclut qu'il y a toujours une racine réelle de l'équation $S_{n-1} = 0$ et une seule comprise entre deux racines consécutives α et β de $S_n = 0$; c'est ce qu'on voit en substituant $\alpha + h$ et $\beta - h$ dans la suite $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n$, h étant une quantité positive très-petite. Pareillement les $n-1$ racines de $S_{n-1} = 0$ comprennent dans leurs intervalles les $n-2$ racines de $S_{n-2} = 0$, et ainsi de suite.

En faisant $z = 0$ dans les fonctions $S_0, S_1, \ldots, S_n$, elles prennent les valeurs

$$+1,\quad +1,\quad -1,\quad -1,\quad +1,\quad +1,\ \text{etc.}$$

En comparant les signes de ces valeurs avec ceux que donne la substitution de -2 et de $+2$, on voit que si n est pair, l'équation $S_n = 0$ a autant de racines négatives que de positives, et que si n est impair, elle a $\frac{n+1}{2}$ racines négatives et $\frac{n-1}{2}$ positives.

On verrait de la même manière que les propriétés précédentes conviennent aux équations

$$U_n = 0,\quad U_{n-1} = 0,\ \text{etc.}$$

(provenant de $y^{2n} + 1 = 0$), dont les racines toutes comprises entre -2 et $+2$ sont d'ailleurs égales deux à deux et de signes contraires, celles de degrés impairs ayant la racine zéro.

La relation $U_n = S_n - S_{n-1}$ montre que pour les valeurs de z qui annullent S_n, la fonction U_n a un signe contraire à celui de S_{n-1}, et que pour celles qui annullent S_{n-1}, U_n a le signe de S_n. En substituant aussi les limites -2 et $+2$, on en conclut que $U_n = 0$ a ses n racines réelles, et que les trois fonctions S_n, U_n, S_{n-1} s'évanouissent toujours l'une après l'autre alternativement pour des valeurs de z croissantes entre -2 et $+2$, c'est-à-dire qu'en faisant croître z, S_n s'évanouit d'abord pour une certaine valeur de z, puis U_n pour une valeur un peu plus grande, ensuite S_{n-1}, puis de nouveau S_n, et ainsi de suite.

Ces diverses propriétés des racines des équations

$$S_n = 0,\quad U_n = 0,$$

résultent d'ailleurs de leurs expressions trigonométriques connues. Mais les démonstrations que je viens d'indiquer conviennent à une classe d'équations que j'ai traitées dans un Mémoire qui paraîtra prochainement.

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;$$

Par J. LIOUVILLE.

On peut joindre cette équation à celles que l'on prend pour exemples dans les Traités de calcul intégral, et en particulier aux deux suivantes si connues,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \mathrm{F}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Il est aisé en effet d'en trouver l'intégrale complète. Servons-nous pour cela de la méthode de la variation des constantes. Si l'on supprimait le dernier terme, l'équation proposée se réduirait à

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} = 0,$$

et fournirait

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{C}e^{-\int f(x)dx}.$$

On peut conserver cette expression de $\frac{dy}{dx}$ même quand $\mathrm{F}(y)$ n'est pas zéro, pourvu que l'on regarde C comme une fonction de y. Il vient ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\int f(x)dx}\left[\frac{d\mathrm{C}}{dy}\frac{dy}{dx} - \mathrm{C}f(x)\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\mathrm{C}}\cdot\frac{d\mathrm{C}}{dy}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

En substituant cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation proposée, on obtient

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dy} + F(y) = 0,$$

et en intégrant

$$C = A e^{-\int F(y)\, dy}.$$

On a par suite

$$\frac{dy}{dx} = A e^{-\int F(y)\, dy} e^{-\int f(x)\, dx},$$

équation où les variables se séparent d'elles-mêmes et qui conduit à l'intégrale cherchée,

$$\int e^{\int F(y)\, dy} . dy = A \int e^{-\int f(x)\, dx} dx + B.$$

B étant aussi bien que A une constante arbitraire.

On pourrait aussi supprimer d'abord dans l'équation proposée le second terme, ce qui la réduirait à

$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

En posant $\frac{dy}{dx} = p$ et observant que $\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$, on aurait ensuite

$$\frac{dp}{dy} + p F(y) = 0,$$

et en intégrant,

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = C e^{-\int F(y)\, dy}.$$

On pourra conserver cette expression de $\frac{dy}{dx}$ même quand $f(x)$ n'est pas zéro, pourvu que l'on regarde C comme une fonction de x. En différentiant sous ce point de vue, on trouve aisément

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -F(y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

de sorte qu'en substituant dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

on a

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dx} + f(x) = 0.$$

De là on tire

$$C = A\,e^{-\int f(x)\,dx},$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = A\,e^{-\int F(y)\,dy}\,e^{-\int f(x)\,dx},$$

comme ci-dessus.

DÉMONSTRATION

DE QUELQUES THÉORÈMES

RELATIFS

AUX RÉSIDUS ET AUX NON-RÉSIDUS QUADRATIQUES;

PAR V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Le nombre p étant premier, la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$ se partage en deux autres : 1° les résidus $a', a'', a''', \ldots, a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ et généralement a. Leur nombre est $\frac{1}{2}(p-1)$, leur somme sera représentée par Σa; 2° les non-résidus $b', b'', b''', \ldots, b^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ et généralement b. Leur nombre est $\frac{1}{2}(p-1)$; leur somme sera représentée par Σb.

Si l'on partage la série des résidus en deux autres, 1° les résidus compris entre 0 et $\frac{p}{2}$; 2° les résidus compris entre $\frac{p}{2}$ et p, on pourra représenter les nombres de termes de chaque série par $\mathrm{R}\frac{1}{2}$, $\mathrm{R}\frac{2}{2}$, et les sommes des termes des mêmes séries par $\Sigma a\frac{1}{2}$, $\Sigma a\frac{2}{2}$.

La série des non-résidus étant partagée de même, $\mathrm{N}\frac{1}{2}$, $\mathrm{N}\frac{2}{2}$ exprimeront combien il y a de non-résidus compris entre 0 et $\frac{p}{2}$ et entre $\frac{p}{2}$ et p. Pareillement $\Sigma b\frac{1}{2}$, $\Sigma b\frac{2}{2}$ exprimeront les sommes de chaque série.

Si l'on divise la série des résidus et celle des non-résidus en quatre autres, la première contenant les nombres compris entre 0 et $\frac{p}{4}$, la seconde ceux entre $\frac{p}{4}$ et $\frac{p}{2}$, la troisième ceux entre $\frac{p}{2}$ et $\frac{3}{4}p$, la quatrième ceux entre $\frac{3}{4}p$ et p, les notations

$$R\tfrac{1}{4},\ R\tfrac{2}{4},\ R\tfrac{3}{4},\ R\tfrac{4}{4};\ N\tfrac{1}{4},\ N\tfrac{2}{4},\ N\tfrac{3}{4},\ N\tfrac{4}{4}$$

indiqueront le nombre de termes de ces séries, et

$$\Sigma a\tfrac{1}{4},\ \Sigma a\tfrac{2}{4},\ \Sigma a\tfrac{3}{4},\ \Sigma a\tfrac{4}{4};\ \Sigma b\tfrac{1}{4},\ \Sigma b\tfrac{2}{4},\ \Sigma b\tfrac{3}{4},\ \Sigma b\tfrac{4}{4}$$

représenteront les sommes de ces séries.

Par $\Sigma \sin a\omega$ nous désignerons la somme

$$\sin a'\omega + \sin a''\omega + \sin a'''\omega + \ldots + \sin a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\omega,$$

et par $\Pi \sin a\omega$ nous désignerons le produit

$$\sin a'\omega \,.\, \sin a''\omega \,.\, \sin a'''\omega \ldots \sin a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\omega.$$

Les expressions

$$\Sigma \cos a\omega,\ \Sigma \operatorname{tang} a\omega,\ \Sigma \cot a\omega,\ \Sigma \operatorname{séc} a\omega,\ \Sigma \operatorname{coséc} a\omega,$$

et

$$\Pi \cos a\omega,\ \Pi \operatorname{tang} a\omega,\ \Pi \cot a\omega,\ \Pi \operatorname{séc} a\omega,\ \Pi \operatorname{coséc} a\omega,$$

auront des significations analogues. Il en sera de même de

$$\Sigma \sin b\omega, \quad \text{et} \quad \Pi \sin b\omega, \text{ etc.}$$

Nous calculerons les sommes $\Sigma \sin a\omega$, etc., dans l'hypothese de $\omega = \frac{2\pi}{p}$; pour le cas des tangentes et cotangentes, on en déduit le cas de $\omega = \frac{\pi}{p}$.

Nous calculerons les produits $\Pi \sin a\omega$, etc., dans les deux hypothèses de $\omega = \frac{\pi}{p}$ et $\omega = \frac{2\pi}{p}$.

Enfin nous donnerons différentes conséquences de ces formules.

« *Problème.* Soit $\omega = \frac{2\pi}{p}$, on demande les sommes

$$\begin{array}{llll} \Sigma \sin a\omega, & \Sigma\, \mathrm{tang}\, a\omega, & \Sigma \cot a\omega, & \Sigma\, \mathrm{cos\acute{e}c}\, a\omega, \\ \Sigma \cos a\omega, & \Sigma\, \mathrm{s\acute{e}c}\, a\omega; & \Sigma \sin b\omega, & \Sigma\, \mathrm{tang}\, b\omega, \\ \Sigma \cot b\omega, & \Sigma\, \mathrm{cos\acute{e}c}\, b\omega, & \Sigma \cos b\omega, & \Sigma\, \mathrm{s\acute{e}c}\, b\omega. \text{ »} \end{array}$$

Solution. On a, d'après M. Gauss :

Pour $p = 4q + 1$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma \sin a\omega = 0, & \Sigma \sin b\omega = 0, \\ \Sigma \cos a\omega = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2}, & \Sigma \cos b\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

pour $p = 4q - 3$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma \cos a\omega = -\frac{1}{2}, & \Sigma \cos b\omega = -\frac{1}{2}, \\ \Sigma \sin b\omega = \frac{1}{2}\sqrt{p}, & \Sigma \sin b\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{p}; \end{array} \right.$$

où l'on voit que le changement de a en b revient au changement de signe du radical.

De là toutes les autres sommes se déduisent sans difficulté au moyen des formules suivantes, démontrées dans l'article 362 des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tang}\,\omega = 2[\sin 2\omega - \sin 4\omega + \sin 6\omega - \ldots \mp \sin(p-1)\omega], \\ \cot\omega = -\frac{2}{p}[\sin\omega + 3\sin\omega + 5\sin 5\omega + \ldots + (p-2)\sin(p-2)\omega], \\ \mathrm{cos\acute{e}c}\,\omega = -\frac{2}{p}[2\sin 2\omega + 4\sin 4\omega + \ldots\ldots\ldots + (p-1)\sin(p-1)\omega], \\ \mathrm{s\acute{e}c}\,\omega = (-1)^{\frac{p-1}{2}}[1 - 2\cos 2\omega + 2\cos 4\omega - \ldots \pm 2\cos(p-1)\omega]. \end{array} \right.$$

Il est à remarquer que dans ces formules ω est égal à $\frac{2\pi}{p}$, multiplié par l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$.

La première et la dernière des équations (3) peuvent s'écrire ainsi :

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}\omega &= 2[\sin 2\omega + \sin 4\omega + \ldots + \sin(p-1)\omega]\\ &\quad - 4[\sin 4\omega + \sin 8\omega + \ldots + \sin(p-1)\omega] \ldots p = 4q-1,\\ \operatorname{tang}\omega &= 2[\sin 2\omega + \sin 4\omega + \ldots + \sin(p-1)\omega]\\ &\quad - 4[\cos 4\omega + \sin 8\omega + \ldots + \sin(p-3)\omega] \ldots p = 4q+3;\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{séc}\omega &= 1 - 2[\cos 2\omega + \cos 4\omega + \ldots + \cos(p-1)\omega]\\ &\quad - 4[\cos 4\omega + \cos 8\omega + \ldots + \cos(p-1)\omega] \ldots p = 4q-1,\\ \operatorname{séc}\omega &= -1 + 2[\cos 2\omega + \cos 4\omega + \ldots + \cos(p-1)\omega]\\ &\quad - 4[\cos 4\omega + \cos 8\omega + \ldots + \cos(p-3)\omega] \ldots p = 4q-3.\end{aligned}\right.$$

La deuxième et la troisième équation (3) étant ajoutées, comme l'on a, pour toute valeur de α,

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \cot\alpha + \operatorname{coséc}\alpha,$$

il en résultera

$$(6)\quad \cot\frac{\omega}{2} = -\frac{2}{p}[\sin\omega + 2\sin 2\omega + 3\sin 3\omega + \ldots + (p-1)\sin(p-1)\omega].$$

On a encore les formules suivantes, quel que soit α,

$$(7)\qquad \operatorname{coséc}\alpha = \cot\frac{\alpha}{2} - \cot\alpha,\qquad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} - 2\cot\alpha.$$

Enfin l'on a :

Pour $p = 8k \pm 1$,

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}\Sigma\operatorname{tang} a\omega &= \Sigma\operatorname{tang} a\frac{\omega}{2}, &\quad \Sigma\cot a\omega &= \Sigma\cot a\frac{\omega}{2},\\ \Sigma\operatorname{tang} b\omega &= \Sigma\operatorname{tang} b\frac{\omega}{2}, &\quad \Sigma\cot b\omega &= \Sigma\cot b\frac{\omega}{2};\end{aligned}\right.$$

pour $p = 8q \pm 3$,

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}\Sigma\operatorname{tang} a\omega &= \Sigma\operatorname{tang} b\frac{\omega}{2}, &\quad \Sigma\cot a\omega &= \Sigma\cot b\frac{\omega}{2},\\ \Sigma\operatorname{tang} b\omega &= \Sigma\operatorname{tang} a\frac{\omega}{2}, &\quad \Sigma\cot b\omega &= \Sigma\cot a\frac{\omega}{2}.\end{aligned}\right.$$

Cela résulte de ce que k, $2k$ sont tous deux résidus ou tous deux non-résidus si $p = 8q \pm 1$, et l'un résidu et l'autre non résidu si $p = 8q \pm 3$. D'ailleurs quand $2a$ est $> p$, il est aussi plus petit que $2p$, de sorte que $2a = p + r$; par suite

$$a\omega = 2a\frac{\omega}{2} = 2a\frac{\pi}{p} = \pi + \frac{r\pi}{p};$$

donc

$$\tang a\omega = \tang r\frac{\omega}{2}, \qquad \cot a\omega = \cot r\frac{\omega}{2}.$$

de même

$$\tang b\omega = \tang r'\frac{\omega}{2}, \qquad \cot b\omega = \cot r'\frac{\omega}{2},$$

en supposant $2b = p + r'$. De là les formules (8) et (9).

Cas de $p = 4q + 1$.

Dans ce cas, parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, il y a autant de résidus que de non-résidus. Cela résulte de ce que m et $p - m$ sont tous deux résidus ou tous deux non-résidus; ainsi les résidus et les non-résidus, qui sont en nombre $\frac{p-1}{2}$, se partageant également entre les séries $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ et $\frac{p+1}{2} \ldots p-1$, il y aura dans chacune d'elles $\frac{p-1}{4}$ résidus et $\frac{p-1}{4}$ non-résidus.

D'après cela, si dans la première des équations (5) on remplace ω par $a'\omega$, $a''\omega$, $a'''\omega, \ldots, a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\omega$, et qu'on somme, en réduisant par le moyen des équations (1), on trouvera

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\,\text{séc.}\, a\omega = \dfrac{p-1}{2} + 2\sqrt{p}\,(\mathrm{R}\tfrac{1}{4} - \mathrm{N}\tfrac{1}{4}), \\ \text{et de même} \\ \Sigma\,\text{séc.}\, b\omega = \dfrac{p-1}{2} - 2\sqrt{p}\,(\mathrm{R}\tfrac{1}{4} - \mathrm{N}\tfrac{1}{4}). \end{array}\right.$$

Les autres sommes relatives aux tang, cot et coséc sont nulles; voici le tableau de ces sommes :

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Sigma \sin a\omega = 0,\ \ \Sigma \operatorname{tang} a\omega = 0,\ \ \Sigma \cot a\omega = 0,\ \ \Sigma \operatorname{coséc} a\omega = 0\,;\\[2mm]
\Sigma \operatorname{tang} a\frac{\omega}{2} = 0,\ \ \Sigma \cot a\frac{\omega}{2} = 0,\ \ \Sigma \sin b\omega = 0,\ \ \Sigma \operatorname{tang} b\omega = 0,\\[2mm]
\Sigma \cot b\omega = 0,\ \ \Sigma \operatorname{coséc} b\omega = 0,\ \ \Sigma \operatorname{tang} b\frac{\omega}{2} = 0,\ \ \Sigma \cot b\frac{\omega}{2} = 0,\\[2mm]
\Sigma \cos a\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p},\quad \Sigma \operatorname{séc} a\omega = \frac{p-1}{2} - 2\,(R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}})\sqrt{p},\\[2mm]
\Sigma \cos b\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p},\quad \Sigma \operatorname{séc} b\omega = \frac{p-1}{2} - 2\,(R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}})\sqrt{p}.
\end{array}\right.$$

On a évidemment $R_{\frac{1}{4}} + N_{\frac{1}{4}} = \frac{p-1}{4}$; il suffira donc de connaître $R_{\frac{1}{4}}$ ou $N_{\frac{1}{4}}$ pour déterminer les sommes Σ séc $a\omega$, Σ séc $b\omega$. Quand p ne surpassera pas 1000, on trouvera très-facilement $R_{\frac{1}{4}}$ ou $N_{\frac{1}{4}}$ au moyen du *Canon arithmeticus* de M. Jacobi. Quand p surpassera 1000, si l'on représente par h le nombre de formes quadratiques différentes déterminant $-p$, comme on a, d'après M. Dirichlet (*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres;* journal de M. Crelle, tome XXI),

$$h = 2\,(R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}}),$$

il en résultera

$$\Sigma \operatorname{séc} a\omega = \frac{p-1}{2} - h\sqrt{p},\quad \Sigma \operatorname{séc} b\omega = \frac{p-1}{2} - h\sqrt{p}.$$

On calculera h par la formation directe des formes quadratiques, ce qui pour un grand nombre p est plus court que le calcul direct des résidus. Si cependant $\sqrt{\frac{p}{5}}$ était un grand nombre, le calcul des formes quadratiques différentes et par suite la détermination de h deviendrait impraticable, vu sa longueur.

Cas de $p = 4q - 3$.

Dans ce cas on parvient aux formules suivantes :

$$(12)\quad \Sigma \cos a\omega = -\frac{1}{2},\quad \Sigma \operatorname{séc} a\omega = -\frac{p+1}{2},\quad \Sigma \sin a\omega = \frac{1}{2}\sqrt{p},$$

$$(13)\left\{\begin{array}{ll} p=8q+7. & p=8q+3. \\ \Sigma\ \cot a\omega = \dfrac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p}, & \Sigma\ \cot a\omega = -\dfrac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p}, \\ \Sigma\ \mathrm{tang}\ a\omega = -\dfrac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p}, & \Sigma\ \mathrm{tang}\ a\omega = -3\dfrac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p}, \\ \Sigma\,\mathrm{cos\acute{e}c}\ a\omega = 0, & \Sigma\,\mathrm{cos\acute{e}c}\ a\omega = 2\dfrac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p}. \end{array}\right.$$

Quand dans ces formules on changera a en b, il suffira, comme on l'a dit, de changer le signe du radical.

La valeur de Σ séc $a\omega$ suit immédiatement de la quatrième équation (3). L'équation (6) donne les deux formules

$$(14)\qquad \Sigma\cot a\frac{\omega}{2} = \frac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p},\qquad \Sigma\cot b\frac{\omega}{2} = -\frac{\Sigma b-\Sigma a}{p}\sqrt{p},$$

d'où par les formules (9) on tire

$$\Sigma\cot a\omega \qquad \text{et} \qquad \Sigma\cot b\omega.$$

Les formules (7) donnent ensuite

$$\Sigma\ \mathrm{tang} \qquad \text{et} \qquad \Sigma\ \mathrm{cos\acute{e}c}.$$

Si l'on eût employé la deuxième des équations (3), on eût trouvé, en représentant par $\Sigma'a$ la somme des résidus impairs, et par $\Sigma'b$ la somme des non-résidus impairs,

$$\Sigma\ \cot a\omega = \frac{\Sigma'b-\Sigma'a}{p}\sqrt{p};$$

ainsi l'on aurait

$$(15)\left\{\begin{array}{lll} \text{pour} & p=8q+7, & \Sigma b-\Sigma a = \Sigma'b-\Sigma'a; \\ \text{pour} & p=8q+3, & \Sigma b-\Sigma a = \Sigma'a-\Sigma'b. \end{array}\right.$$

Et les équations (13) deviendraient

$$(13')\left\{\begin{array}{ll} p=8q+7. & p=8q+3. \\ \Sigma\ \cot a\omega = \dfrac{\Sigma'b-\Sigma'a}{p}\sqrt{p}, & \Sigma\ \cot a\omega = \dfrac{\Sigma'b-\Sigma'a}{p}\sqrt{p}, \\ \Sigma\ \mathrm{tang}\ a\omega = -\dfrac{\Sigma'b-\Sigma'a}{p}\sqrt{p}, & \Sigma\ \mathrm{tang}\ a\omega = 3\dfrac{\Sigma'b-\Sigma'a}{p}\sqrt{p}, \\ \Sigma\,\mathrm{cos\acute{e}c}\ a\omega = 0, & \Sigma\,\mathrm{cos\acute{e}c}\ a\omega = -2\dfrac{\Sigma'b-\Sigma'a}{p}\sqrt{p}. \end{array}\right.$$

Par la troisième des équations (3) on eût trouvé

$$\text{pour}\quad p = 8q - 7,\quad \Sigma\,\text{coséc}\,a\omega = 2\left(\frac{\Sigma b_{\frac{1}{2}} - \Sigma a_{\frac{1}{2}}}{p}\right)\sqrt{p};$$

$$\text{pour}\quad p = 8q - 3,\quad \Sigma\,\text{coséc}\,a\omega = -\,2\left(\frac{\Sigma b_{\frac{1}{2}} - \Sigma a_{\frac{1}{2}}}{p}\right)\sqrt{p}.$$

La comparaison des deux valeurs donne

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{pour}\quad p = 8q - 7,\quad \Sigma a_{\frac{1}{2}} = \Sigma b_{\frac{1}{2}};\\ \text{pour}\quad p = 8q - 3,\quad \Sigma b - \Sigma a = \Sigma a_{\frac{1}{2}} - \Sigma b_{\frac{1}{2}},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou}\ \Sigma b_{\frac{2}{2}} - \Sigma a_{\frac{2}{2}} = 2(\Sigma a_{\frac{1}{2}} - \Sigma b_{\frac{1}{2}}). \end{array}\right.$$

Mais comme k et $p - k$ sont l'un résidu et l'autre non-résidu, on trouvera sans difficulté

$$\Sigma a = \Sigma a_{\frac{1}{2}} + p\mathrm{N}_{\frac{1}{2}} - \Sigma b_{\frac{1}{2}},\qquad \Sigma b = \Sigma b_{\frac{1}{2}} + p\mathrm{R}_{\frac{1}{2}} - \Sigma a_{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\Sigma b - \Sigma a = p(\mathrm{R}_{\frac{1}{2}} - \mathrm{N}_{\frac{1}{2}}) + 2(\Sigma b_{\frac{1}{2}} - \Sigma a_{\frac{1}{2}});$$

par conséquent on aura

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{pour}\quad p = 8q - 7, & \dfrac{\Sigma b - \Sigma a}{p} = \mathrm{R}_{\frac{1}{2}} - \mathrm{N}_{\frac{1}{2}};\\ \phantom{\text{pour}}\quad p = 8q - 3, & 3\,\dfrac{\Sigma b - \Sigma a}{p} = \mathrm{R}_{\frac{1}{2}} - \mathrm{N}_{\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

Ces deux formules peuvent s'écrire ainsi en une seule

$$\left[2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\frac{\Sigma b - \Sigma a}{p} = \mathrm{R}_{\frac{1}{2}} - \mathrm{N}_{\frac{1}{2}},$$

le symbole $\left(\frac{2}{p}\right)$ étant $+1$ pour 2 résidu quadratique, et -1 pour 2 non-résidu quadratique de p. Cette formule est de M. Dirichlet, elle représente le nombre de formes quadratiques différentes pour le déterminant premier $-p$, p étant de forme $4q+3$. (Voyez *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres;* journal de M. Crelle, tome XXI.)

Au moyen de ces diverses relations, on aura les formules

$$(18)\quad \begin{cases} \Sigma \operatorname{tang} a\omega = (N_{\frac{1}{2}} - R_{\frac{1}{2}})\sqrt{p}, \quad \Sigma \operatorname{cos\acute{e}c} a\omega = \frac{2}{3}(R_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{2}})\sqrt{p}, \quad \text{pour } p = 8q + 3; \\ \Sigma \cot a\omega = (R_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{2}})\sqrt{p}, \quad \text{pour} \quad p = 8q + 7; \\ \Sigma \cot a\omega = \frac{1}{3}(N_{\frac{1}{2}} - R_{\frac{1}{2}})\sqrt{p}, \quad \text{pour} \quad p = 8q + 3, \end{cases}$$

et si l'on représente par R′ le nombre des résidus impairs, et par N′ le nombre des non-résidus impairs, ces équations deviendront

$$(19)\quad \begin{cases} \Sigma \operatorname{tang} a\omega = (R' - N')\sqrt{p}, & \text{pour } p = 8q + 7; \\ \Sigma \operatorname{tang} a\omega = (N' - R')\sqrt{p}, & p = 8q + 3; \\ \Sigma \cot a\omega = (N' - R')\sqrt{p}, & p = 8q + 7; \\ \Sigma \cot a\omega = \frac{1}{3}(N' - R')\sqrt{p}, & p = 8q + 3; \\ \Sigma \operatorname{cos\acute{e}c} a\omega = \frac{2}{3}(R' - N')\sqrt{p}, & p = 8q + 3; \end{cases}$$

comme on le verra plus bas. Comme l'on a

$$R_{\frac{1}{2}} + N_{\frac{1}{2}} = \frac{p-1}{2}, \quad R' + N' = \frac{p-1}{2},$$

on pourra éliminer l'un des nombres

$$R_{\frac{1}{2}}, \quad N_{\frac{1}{2}} \qquad \text{ou} \qquad R' \quad \text{et} \quad N'.$$

De la seconde des équations (4) on tire

$$\text{pour } p = 8q + 7, \ \Sigma \operatorname{tang} a\omega = \quad (R_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{2}})\sqrt{p} - 2(R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}})\sqrt{p},$$
$$\text{pour } p = 8q + 3, \ \Sigma \operatorname{tang} a\omega = -(R_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{2}})\sqrt{p} - 2(R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}})\sqrt{p}.$$

La comparaison des deux valeurs de $\Sigma \operatorname{tang} a\omega$ donnera donc

$$\text{pour} \quad p = 8q + 7, \qquad R_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{2}} = R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}};$$
$$\text{pour} \quad p = 8q + 3. \qquad R_{\frac{1}{4}} - N_{\frac{1}{4}} = 0.$$

Mais on a en général

$$R_{\frac{1}{2}} = R_{\frac{1}{4}} + R_{\frac{2}{4}}, \qquad N_{\frac{1}{2}} = N_{\frac{1}{4}} + N_{\frac{2}{4}}.$$

et de plus $R_{\frac{1}{4}} + N_{\frac{1}{4}}$ est l'entier de $\frac{p}{4}$. De même $R_{\frac{2}{4}} + N_{\frac{2}{4}}$ est égal à l'entier de $\frac{p}{2}$ moins l'entier de $\frac{p}{4}$, on aura donc

pour $\quad p = 8q + 7, \qquad R\frac{2}{4} = N\frac{2}{4} = \frac{p+1}{8};$

pour $\quad p = 8q + 3, \qquad R\frac{1}{4} = N\frac{1}{4} = \frac{p-3}{8}.$

Comme des deux nombres k, $p-k$, l'un résidu et l'autre non-résidu, on aura

$$R\tfrac{1}{2} = N\tfrac{2}{2},\ N\tfrac{1}{2} = R\tfrac{2}{2};\ R\tfrac{1}{4} = N\tfrac{4}{4},\ N\tfrac{1}{4} = R\tfrac{4}{4},\ R\tfrac{2}{4} = N\tfrac{3}{4},\ N\tfrac{2}{4} = R\tfrac{3}{4},$$

d'où résultera

$$R\tfrac{1}{2} + N\tfrac{1}{2} = R\tfrac{2}{2} + N\tfrac{2}{2} = \frac{p-1}{2},\quad R\tfrac{1}{4} + N\tfrac{1}{4} = R\tfrac{4}{4} + N\tfrac{4}{4} = \frac{p-3}{4},$$
$$R\tfrac{2}{4} + N\tfrac{2}{4} = R\tfrac{3}{4} + N\tfrac{3}{4} = \frac{p-1}{2} - \frac{p+3}{4} = \frac{p-1}{4},$$

on a aussi évidemment

$$\Sigma a - \Sigma b = p\frac{p-1}{2},\ \Sigma a\tfrac{1}{2} - \Sigma b\tfrac{1}{2} = \frac{p^2-1}{8},\ \Sigma a\tfrac{2}{2} - \Sigma b\tfrac{2}{2} = \frac{p.p-1}{2} - \frac{p^2-1}{8}.$$

D'ailleurs, comme les nombres $a', a'', a''', \ldots, a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ sont les racines de la congruence $x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0$ (mod. p), et $b', b'', \ldots, b^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ celles de la congruence $x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0$ (mod. p), en exceptant le cas de $p = 3$, on aura

$$\Sigma a \equiv 0 \text{ (mod. } p), \quad \Sigma b \equiv 0 \text{ (mod. } p),$$

c'est-à-dire que $\frac{\Sigma a}{p}$ et $\frac{\Sigma b}{p}$ seront entiers.

L'équation

$$\Sigma a + \Sigma b = \frac{p.p-1}{2} = p(R\tfrac{1}{2} + N\tfrac{1}{2})$$

devient donc

$$\frac{1}{p}\Sigma a + \frac{1}{p}\Sigma b = R\tfrac{1}{2} + N\tfrac{1}{2};$$

mais pour $p = 8q + 7$ on a aussi l'équation

$$\frac{1}{p}\Sigma b - \frac{1}{p}\Sigma a = \mathrm{R}\tfrac{1}{2} - \mathrm{N}\tfrac{1}{2}.$$

Il en résulte donc

$$\frac{1}{p}\Sigma a = \mathrm{N}\tfrac{1}{2}, \quad \frac{1}{p}\Sigma b = \mathrm{R}\tfrac{1}{2}.$$

Pour le cas de $p = 8q + 3$ on a l'équation

$$\frac{3}{p}\Sigma b - \frac{3}{p}\Sigma a = \mathrm{R}\tfrac{1}{2} - \mathrm{N}\tfrac{1}{2},$$

et par suite

$$\frac{3}{p}\Sigma b = p - 1 - \mathrm{N}\tfrac{1}{2} = \frac{p-1}{2} + \mathrm{R}\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{3}{p}\Sigma a = p - 1 - \mathrm{R}\tfrac{1}{2} = \frac{p-1}{2} + \mathrm{N}\tfrac{1}{2}.$$

Si l'on combine les équations précédentes avec celles-ci

$$\mathrm{R}\tfrac{2}{4} = \mathrm{N}\tfrac{2}{4}, \quad \mathrm{R}\tfrac{1}{4} = \mathrm{N}\tfrac{1}{4}, \quad \Sigma a\tfrac{1}{2} = \Sigma b\tfrac{1}{2}, \quad \Sigma b\tfrac{2}{2} - \Sigma a\tfrac{2}{2} = 2(\Sigma a\tfrac{1}{2} - \Sigma b\tfrac{1}{2}),$$

qui ont été trouvées plus haut et qui sont relatives les unes au cas de $p = 8q + 7$, les autres à celui de $p = 8q + 3$, on obtiendra les résultats suivants :

Pour $p = 8q + 7$,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{R}\tfrac{2}{4} = \mathrm{N}\tfrac{2}{4} = \mathrm{R}\tfrac{3}{4} = \mathrm{N}\tfrac{3}{4} = \frac{p+1}{8},\\
&\mathrm{N}\tfrac{1}{4} = \mathrm{R}\tfrac{4}{4} = \frac{p-3}{8} - \mathrm{R}\tfrac{1}{4}, \quad \mathrm{N}\tfrac{4}{4} = \mathrm{R}\tfrac{1}{4},\\
&\Sigma a \;= p\left(\frac{p+1}{8} + \mathrm{N}\tfrac{1}{4}\right) = p\left(\frac{3p-5}{8} - \mathrm{R}\tfrac{1}{4}\right),\\
&\Sigma b \;= p\left(\frac{p+1}{8} + \mathrm{R}\tfrac{1}{4}\right),\\
&\Sigma a\tfrac{1}{2} = \Sigma b\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}(p^2 - 1),\\
&\Sigma a\tfrac{2}{2} = p\left(\frac{3p-5}{8} - \mathrm{R}\tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{16}(p^2 - 1),\\
&\Sigma b\tfrac{2}{2} = p\left(\frac{p+1}{8} + \mathrm{R}\tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{16}(p^2 - 1);
\end{aligned}\right.$$

et pour $p = 8q + 3$.

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&R_{\frac{1}{4}} = N_{\frac{1}{4}} = R_{\frac{4}{4}} = N_{\frac{4}{4}} = \frac{p-3}{8},\\
&N_{\frac{2}{4}} = R_{\frac{3}{4}} = \frac{p+1}{8} - R_{\frac{2}{4}}, \quad N_{\frac{3}{4}} = R_{\frac{2}{4}},\\
&3\Sigma a = p\left(\frac{7p-5}{8} - R_{\frac{2}{4}}\right), \quad 3\Sigma b = p\left(\frac{5p-7}{8} - R_{\frac{2}{4}}\right),\\
&3\Sigma a_{\frac{1}{2}} = \frac{p+1}{4}\cdot\frac{p-3}{4} + p\,.\,R_{\frac{2}{4}}, \quad 3\Sigma b_{\frac{1}{2}} = \frac{p+1}{4}\cdot\frac{5p-3}{8} - pR_{\frac{2}{4}},\\
&3\Sigma a_{\frac{2}{2}} = p\,\frac{7p-5}{8} - \frac{p+1}{4}\,\frac{p-3}{4} - 2pR_{\frac{2}{4}},\\
&3\Sigma b_{\frac{2}{2}} = p\,\frac{5p-7}{8} - \frac{p+1}{4}\cdot\frac{5p-3}{4} + 2pR_{\frac{2}{4}}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on partage les résidus a, dont la somme est Σa, en deux séries, les impairs en nombre R', ayant pour somme $\Sigma' a$, et les pairs en nombre R'', ayant pour somme $\Sigma'' a$, on aura les équations

$$\Sigma' a + \Sigma'' a = \Sigma a, \qquad R' + R'' = \frac{p-1}{2}.$$

De même si les non-résidus b, dont la somme est Σb, sont distribués en deux séries, les impairs en nombre N', ayant pour somme $\Sigma' b$, et les pairs en nombre N'', ayant pour somme $\Sigma'' b$, on aura les équations

$$\Sigma' b + \Sigma'' b = \Sigma b, \qquad N' + N'' = \frac{p-1}{2}.$$

Et de plus il est facile de voir que l'on a

pour $p = 8q + 7$,

$$\Sigma'' a = 2\Sigma a_{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma'' b = 2\Sigma b_{\frac{1}{2}}, \quad R'' = R_{\frac{1}{2}}, \quad N'' = N_{\frac{1}{2}}:$$

d'où

$$\Sigma' a = \Sigma a_{\frac{2}{2}} - \Sigma a_{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma' b = \Sigma b_{\frac{2}{2}} - \Sigma b_{\frac{1}{2}},$$

$$R' = \frac{p-1}{2} - R_{\frac{1}{2}}, \qquad N' = \frac{p-1}{2} - N_{\frac{1}{2}}:$$

pour $p = 8q + 3$,

$$\Sigma'' a = 2\Sigma b_{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma'' b = 2\Sigma a_{\frac{1}{2}}, \quad R'' = N_{\frac{1}{2}}, \quad N'' = R_{\frac{1}{2}}:$$

d'où

$$\Sigma' a = \Sigma a - 2\Sigma b \tfrac{1}{2}, \qquad \Sigma' b = \Sigma b - 2\Sigma a \tfrac{1}{2},$$

$$R' = \frac{p-1}{2} - N\tfrac{1}{2}, \qquad N' = \frac{p-1}{2} - R\tfrac{1}{2},$$

au moyen desquelles on retrouvera les équations (19).

Problème. Trouver les produits

$$\Pi\, 2 \sin k \frac{\pi}{p}, \quad \Pi\, 2 \cos k \frac{\pi}{p} \quad \text{et} \quad \Pi\, 2 \sin k \frac{2\pi}{p}, \quad \Pi\, 2 \cos k \frac{2\pi}{p},$$

pris depuis $k = 1$ jusqu'à $k = p - 1$.

Solution. On a l'identité

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^p - 1}{x - 1} &= x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 \\ &= \Pi\left(x - \cos k \frac{2\pi}{p} - \sin k \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on y fait $x = 1$, comme il en résulte

$$\begin{aligned} 1 - \cos k \frac{2\pi}{p} - \sin k \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1} &= 2 \sin^2 k \frac{\pi}{p} - 2 \sin k \frac{\pi}{p} \cos k \frac{\pi}{p} \sqrt{-1} \\ &= 2\sqrt{-1} \sin k \frac{\pi}{p}\left(\cos k \frac{\pi}{p} + \sin k \frac{\pi}{p} \sqrt{-1}\right), \end{aligned}$$

le second membre deviendra

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\, \Pi\, 2 \sin k \frac{\pi}{p}\left[\cos(1 + 2 + 3 \ldots + p - 1) \frac{\pi}{p} + \sin(1 + 2 + 3 \ldots + p - 1) \frac{\pi}{p} \sqrt{-1}\right];$$

or

$$(1 + 2 + 3 + \ldots p - 1) \frac{\pi}{p} = \frac{p-1}{2}\pi,$$

de sorte que le troisième facteur se réduit à $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, à cause de

$$\cos \frac{p-1}{2}\pi = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \sin \frac{p-1}{2}\pi = 0.$$

L'équation (22) devient donc

$$(23) \qquad \Pi\, 2 \sin k \frac{\pi}{p} = p.$$

La substitution de $x = -1$, pour laquelle

$$-1 - \cos k\,\frac{2\pi}{p} - \sin k\,\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1} = -2\cos^2 k\,\frac{\pi}{p} - 2\sin k\,\frac{\pi}{p}\cos k\,\frac{\pi}{p}\sqrt{-1}$$
$$= -2\cos k\,\frac{\pi}{p}\left(\cos k\,\frac{\pi}{p} + \sin k\,\frac{\pi}{p}\sqrt{-1}\right),$$

donne pareillement

$$(24)\qquad \Pi\, 2\cos k\,\frac{\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

par suite

$$(25)\qquad \Pi\,\operatorname{tang} k\,\frac{\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p.$$

Si l'on remplace k par $2k$, les sinus et cosinus qui répondent à $k > \frac{p}{2}$ ou $2k > p$, sont, au signe près, les sinus et cosinus du reste de $2k$ divisé par p; on aura, d'après cela,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Pi\, 2\sin k\,\frac{2\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p, \qquad \Pi\, 2\cos k\,\frac{2\pi}{p} = 1,\\ &\Pi\,\operatorname{tang} k\,\frac{2\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p.\end{aligned}\right.$$

Les formules précédentes reviennent à celles-ci

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Pi\, 2\sin a\,\frac{\pi}{p}\,\Pi\, 2\sin b\,\frac{\pi}{p} = p,\\ &\Pi\, 2\cos a\,\frac{\pi}{p}\,\Pi\, 2\cos b\,\frac{\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},\\ &\Pi\,\operatorname{tang} a\,\frac{\pi}{p}\,\Pi\,\operatorname{tang} b\,\frac{\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}};\end{aligned}\right.$$

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Pi\, 2\sin a\,\frac{2\pi}{p}\,\Pi\ \sin b\,\frac{2\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p,\\ &\Pi\, 2\cos a\,\frac{2\pi}{p}\,\Pi\ \cos b\,\frac{2\pi}{p} = 1,\\ &\Pi\,\operatorname{tang} a\,\frac{2\pi}{p}\,\Pi\,\operatorname{tang} b\,\frac{2\pi}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p.\end{aligned}\right.$$

On voit encore sans difficulté, que l'on a,

d'abord pour $p = 8q \pm 1$,

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Pi\, 2 \sin a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{R}\, \Pi\, 2 \sin a \frac{\pi}{p},\\
&\Pi\, 2 \sin b \frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\, \Pi\, 2 \sin b \frac{\pi}{p},\\
&\Pi\, 2 \cos a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{R}\, \Pi\, 2 \cos a \frac{\pi}{p},\\
&\Pi\, 2 \cos b \frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\, \Pi\, 2 \sin b \frac{\pi}{p},\\
&\Pi \tang a \frac{2\pi}{p} = \Pi \tang a \frac{\pi}{p},\\
&\Pi \tang b \frac{2\pi}{p} = \Pi \tang b \frac{\pi}{p};
\end{aligned}
\right.
$$

et puis pour $p = 8q \pm 3$,

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Pi\, 2 \sin a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{R}\, \Pi\, 2 \sin b \frac{\pi}{p},\\
&\Pi\, 2 \sin b \frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\, \Pi\, 2 \sin a \frac{\pi}{p},\\
&\Pi\, 2 \cos a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{R}\, \Pi\, 2 \cos b \frac{\pi}{p},\\
&\Pi\, 2 \cos b \frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\, \Pi\, 2 \cos a \frac{\pi}{p},\\
&\Pi \tang a \frac{2\pi}{p} = \Pi \tang b \frac{\pi}{p},\\
&\Pi \tang b \frac{2\pi}{p} = \Pi \tang a \frac{\pi}{p}.
\end{aligned}
\right.
$$

Problème. « Trouver les quatre produits

$$\Pi\, 2 \sin a \frac{\pi}{p},\quad \Pi\, 2 \sin b \frac{\pi}{p},\quad \Pi\, 2 \cos a \frac{\pi}{p},\quad \Pi\, 2 \cos b \frac{\pi}{p}.\text{ »}$$

Solution. Nous représenterons leurs valeurs absolues par K, L, M, N, et il viendra, eu égard au nombre des facteurs négatifs,

$$\Pi\, 2 \sin a \frac{\pi}{p} = K,\qquad \Pi\, 2 \sin b \frac{\pi}{p} = L,$$

$$\Pi\, 2 \cos a \frac{\pi}{p} = (-1)^{R}\, M,\quad \Pi\, 2 \cos b \frac{\pi}{p} = (-1)^{N}\, N;$$

et l'on aura les relations

$$KL = p, \quad MN = 1.$$

Cela posé, on sait que l'on a

$$Y^2 \mp pZ^2 = 4\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right),$$

selon que l'on a $p = 4q + 1$ ou $p = 4q - 1$, et que

$$(31)\qquad \tfrac{1}{2}Y - \tfrac{1}{2}Z\sqrt{\pm p} = \Pi\left(x - \cos a\frac{2\pi}{p} - \sin a\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}\right),$$

le produit Π s'étendant aux $\frac{p-1}{2}$ valeurs de a, savoir $a', a'', \ldots, a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$.

Dans l'équation (31), nous ferons successivement $x = 1$ et $x = -1$, et nous trouverons

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi\left(1 - \cos a\frac{2\pi}{p} - \sin a\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}\right) \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{p-1}{2}}\Pi\, 2\sin a\frac{\pi}{p}\left(\cos\frac{\Sigma a}{p}\pi + \sin\frac{\Sigma a}{p}\pi\sqrt{-1}\right), \\ &\Pi\left(-1 - \cos a\frac{2\pi}{p} - \sin a\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}\right) \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}}\Pi\, 2\cos a\frac{\pi}{p}\left(\cos\frac{\Sigma a}{p}\pi + \sin\frac{\Sigma a}{p}\pi\sqrt{-1}\right). \end{aligned}\right.$$

Nous supposerons que dans le premier cas Y et Z deviennent A et B, et dans le second cas A′ et B′. Le facteur $\cos\frac{\Sigma a}{p}\pi + \sin\frac{\Sigma a}{p}\pi\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{\Sigma a}{p}}$ (le cas $p = 3$ est excepté), devient $(-1)^q$ pour $p = 4q + 1$, car on trouve sans difficulté $\frac{\Sigma a}{p} = q$; et pour $p = 4q + 3$, si $p = 8k + 7$, on aura

$$\frac{\Sigma a}{p} = N\tfrac{1}{2},$$

d'ou

$$(-1)^{\frac{\Sigma a}{p}} = (-1)^N;$$

et si $p = 8q + 3$, on aura

$$\frac{\Sigma a}{p} = \frac{1}{3}(p - 1 - \mathrm{R}\tfrac{1}{2}) \equiv \mathrm{R}\tfrac{1}{2} \pmod{2},$$

d'où

$$(-1)^{\frac{\Sigma a}{p}} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}}.$$

On aura donc, pour le cas de $p = 4q + 1$,

$$\mathrm{K} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{p}\right), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{L} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{p}\right),$$

à cause de $$\mathrm{A}^2 - p\mathrm{B}^2 = 4p;$$

$$\mathrm{M} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'\sqrt{p}\right), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{N} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{A}' - \mathrm{B}'\sqrt{p}\right),$$

à cause de $$\mathrm{A}'^2 - p\mathrm{B}'^2 = 4,$$

et de $$\mathrm{R}\tfrac{1}{2} = \mathrm{R}\tfrac{2}{2} = q = \frac{p-1}{4}, \quad \mathrm{N}\tfrac{1}{2} = \mathrm{N}\tfrac{2}{2} = q.$$

N. B. Les équations $\mathrm{A}^2 - p\mathrm{B}^2 = 4p$, $\mathrm{A}'^2 - p\mathrm{B}'^2 = 4$, peuvent servir à trouver une solution de l'équation $y^2 - pz^2 = 1$, par les fonctions circulaires (cas de $p = 4q + 1$ premier). (*Voyez* une Note de M. Dirichlet, Journal de M. Crelle, tome XVII, page 286.)

On écrira

$$\left(\frac{\mathrm{A}'}{2}\right)^2 - p\left(\frac{\mathrm{B}'}{2}\right)^2 = 1;$$

et en formant le cube de $\frac{\mathrm{A}'}{2} + \frac{\mathrm{B}'}{2}\sqrt{p}$, on obtiendra

$$\left[\frac{\mathrm{A}'(p\mathrm{B}'^2 + 1)}{2}\right]^2 - p\left[\frac{\mathrm{B}'(p\mathrm{B}'^2 + 3)}{2}\right]^2 = 1.$$

On a donc une solution en entiers de $y^2 - pz^2 = 1$, les inconnues étant, comme A' et B', exprimées en fonctions circulaires.

L'équation

$$\mathrm{A}^2 - p\mathrm{B}^2 = 4p$$

donne

$$A = pA';$$

on a donc

$$B^2 - pA'^2 = 4,$$

ou

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 - p\left(\frac{A'}{2}\right)^2 = -1,$$

d'où, comme plus haut,

$$\left[\frac{B(pA'^2-1)}{2}\right]^2 - p\left[\frac{A'(pA'^2-3)}{2}\right]^2,$$

ou

$$a'^2 - pb'^2 = -1,$$

qui donne

$$(a'^2 + pb'^2)^2 - p(2a'b')^2 = 1;$$

l'équation $y^2 - pz^2 = 1$ est donc encore résolue en nombres entiers par le moyen de fonctions circulaires.

M. Dirichlet a montré que l'équation $y^2 - pz^2 = 1$ peut être traitée de même, quel que soit le nombre p, non carré.

Pour le cas de $p = 4q - 1$, les formules (32) donneront, en remarquant que l'équation $A^2 + pB^2 = 4p$ suppose $A = 0$, $B^2 = 4$, et que l'équation $A'^2 + pB'^2 = 4$, suppose $B' = 0$, $A'^2 = 4$, $(p > 3)$,

$$\tfrac{1}{2}B\sqrt{p} = (-1)^{q+N_{\frac{1}{2}}}K, \quad \tfrac{1}{2}A' = M;$$

une conséquence de ces équations, c'est qu'on a

$$K = L = \sqrt{p} \quad \text{et} \quad M = N = 1;$$

de plus, le signe de B (ou de Z pour $x = 1$) fera connaître si $N_{\frac{1}{2}}$, et par suite $R_{\frac{1}{2}}$ est pair ou impair. Comme l'on n'a point l'expression générale de Z, cette solution est plus théorique que pratique.

On a donc les formules suivantes :

pour $p = 4q + 1$,

$$(31)\ \begin{cases} \Pi 2 \sin a \dfrac{\pi}{p} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{p}\right), & \Pi 2 \cos a \dfrac{\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}}\, \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'\sqrt{p}\right), \\ \Pi 2 \sin b \dfrac{\pi}{p} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{p}\right), & \Pi 2 \cos b \dfrac{\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{N}\frac{1}{2}}\, \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}' - \mathrm{B}'\sqrt{p}\right); \end{cases}$$

pour $p = 4q - 1$,

$$(32)\ \begin{cases} \Pi 2 \sin a \dfrac{\pi}{p} = \sqrt{p}, & \Pi 2 \cos a \dfrac{\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}}, \\ \Pi 2 \sin b \dfrac{\pi}{p} = \sqrt{p}, & \Pi 2 \cos b \dfrac{\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{N}\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

desquelles on tire, par la division,

$$(33)\ \begin{cases} \text{pour } p = 4q + 1, & \Pi \tang a \dfrac{\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}}\, \dfrac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{p}}{\mathrm{A}' + \mathrm{B}'\sqrt{p}}; \\ \text{pour } p = 4q - 1, & \Pi \tang a \dfrac{\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}} . \sqrt{p}. \end{cases}$$

Au moyen des formules (29) et (30) on aura les formules analogues où π serait remplacé par 2π, entre autres ces deux-ci :

pour $p = 8k + 7$,

$$\Pi \tang a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}} \sqrt{p} = (-1)^{\mathrm{N}\frac{1}{2}} \sqrt{p};$$

pour $p = 8k + 3$,

$$\Pi \tang a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{\mathrm{N}\frac{1}{2}} \sqrt{p} = (-1)^{\mathrm{R}\frac{1}{2}} \sqrt{p} = -(-1)^{\mathrm{N}\frac{1}{2}} \sqrt{p}.$$

Dans le tome XVIII du Journal de M. Crelle, p. 375, M. Stern a donné, sans démonstration, les valeurs de

$$\Sigma \cot a \frac{360}{p} \quad \text{et} \quad \Pi \cot a \frac{360}{p};$$

il y a faute d'impression.

Au lieu de $\Sigma \cot a \dfrac{360^\circ}{p} = \sqrt{p}$, il faut, comme nous l'avons vu plus haut, $\pm \left(\dfrac{\Sigma b - \Sigma a}{p}\right)\sqrt{p}$, le signe $+$ étant pour $p = 8k + 7$, et le signe $-$ pour $p = 8k + 3$.

Au lieu de $\Pi \cot a \dfrac{360^\circ}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, il faut $= (-1)^{\mathrm{N}\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ pour $p = 8k + 7$, et $(-1)^{1+\mathrm{N}\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ pour $p = 8k + 3$.

La règle que M. Stern a donnée dans le *Journal de Mathématiques*, tome V, page 216, pour fixer le signe de $\Pi \cot a \frac{2\pi}{p}$, revient à la précédente, car si l'on représente par N le nombre de diviseurs quadratiques différents de $y^2 + (4q - 1)z^2$, dans la classification de Legendre, les nombres N et $\mathrm{N}\frac{1}{2}$ sont ensemble pairs ou impairs, ainsi que l'a montré M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome IX, page 189).

Problème. Le produit $1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$, où l'on suppose p premier de forme $4q - 1$, est-il résidu ou non-résidu quadratique de p?

Solution. Il résulte du théorème de Waring que l'on a

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{p} \quad \text{ou} \quad \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}.$$

La question est donc de savoir si les non-résidus compris entre 0 et $\frac{p}{2}$ sont en nombre pair ou impair, car $+1$ étant résidu et -1 non-résidu, le premier cas répondra à $\mathrm{N}\frac{1}{2}$ pair et le second à $\mathrm{N}\frac{1}{2}$ impair. Le problème précédent, proposé depuis longtemps par M. Dirichlet (Journal de M. Crelle, tome III, page 307), revient donc à demander une règle praticable pour savoir si $\mathrm{N}\frac{1}{2}$ est pair ou impair.

Tant que p est < 1000, le *Canon arithmeticus* de M. Jacobi donnera une solution très-expéditive. Pour les nombres au delà de 1000 et tels que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{p}{12}}$ ne soit pas très-grand, la solution de M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome IX, page 189) sera encore praticable.

Dans son grand Mémoire sur la *Théorie des Nombres*, page 17,

M. Cauchy a donné pour le cas de p premier de forme $4q+3$, la formule

$$1^{\frac{p-1}{2}} + 2^{\frac{p-1}{2}} + 3^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot \frac{2\left(2^{\frac{p+1}{2}}-1\right)}{2^{\frac{p-1}{2}}} \mathrm{A}_{\frac{p+1}{4}},$$

où A_1, A_2, A_3,... représentent les nombres de Bernoulli. Si $\mathrm{A}_{\frac{p+1}{4}}$ était connu, cette équation conduirait à la différence $\mathrm{R}_{\frac{1}{2}} - \mathrm{N}_{\frac{1}{2}}$; et comme on a $\mathrm{R}_{\frac{1}{2}} + \mathrm{N}_{\frac{1}{2}} = \frac{p-1}{2}$, on en déduirait $\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathrm{N}_{\frac{1}{2}}$. Mais comme on ne connaît que les premiers des nombres dits de Bernoulli, la solution précédente n'est bonne qu'en théorie.

Comme la parité ou l'imparité de Σa correspond à celle de $\mathrm{N}_{\frac{1}{2}}$, je vais indiquer un moyen de calculer Σa ou plutôt de chercher si cette somme est paire ou impaire. Ce moyen serait très-expéditif si l'on avait une table de carrés suffisamment prolongée. J'ai trouvé depuis longtemps cette solution du problème de M. Dirichlet, mais c'est d'apres la Note de M. Jacobi, déjà citée, que j'ai su que la parité ou imparité de μ dans la congruence $1.2.3\ldots\frac{p-1}{2} \equiv (-1)^\mu (\mathrm{mod}.\,p)$ correspondait à la parité ou à l'imparité de Σa.

Voici en quoi consiste cette règle.

On écrira sur une même ligne les multiples successifs de p moindres que $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, et au-dessous les carrés entiers immédiatement inférieurs

$$(1) \qquad p,\quad 2p,\quad 3p,\ldots,\ n.p,$$

$$(2) \qquad \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ldots,\ \nu^2,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

on aura

$$\Sigma a = \frac{p.\overline{p-1}}{2}\left(\frac{p+1}{12} - n\right) + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \nu)\,p;$$

cela résulte de ce que l'on a

$$\mathrm{S}_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{\overline{p-1}.p.\overline{p+1}}{24}$$

divisible par 3, sauf pour $p = 3$, cas excepté), et de plus, par l'omission des multiples de p dans les carrés $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$,

$$\Sigma a = S_2 - (\beta - \alpha)p - (\gamma - \beta)2p - (\delta - \gamma)3p \ldots - \left(\frac{p-1}{2} - \nu\right)np$$

$$= S_2 - n.\frac{p.p-1}{2} + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \nu)p.$$

Pour $p = 4q + 1$ on aura $n = \frac{p-5}{4}$, et par suite

$$\Sigma a = -\frac{p.p-1.p-8}{12} + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots \nu)p;$$

par l'omission des multiples de 2 on trouverait facilement

$$\Sigma a \equiv \frac{p-1}{4} + \alpha + \beta + \gamma + \ldots \nu.$$

Pour $p = 4q - 1$ on aura $n = \frac{p-3}{4}$, et par suite

$$\Sigma a = -\frac{p.p-1.p-5}{12} + (\alpha + \beta + \ldots + \nu)p.$$

et par l'omission des multiples de 2,

$$\Sigma a \equiv 1 + \alpha + \beta + \gamma + \ldots \nu.$$

Ainsi tout revient à savoir combien il y a de nombres impairs dans la série $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$.

Pour le cas de $p = 4q - 1$, Σa est pair quand il y a un nombre impair de termes impairs dans la série $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$; Σa est impair dans le cas contraire.

Tout le calcul se réduit donc à la formation des $\frac{p-3}{4}$ premiers multiples de p, et à la recherche des carrés entre lesquels ils tombent, ce qui se trouvera à l'inspection même de la table des carrés. Ce calcul, comme celui de M. Jacobi, deviendra impraticable pour de très-grands nombres.

Il faudrait donc avoir un autre moyen de former Σa. M. Libri a donné des formules pour trouver la somme des racines d'une congruence, et en particulier pour la somme des racines de

$$x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

qui renferme $x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$; mais ces formules ne paraissent pas facilement réductibles en nombres, ce qui est nécessaire pour avoir une solution pratique.

Je ferai observer en finissant que depuis longtemps M. Stern a posé un problème qui revient au suivant :

Trouver la somme des racines de la congruence

$$x^{\frac{p-1}{t}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

(Journal de M. Crelle, tome VII, page 104.)

Pour $t = 2$, la somme cherchée serait Σa, qui conduit, comme nous l'avons vu, à la solution de divers problèmes dont une solution praticable pour tous les cas est encore à désirer.

SUR LES FRACTIONS

QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME INDÉTERMINÉE $\frac{\infty}{\infty}$;

PAR J. LIOUVILLE.

M. Cauchy a étendu aux fractions $\frac{f(x)}{F(x)}$, qui pour une valeur particulière a de x se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, la règle connue depuis longtemps pour celles qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. La méthode très-simple dont il s'est servi ne paraît pas s'appliquer, à la vérité, au cas où la valeur de la fraction considérée est nulle ou infinie pour $x = a$; mais dans le tome VI de ce Journal (page 14), M. Bertrand a donné de la règle citée une démonstration nouvelle qui n'est pas sujette à la même objection, et qui prouve que dans les cas singuliers dont on vient de parler cette règle subsiste. Divers géomètres sont arrivés par une route différente au même résultat. J'indiquerai cependant encore un autre moyen d'y parvenir.

Tout se réduit à prouver que la règle de M. Cauchy reste exacte quand la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ est nulle; le cas où la valeur cherchée est infinie se ramène en effet à celui-là en renversant la fraction. Or, si l'on ajoute à la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, supposée nulle pour $x = a$, une constante C, d'où résulte la somme

$$\frac{f(x) + \mathrm{C}F(x)}{F(x)},$$

la valeur de cette dernière fraction, aussi pour $x = a$, sera précisément la constante C qui n'est ni 0 ni ∞. On pourra donc appliquer la méthode de M. Cauchy et l'on trouvera

$$\mathrm{C} = \frac{f'(a) + \mathrm{C}F'(a)}{F'(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} + \mathrm{C}.$$

d'où

$$\frac{f'(a)}{F'(a)} = 0 = \frac{f(a)}{F(a)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quand la vraie valeur de

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

pour $x = a$, est en elle-même indéterminée, ce qui arrive par exemple, si l'on prend

$$f(x) = 2x + x \sin x, \quad F(x) = 1 + 3x + x \cos x, \quad \text{et} \quad a = \infty,$$

on conçoit qu'il n'y a rien à attendre de la règle indiquée. Mais je remarquerai ici que la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ peut être déterminée, et celle de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ être néanmoins essentiellement indéterminée. La règle dont nous parlons cesse alors d'être applicable. Cette restriction a également lieu pour le cas des fractions $\frac{0}{0}$. Ainsi pour $x = \infty$, la vraie valeur de

$$\frac{x - \cos x}{x + \sin x}$$

est l'unité, tandis que la fraction

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x},$$

qui résulte du rapport des dérivées des deux termes, est tout à fait indéterminée. Semblablement la fraction

$$\frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}, \quad \text{ou} \quad \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x}},$$

se réduit à zéro pour $x = 0$, et cependant le rapport des dérivées donne

$$\frac{\sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}}{\cos x + \sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}},$$

fraction qui ne tend pas vers une limite déterminée lorsque x tend vers zéro.

Peut-être est-il bon d'ajouter en général que les règles du genre de celle que nous venons de discuter et qui se rapportent à des valeurs singulières et exceptionnelles ont presque toujours des cas en défaut qui résultent de leur nature même. Il faut en user avec réserve et s'assurer, dans chacun des exemples auxquels on les applique, que l'usage en est légitime. Ces règles n'en ont pas moins une utilité incontestable ; aussi les géomètres ont-ils apprécié depuis longtemps l'extension élégante que M. Cauchy a su donner au théorème de L'Hopital.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RELATIF A LA THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA;

Par J. LIOUVILLE.

Quand on traduit en analyse un problème de géométrie, on doit en général avoir égard à certaines conditions spéciales, attachées à la nature de ce probleme, quoique non exprimées explicitement, et dont on ne pourrait quelquefois négliger de tenir compte, sans arriver à une absurdité. L'exemple suivant, que je donne depuis longtemps dans mes cours, me paraît, à cause de sa simplicité même, bon à développer devant des élèves.

On propose de trouver la ligne la plus courte ou la plus longue qu'on puisse mener à un cercle donné d'un point A pris dans son plan. Soient O le centre du cercle, r son rayon, et x, y les coordonnées rectangulaires d'un des points M de sa circonférence, en sorte que $x^2+y^2=r^2$; soit de plus OA $= a$, et admettons que l'axe des x coïncide avec la droite OA. On aura

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = y^2 + (a - x)^2 = a^2 - 2ax + r^2.$$

Telle est la quantité qu'il faut rendre un *maximum* ou un *minimum*. Or, si d'après la règle ordinaire, on voulait égaler à zéro la dérivée de cette quantité, on trouverait l'équation absurde $-2a = 0$, d'où il semblerait résulter que le problème n'a aucune solution, tandis qu'évidemment il en a deux.

Pour faire disparaître le paradoxe, il suffit d'observer que par la nature même du problème de géométrie qui nous occupe, l'abscisse x ne peut varier qu'entre les limites $-r$, $+r$. Or la fonction $a^2 - 2ax + r^2$ est décroissante quand on suppose, ce qui est permis, a positif: la plus petite valeur de cette fonction répond dès lors à $x = -r$ et la plus grande à $x = r$. Donc, etc.

Si, au lieu de prendre pour axe des x la droite OA, on avait pris une autre droite à volonté, l'analyse seule aurait conduit sans aucune considération accessoire quelconque à la solution demandée, et la difficulté indiquée ne se serait pas présentée à nous. En nommant α, β les coordonnées du point A, on aurait eu

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2,$$

d'où, par la condition ordinaire du *maximum* ou *minimum*,

$$\alpha + \beta \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mais l'équation du cercle donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; il vient donc

$$y = \frac{\beta x}{\alpha};$$

cette dernière équation est celle de la droite OA : les points où la droite OA coupe le cercle sont donc les points cherchés. Ici les points dont nous parlons sont immédiatement fournis par la méthode ordinaire. La raison toute simple en est que leurs abscisses sont comprises entre $-r$ et $+r$, et sont différentes de ces deux limites, de telle manière que la fonction $\overline{\mathrm{AM}}^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y$ augmente lorsqu'on passe, par exemple, de l'abscisse qui répond au *minimum* aux abscisses plus grandes ou plus petites qui sont à côté. Quand on prend, au contraire, la droite OA pour axe des x, le *minimum* répond à $x = r$, mais c'est un *minimum* de $\overline{\mathrm{AM}}^2$ ou $a^2 - 2ax + r^2$ sous le point de vue géométrique, en comparant à l'abscisse r des abscisses toutes plus petites que r, et non sous le point de vue analytique où l'on aurait à comparer à l'abscisse r des abscisses à volonté plus grandes ou plus petites.

NOTE

SUR UN PASSAGE

DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

Lagrange démontre, dans la *Mécanique analytique*, tome I, p. 293, que, dans un système quelconque soumis à l'action de forces instantanées, la somme des forces vives est *maxima* ou *minima* relativement à tout autre mouvement que pourrait prendre le système, sous l'influence des mêmes impulsions, après l'introduction de certaines liaisons nouvelles. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un corps solide, la somme des forces vives est *maxima* ou *minima*, relativement aux mouvements qui auraient lieu si, l'impulsion restant la même, on fixait un axe quelconque dans l'intérieur du solide.

M. Delaunay, dans une Note insérée au tome V de ce Journal, a montré qu'il y a toujours *maximum*, mais la démonstration qu'il en donne est un peu longue et s'écarte beaucoup de celle de Lagrange.

Plus récemment, M. Sturm a fait voir (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XIII, page 1046) que le théorème de Lagrange est un cas particulier d'une proposition plus générale à laquelle il est parvenu; il a indiqué aussi un moyen direct fort simple d'établir ce théorème dans le cas d'un corps solide, au moyen des belles propriétés de l'ellipsoïde central de M. Poinsot.

Le but de cette Note est de montrer que l'analyse de Lagrange peut aussi servir à prouver qu'il y a toujours *maximum*, et donne même l'expression de la perte de forces vives à laquelle M. Sturm a été conduit par son théorème général. Il suffira, comme on va le voir, d'ajouter quelques mots aux raisonnements de la *Mécanique analytique*.

Voici la démonstration ainsi modifiée, dans laquelle j'écris en italique tout ce que j'ai dû ajouter :

« On peut, dans l'équation de l'article 2 de la section précédente,
» supposer les variations δx, δy, δz, proportionnelles aux vitesses
» x', y', z' que les corps reçoivent par l'impulsion; on aura ainsi
» l'équation (des forces vives)

$$S[m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + Xx' + Yy' + Zz'] = 0,$$

» dans laquelle la partie $Sm(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ représente la force
» vive de tout le système. Cette équation étant combinée avec les trois
» équations de l'article (14), donne lieu à une propriété de maximis et
» minimis relative à la ligne autour de laquelle le système tourne au
» premier instant, lorsqu'il a reçu une impulsion quelconque, ligne
» qu'on peut nommer aussi axe spontané de rotation.

» Si l'on nomme α, β, γ les parties des vitesses x', y', z' qui dé-
» pendent du changement de position respective des corps du sys-
» tème, et qu'on les ajoute à celles qui résultent des rotations (ar-
» ticle 17), on aura les valeurs complètes de x', y', z' exprimées
» ainsi :

$$x' = z\omega' - y\varphi' + \alpha,\quad y' = x\varphi' - z\psi' + \beta,\quad z' = y\psi' - x\omega' + \gamma.$$

» Supposons maintenant qu'on différentie ces valeurs *ou qu'on en*
» *prenne les différences finies*, en ne regardant que ψ', ω', φ', comme
» variables, et qu'on dénote ces différentielles *ou ces différences* par
» la caractéristique δ [*], on aura

$$\delta x' = z\delta\omega' - y\delta\varphi',\quad \delta y = x\delta\varphi' - z\delta\psi',\quad \delta z = y\delta\psi' - x\delta\omega';$$

---

[*] Ces variations, représentées par le signe δ, se rapportent aux changements qu'éprouvent les vitesses, par le seul fait d'une modification apportée aux liaisons, les forces motrices restant les mêmes.

» or les trois équations de l'article (14),

$$\int m(x'y - y'x) + xY - yX = 0,$$

$$\int m(z'x - x'z) + zX - xZ = 0,$$

$$\int m(yz' - zy') + yZ - zY = 0.$$

» étant multipliées respectivement par $\delta\varphi'$, $\delta\omega'$, $\delta\psi'$, et ajoutées en-
» semble en faisant passer sous le signe $\int$ les différentielles $\delta\varphi'$, $\delta\omega'$,
» $\delta\psi'$ qui sont les mêmes pour tous les corps, donnent, par la sub-
» stitution des valeurs précédentes,

$$\int m(x\delta x' + y\delta y' + z\delta z') + X\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z' = 0:$$

» mais l'équation des forces vives étant différentiée, par rapport à δ,
» donne, *en conservant tous les termes, comme on doit le faire puis-*
» *qu'il s'agit de différences finies*,

$$\int [2m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')]$$
$$+ [m((\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2)] + X\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z' = 0;$$

» donc on a, par la comparaison de ces deux équations,

$$\int m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') - m[(\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2] = 0.$$

» et par conséquent

$$\delta \int m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = - \int m(\delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2). \text{ »}$$

Cette équation, qui ne diffère du résultat de Lagrange que par l'introduction des termes du second ordre entrant dans le second membre, montre que l'accroissement de forces vives est négatif et égal à la somme des forces vives perdues par les différents points. Rien ne suppose ici que les variations soient infiniment petites.

La démonstration précédente, quoique bien simple, l'est encore moins que celle du théorème général de M. Sturm. J'ai cru néanmoins qu'il pouvait être intéressant de montrer que la méthode de Lagrange suffit pour traiter complétement le cas particulier dont il s'était occupé. On voit qu'il suffit d'ajouter quelques mots à ce qui avait été dit par cet illustre géomètre.

QUESTION DE PROBABILITÉ

APPLICABLE AUX DÉCISIONS RENDUES PAR LES JURÉS;

Par M. COSTE,

Capitaine d'artillerie.

Si, pour prendre une décision, résoudre une question, juger un criminel, on pouvait convoquer, en une seule assemblée, tous les membres d'une nation, ou tous ceux en qui on reconnaîtrait le plus de lumière, le plus d'impartialité ou le plus de sagesse, la décision rendue par cette assemblée, même à la simple majorité, pourrait être et devrait être regardée comme la vérité.

Dans l'impossibilité de former une pareille assemblée, on est forcé de ne convoquer qu'un certain nombre de personnes, et même, pour les affaires criminelles, on se contente de réunir douze jurés.

Quand les jurés ont rendu un jugement à une certaine majorité, si l'on connaît cette majorité, on peut se demander : quelle est la probabilité que la décision rendue par ces jurés est conforme à celle qui serait rendue par tous les jurés portés sur la liste générale, si l'on pouvait réunir tous ces jurés dans une seule assemblée.

En supposant que les jurés soient tirés au sort sur la liste générale, cette question est la même que la suivante :

Une urne renferme un très-grand nombre de boules blanches ou noires. On tire de cette urne un certain nombre de boules. Dans les boules sorties, le nombre des boules blanches surpasse celui des noires, et même le rapport du nombre des boules blanches au nombre des boules noires est donné ou connu; on demande avec quelle probabilité on peut supposer que, dans l'urne, le nombre des boules blanches surpasse le nombre des boules noires.

Pour résoudre cette question, on doit d'abord supposer que, le nombre total des boules contenues dans l'urne soit connu d'avance, et que l'on ignore seulement le rapport du nombre des boules blanches au nombre des boules noires.

Représentons par m le nombre total des boules contenues dans l'urne, tant blanches que noires, et par n le nombre des boules noires. Le nombre des boules blanches renfermées dans l'urne sera donc $m - n$.

Supposons d'abord que l'on n'ait tiré que deux boules, et que ces deux boules soient blanches.

D'après le nombre des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne, si l'on ne tire que deux boules de l'urne, le nombre des chances qui donneront deux boules blanches sera exprimé par $\frac{(m-n-1)(m-n)}{2}$; $(m-n)n$ exprimera le nombre des chances qui donnent une boule noire et une boule blanche; et $\frac{n(n-1)}{2}$ désignera le nombre des chances de la sortie de deux boules noires.

Par hypothèse, on n'a tiré de l'urne que deux boules, et ces deux boules étant blanches, on est sûr que l'urne contient au moins deux boules blanches. Les différentes hypothèses, que l'on peut faire sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne, sont comprises entre $n = 0$ et $n = m - 2$.

L'hypothèse de $m - 2$ boules noires pour la sortie de deux boules blanches donne .... 1 chance;
L'hypothèse de $m - 3$ boules noires .... 3 chances;
L'hypothèse de $m - 4$ .... 6 chances;
....
....
L'hypothèse de $m - m$ .... $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

En admettant toutes les hypothèses possibles sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances qui donneront deux boules blanches sera exprimé par la quantité

$$1 + 3 + 6 + 10 \ldots\ldots + \frac{m(m-1)}{1.2},$$

quantité qui est égale à

$$\frac{m(m-1)(m+1)}{1.2.3}.$$

En général, s'il n'est sorti de l'urne que t boules, et si ces t boules sont blanches, pour le nombre des chances qui donneront t boules blanches,

Dans l'hypothèse de $m-t$ boules noires, on aura .... 1 chance;

Dans l'hypothèse de $m-t-1$ boules noires $t+1$ chances;

Dans l'hypothèse de $m-t-2$ .... $\frac{(t+2)(t+1)}{1.2}$;

....

....

Dans l'hypothèse de $m-m$ boules noires... $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t}$.

Dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur le nombre de boules blanches ou de boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances donnant t boules blanches sera donc

$$1+\frac{(t+1)}{1}+\frac{(t+2)(t+1)}{1.2}+\frac{(t+3)(t+2)(t+1)}{1.2.3}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t},$$

ou

$$\frac{t(t-1)(t-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots t}+\frac{(t+1)t\ldots 2}{1.2\ldots t}+\frac{(t+2)(t+1)\ldots 3}{1.2\ldots t}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t},$$

quantité que l'on sait être égale à

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)(m+1)}{1.2.3\ldots t.(t+1)}.$$

En rapprochant ce dernier résultat du résultat qui donne le nombre total des chances de la sortie de t boules blanches dans l'hypothèse où toutes les boules contenues dans l'urne sont supposées blanches, on conclura que la quantité $\frac{t+1}{m+1}$ exprime la probabilité que toutes les boules de l'urne seront blanches, quand on n'aura tiré de l'urne que t boules, et que toutes ces boules seront blanches.

Ainsi, si une urne contient m boules blanches ou noires, après qu'il sera sorti de cette urne t boules, et que toutes ces t boules sorties seront blanches, si l'on parie que toutes les boules contenues dans l'urne sont blanches, on ne pourra parier que $t+1$ contre $m+1$.

Cette probabilité diminuera d'autant plus que le nombre des boules contenues dans l'urne sera plus considérable.

Le nombre des boules contenues dans l'urne étant $2m+1$, le nombre total des chances, pour la sortie de t boules blanches sans aucune noire, sera exprimé par

$$\frac{(2m+1)\,2m\,(2m-1)\ldots(2m+2-t)}{1.2.3\ldots\ldots t}\cdot\frac{(2m+2)}{(t+1)}=\text{A}.$$

Dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur le nombre des boules blanches ou noires contenues dans l'urne, quand on suppose que, dans cette urne, le nombre des boules noires surpasse le nombre des boules blanches, on trouve, pour exprimer le nombre total des chances qui donne à la sortie t boules blanches sans mélange d'aucune noire, le nombre représenté par la quantité

$$\frac{m\,(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t}\cdot\frac{(m+1)}{(t+1)}=\text{B}.$$

Ainsi quand d'une urne contenant $2m+1$ boules, tant blanches que noires, on aura tiré au hasard t boules seulement, et que toutes ces t boules seront blanches, pour exprimer la probabilité que le nombre total des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires, on aura le rapport $\frac{\text{A}}{\text{B}}-1:\frac{\text{A}}{\text{B}}$, rapport qui est équivalent à $\frac{\text{A}-\text{B}}{\text{A}}$.

Dans un pari, si celui qui parierait que le nombre des boules contenues dans l'urne serait plus considérable que le nombre des boules blanches, mettait la mise représentée par 1, pour rendre toutes les chances égales, celui qui parierait le contraire devrait mettre la mise représentée par la quantité

$$4\,\frac{(2m+1)(2m-1)}{(m-1)(m-2)}-1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ quand } t=3;$$

la mise $$8\,\frac{(2m+1)(2m-1)}{(m-2)(m-3)}-1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ quand } t=4;$$

la mise $$8\,\frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)}{(m-2)(m-3)(m-4)}-1 \ldots\ldots \text{ quand } t=5;$$

la mise $$16\,\frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)}{(m-3)(m-4)(m-5)}-1 \ldots\ldots \text{ quand } t=6;$$

....

....

....

la mise $$2^{n'+1}\,\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots(2m-2n'+1)}{(m-n')(m-n'-1)\ldots(m-2n')}-1 \text{ quand } t=2n'+1;$$

la mise $$2^{n'+1}\,\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots(2m-2n'+1)}{(m-n')(m-n'-1)\ldots(m-2n'-1)}-1 \text{ quand } t=2n'.$$

Si le nombre des boules contenues dans l'urne est très-grand ou même infini, il faudra supposer dans les quantités précédentes m infini, et ces quantités se réduiront alors à

$$2^{t+1}-1.$$

Après la sortie de t boules blanches, sans aucun mélange de boules noires, la probabilité que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires, sera exprimée par la fraction

$$\frac{2^{t+1}-1}{2^{t+1}},$$

qui diffère très-peu de l'unité ou de la certitude, pour peu que t soit grand.

Ce résultat est le même que celui trouvé pour le même cas par M. Poisson, dans ses *Recherches sur la probabilité des jugements*.

A présent, reprenons le cas général que nous nous sommes proposé au commencement de ce Mémoire. Supposons que parmi les boules sorties de l'urne, il se trouve quelques boules noires, et que l'on veuille trouver la probabilité avec laquelle on peut conclure que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires.

Prenons d'abord un cas particulier de ce probleme: supposons que l'on ait tiré de l'urne trois boules, et que, parmi les trois boules sorties, il se trouve deux boules blanches et une boule noire.

Le nombre total des boules contenues dans l'urne étant m, l'urne ne pourra contenir au plus que $m-1$ boules blanches et $m-2$ boules noires. Le nombre des hypothèses que l'on pourra former sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne sera renfermé entre les nombres 1 et $m-2$.

Si l'urne ne contient qu'une seule boule noire, on aura, pour la sortie de deux boules blanches et d'une boule noire, le nombre des chances exprimées par la quantité $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$.

Si l'urne renferme deux boules noires, les $m-2$ boules blanches contenues dans l'urne pourront former $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}$ combinaisons, et comme chacune de ces combinaisons peut se rencontrer avec l'une des deux boules noires, le nombre total des chances qui, dans cette hypothese, donnent deux boules blanches et une boule noire, sera exprimé par $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\,2$.

Si l'urne contient trois boules noires, les $m-3$ boules restantes se combineront deux à deux de $\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}$ façons différentes, et chacune de ces combinaisons pouvant se trouver indifféremment avec chacune des trois boules noires, on aura, pour le nombre des chances qui donneront deux boules blanches et une noire, $\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\,3$.

Dans les différentes hypothèses que l'on peut former sur le nombre relatif des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances qui donneront deux boules blanches et une boule noire sera exprimé par la suite

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\,1+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\,2+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\,3$$
$$+\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}\,4+\ldots+\frac{2.1}{1.2}.(m-2),$$

suite dont la somme est égale à

$$\frac{(m-1)(m-2)\,m\,(m+1)}{1.2.3.4}.$$

On trouvera de même que, dans les différentes hypotheses que l'on peut former sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances qui donnent t boules blanches et une noire sera

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\,1+\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\,2$$
$$+\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-t-2)}{1.2\ldots t}\,3+\ldots+1(m-t),$$

quantité égale à

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-1)\ldots(m-t)}{1.2.3\ldots t}\cdot\frac{m(m+1)}{(t+1)(t+2)}.$$

Prenons l'hypothèse dans laquelle l'urne est supposée contenir $m-n$ boules blanches et n boules noires; les $m-n$ boules blanches pourront se combiner t à t de

$$\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-4-t+1)}{1.2.3\ldots t}$$

façons différentes.

Les n boules noires pourront se combiner s à s de

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}$$

façons différentes.

Dans cette hypothese on aura donc, pour le nombre de chances qui donneront t boules blanches et s boules noires, la quantité

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}.$$

Cela posé, dans les différentes hypothèses que l'on peut former sur le nombre des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne, on trouve que le nombre total des chances qui donnent t boules blanches et s boules noires est exprimé par la suite

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\frac{(m-s)(m-s-1)\ldots(m-s-t+1)}{1.2\ldots t}\,1\\ &+\frac{(m-s-1)(m-s-2)\ldots(m-s-t)}{1.2\ldots t}(s+1)\\ &+\frac{(m-s-2)(m-s-3)\ldots(m-s-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(s+2)(s+1)}{1.2}+\ldots\\ &+1\,\frac{(m-t)(m-t+1)\ldots(m-t-s+1)}{1.2\ldots s},\end{aligned}\right.$$

suite qui a pour somme la quantité

$$(B')\quad \frac{(m-s)(m-s-1)\ldots(m-s-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m-s+1)(m-s+2)\ldots(m+1)}{(t+1)(t+2)\ldots(t+s+1)}.$$

Pour résoudre complétement le problème, qui consiste à trouver la probabilité que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires, après qu'il est sorti de cette urne t boules blanches et s boules noires, supposons que le nombre total des boules contenues dans l'urne, tant blanches que noires, soit impair, et que ce nombre, au lieu d'être représenté par m, soit exprimé par $2m+1$.

Le nombre total des chances dans les différentes hypothèses possibles, sera alors, d'après ce qui précède,

$$(B)\quad \frac{(2m-s-t+2)(2m-s-t+3)(2m-s-t+4)\ldots(2m+2)}{1.2.3\ldots(s+t+1)}.$$

Le nombre total des chances, dans les différentes hypotheses où le nombre des boules noires surpasse le nombre des boules blanches, sera aussi exprimé par la quantité ou la suite

$$(a)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(m+1)m\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots s}\\[2ex]
+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(m+2)(m+1)\ldots(m-s+3)}{1.2\ldots s}\\[2ex]
+\dfrac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(m+3)(m+2)\ldots(m-s+4)}{1.2\ldots s}+\ldots\\[2ex]
+1\,\dfrac{(2m-t+1)(2m-t)(2m-t-1)\ldots(2m-t-s+2)}{1.2.3\ldots s}.
\end{array}\right.$$

Pour résoudre complétement ce problème, il reste à trouver la somme de cette dernière suite.

Le cas général de cette suite, qui peut se présenter très-souvent dans les applications, est

$$(b)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{1.2\ldots s}\\[2ex]
+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+s)}{1.2\ldots s}\\[2ex]
+\dfrac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(n+2)(n+3)\ldots(n+s+1)}{1.2\ldots s}+\ldots\\[2ex]
+1\,\dfrac{(n+m)(n+m+1)\ldots(n+m+s-1)}{1.2\ldots s}.
\end{array}\right.$$

Pour trouver la somme de cette suite, prenons un cas particulier et supposons $s=4$; la série précédente se transformera alors dans la suivante

$$(c)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\\[2ex]
+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4}\\[2ex]
+\dfrac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1.2.3.4}+\ldots\\[2ex]
+1\,\dfrac{(n+m)(n+m+1)(n+m+2)(n+m+3)}{1.2.3.4}.
\end{array}\right.$$

Ce que nous dirons de la suite (c) s'appliquera facilement aux suites (b) et (a).

Chaque terme de la suite c) est composé du produit d'une factorielle fonction de m, et d'une factorielle fonction de n. En développant les numérateurs des factorielles fonction de n, on aura les différentes quantités

$$\begin{array}{l}
n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24,\\
n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120,\\
n^4 + 18n^3 + 119n^2 + 342n + 360,\\
n^4 + 22n^3 + 179n^2 + 638n + 840.\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Si, de chacune de ces quantités, on retranche la même quantité $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, qui est le produit de $n(n+1)(n+2)(n+3)$, il restera les quantités

$$\begin{array}{l}
4n^3 + 24n^2 + 44n + 24,\\
8n^3 + 60n^2 + 148n + 120,\\
12n^3 + 108n^2 + 336n + 360,\\
16n^3 + 168n^2 + 632n + 840,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Si, de chacune de ces dernières quantités, on retranche respectivement, et suivant le rang qu'elles occupent, une des quantités suivantes

$$\begin{array}{l}
4\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
8\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
12\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
16\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

dans lesquelles la quantité $n^3 + 3n^2 + 2n$ est le produit de $n(n+1)(n+2)$, et les nombres 4, 8, 12, 16 sont en progression arithmétique, on aura pour reste les quantités

$$\begin{array}{rcrcrl} 12n^2 &+& 26n &+& 24, \\ 36n^2 &+& 132n &+& 120, \\ 72n^2 &+& 312n &+& 360, \\ 120n^2 &+& 600n &+& 840, \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Si, de chacun de ces derniers restes, on retranche la quantité $n^2 + n$ multipliée successivement par les nombres 12, 36, 72, 120, etc., nombres qui ne sont que la suite des nombres triangulaires multipliés par 12, on trouvera les restes

$$\begin{array}{rcrl} 24n &+& 24, \\ 96n &+& 120, \\ 240n &+& 360, \\ 480n &+& 840, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Les nombres 24, 96, 240, 480, etc., forment la suite des nombres pyramidaux triangulaires multipliés par 24; et les nombres 24, 120, 360, 480, etc., sont la suite des nombres figurés du 4^{e} ordre multipliés par 24.

De cette manière, la quantité (c) se trouvera transformée dans la quantité

$$\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t} + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t} + \ldots + 1\right]\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1.2.3.4}$$

$$-4\left[\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1 + \dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{2.2\ldots t}\,2 \\ + \dfrac{(m-2)\ldots(m-t-1)}{1\ldots t}\,3 + \ldots + (m-t)\end{array}\right]\frac{n^3+3n^2+6n}{1.2.3.4}$$

$$-4.3\left[\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1 + \dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\,3 \\ + \dfrac{(m-2)\ldots(m-t-1)}{1\ldots t}\,6 + \ldots + \dfrac{(m-t)(m-t+1)}{1.2}\end{array}\right]\frac{n^2+n}{1.2.3.4}$$

$$-4.3.2\left[\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1 + \dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t+2)}{1.2\ldots t}\,4 + \ldots \\ + 1\,\dfrac{(m-t)(m-t+1)(m-t-2)}{1.2.3}\end{array}\right]\frac{n}{1.2.3.4}$$

$$-4.3.2.1\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1 + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\,5\right]\frac{1}{1.2.3.4}.$$

23..

En sommant les suites qui se trouvent entre parenthèses, la quantité précédente deviendra

$$
\begin{aligned}
&\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{m+1}{t+1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\\
&+4\,\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{(t+1)(t+2)}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}\\
&+4.3\,\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(t+1)(t+2)(t+3)}\cdot\frac{n(n+1)}{1.2.3.4}+\dots\\
&+4.3.2\,\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}\cdot\frac{n}{1.2.3.4}\\
&+4.3.2.1\,\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}.
\end{aligned}
$$

Cette expression peut encore se mettre sous la forme

$$
d\quad\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{(m+1)}{(t+1)}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\\
&+\frac{(m+2)}{(t+2)}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)}{(t+2)(t+3)}\cdot\frac{n(n+1)}{1.2}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{(t+2)(t+3)(t+4)}\cdot\frac{n}{1}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}\cdot 1
\end{aligned}
\right\}.
$$

Cette quantité, qui n'a plus que cinq termes différents entre parenthèses, est la somme de la suite (c), qui peut avoir un très-grand nombre de termes, quoique le nombre de ces termes soit limité.

La suite (b) aura pareillement pour somme la quantité

$$
e\quad\frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{1.2\dots t}\cdot\frac{(m+1)}{(t+1)}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)}{1.2.3\dots s}\\
&+\frac{(m+2)}{(t+2)}\cdot\frac{n(n+1)\dots(n+s-2)}{1.2\dots(s-1)}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)}{(t+2)(t+3)}\cdot\frac{n(n+1)\dots(n+s-3)}{1.2.3\dots(s-2)}+\dots\\
&+\frac{(m+2)(m+3)\dots(m+s+1)}{(t+2)(t+3)\dots(t+s+1)}
\end{aligned}
\right\}.
$$

En désignant par $\left(\frac{u}{r}\right)^{\nu}$ la quantité

$$\frac{u(u+1)(u+2)\ldots(u+\nu-1)}{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+\nu)},$$

la quantité précédente pourra se mettre sous la forme

$$(f)\qquad (m-t+1)^{t+1}\cdot\frac{(u)^{t+1}-\left(\frac{m+2}{t+2}\right)^{t+1}}{(u)^{1}-\left(\frac{m+2}{t+2}\right)^{1}},$$

forme symbolique qui met en évidence la loi de la quantité (e).

Si le nombre des boules contenues dans l'urne est infiniment grand ou du moins très-grand, m et n deviennent alors infinis ou très-grands, et la quantité (e) se réduit à

$$(g)\qquad \frac{m^{t+s+1}}{1.2\ldots(t+1)}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.2.3\ldots s}+\frac{1}{(t+2)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(s-1)} \\ +\frac{1}{(t+2)(t+3)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(s-2)} \\ +\frac{1}{(t+2)(t+3)(t+4)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(s-3)}+\ldots \\ +\frac{1}{(t+2)(t+3)\ldots(t+s+1)} \end{array}\right\}.$$

La quantité (B) exprime le nombre total des chances donnant la sortie de t boules blanches et de s boules noires, dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur le nombre des boules blanches et le nombre des boules noires contenues dans l'urne. Dans cette même hypothèse de m et n infinis, cette quantité (B) se réduit à

$$(h)\qquad \frac{(2m)^{t+s+1}}{1.2.3\ldots(t+s+1)}.$$

Le rapport de la quantité (h) à la quantité (g), après avoir fait toutes les réductions, est exprimé par la quantité

$$(i)\qquad \frac{2^{t+s+1}}{1+\frac{t+s+1}{2}+\frac{(t+s)(t+s+1)}{1.2}+\ldots+\frac{(t+s+1)(t+s)(t+s-1)\ldots(t+3)(t+2)}{1.2.3\ldots s}}=p.$$

Ainsi, si, d'une urne contenant un nombre infini de boules blanches et noires, on ne tire au hasard qu'un nombre total de boules égal à $t + s$, et que sur ce nombre total il se trouve t boules blanches et s boules noires, on pourra supposer avec une probabilité égale à $\frac{p-1}{p}$, que le nombre des boules blanches dans l'urne surpasse le nombre de boules noires, ou, ce qui revient au même, on pourra parier contre un adversaire qui prétendrait qu'il y a dans l'urne moins de boules blanches que de boules noires, avec une mise égale à $p - 1$, tandis que celle de cet adversaire serait représentée par l'unité.

Quand $t = s$, on trouve la probabilité un contre un, c'est-à-dire qu'il y a autant à parier pour que contre, que le nombre des boules blanches dans l'urne surpasse le nombre des boules noires.

Pour appliquer cette formule i aux décisions rendues par les jurés, il faut supposer que le nombre de boules sorties de l'urne est égal à 12. On trouvera

	Valeurs de p.	Valeurs de $p-1$
A 7 blanches contre 5 noires.	$\frac{8192}{2380}$	2,442016806
8 blanches contre 4 noires.	$\frac{8192}{1093}$	6,494967978o5
9 blanches contre 3 noires.	$\frac{8192}{378}$	20,6719576719
10 blanches contre 2 noires.	$\frac{8192}{92}$	88,04747826
11 blanches contre 1 noire	$\frac{8192}{14}$	584,1428571
12 blanches.	$\frac{8192}{1}$	8191

Ainsi, a la majorité de 7 voix contre 5, il y a 2,442019806 à parier contre 1, que la décision rendue est conforme à celle que l'on obtiendrait si l'on pouvait réunir en une seule assemblée tous les jurés portés sur la liste générale.

Quand on ignore à quelle majorité une condamnation a eu lieu, mais que l'on sait seulement qu'il a suffi pour faire prononcer cette condamnation de 7 voix contre 5, pour avoir la probabilité de la vérité du jugement, il faut faire la somme de toutes les probabilités données par les majorités qui ont pu entraîner une condamnation, et en prendre la moyenne.

Dans le cas où une condamnation a pu avoir lieu avec une majorité de 7 voix contre 5, on aura

$$\frac{6.8192}{1+14+92+378+1093+2280} - 1 = 11,41839817,$$

c'est-à-dire qu'il y a 11,41839817 à parier contre 1, que la décision est conforme à celle que l'on obtiendrait en réunissant tous les jurés.

Si l'on ignore toujours à quelle majorité une décision a été rendue, mais s'il a suffi pour faire prononcer une condamnation d'une majorité de 8 voix contre 4, on aura la probabilité

$$25,27376428;$$

s'il a suffi d'une majorité de 9 voix contre 3, on aura la probabilité

$$66,5628866.$$

De même, pour un acquittement, il faut prendre la moyenne de toutes les probabilités données par toutes les décisions qui ont pu entraîner cet acquittement.

S'il faut 7 voix contre 5 pour faire prononcer une condamnation, la probabilité de la vérité d'un acquittement sera

$$\frac{7.8192}{1+14+92+398+1093+2380+4096} - 1 = 6,1199404229.$$

Avec 8 voix contre 4, la probabilité de la vérité d'un acquittement sera

$$5,2814409.$$

Enfin, avec 9 voix contre 3 pour une condamnation, la probabilité d'un acquittement sera

$$5,33210412.$$

NOTE

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES

DES COURBES ALGÉBRIQUES;

Par M. COSTE,

Capitaine d'Artillerie.

Dans cette Note, nous ne parlons que des points doubles et des points multiples des courbes algébriques; nous ne nous proposons pas de traiter à fond cette question, nous voulons seulement montrer quelques erreurs dans lesquelles peut conduire un certain genre de démonstration employé quelquefois dans l'étude des courbes.

Nous prendrons notre exemple dans l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, par Gabriel Cramer (Genève, 1750), ouvrage qui mérite à juste titre l'estime des géomètres; et c'est aussi, à cause de ce mérite, qu'il est nécessaire de relever le petit nombre d'erreurs qui peuvent s'y être glissées.

« De ce qu'une droite ne peut couper une courbe de $\nu^{ième}$ degré » en plus de ν points, il s'ensuit (suivant Cramer) qu'une courbe du » troisième ordre n'a qu'un point double, qu'une courbe de l'ordre » ν n'a qu'un point multiple de l'ordre $\nu - 1$. Il s'ensuit qu'une » courbe de l'ordre $2\nu - 1$ ne peut avoir à la fois deux points multiples de l'ordre ν.

» Si l'on considère, que l'on peut toujours faire passer une courbe » du deuxième ordre par cinq points donnés, et qu'une courbe de » deuxième ordre ne peut rencontrer une courbe de l'ordre ν en plus

» de 2ν points, on conclura qu'une courbe de l'ordre ν ne peut avoir » cinq points dont les degrés de multiplicité fassent ensemble plus » de 2ν unités, d'où il suit *qu'une courbe du quatrième ordre ne peut* » *avoir quatre points doubles*. Car la courbe du deuxième ordre, qui » passerait par ses quatre points doubles et par un cinquième point » simple de la courbe du quatrième ordre, serait censée la rencontrer » neuf fois; ce qui est impossible, puisqu'elle ne peut la rencontrer » qu'en huit points.

» Par la même raison, une courbe du cinquième ordre, qui ne peut » avoir qu'un point triple, ne peut avoir, avec ce point triple, *plus de* » *trois points doubles*.

» Une courbe du sixième ordre *ne peut avoir quatre points triples*, » ni même trois points triples et deux points doubles. Une courbe du » septième ordre ne peut avoir cinq points triples, ni un point qua- » druple avec trois points triples et quelque autre point multiple, etc. »

Ce passage suffit pour montrer la méthode que Cramer a suivie pour trouver le nombre des points multiples qu'une courbe algébrique peut avoir; nous avons écrit en italique quelques endroits dans lesquels se trouvent des erreurs.

Suivant Cramer, une courbe du quatrième ordre ne peut avoir en même temps quatre points doubles.

Pour montrer l'inexactitude de cette assertion, prenons une courbe du second degré, une ellipse réelle, ayant toutes ses coordonnées positives, et qui soit telle qu'elle soit tangente à la fois à l'axe des ordonnées et à l'axe des abscisses.

Pour remplir cette condition, l'équation de cette ellipse doit être telle, qu'en faisant $x=0$ on ait pour y deux valeurs égales, et qu'en faisant $y=0$ on ait aussi pour x deux valeurs égales.

Si, dans l'équation de cette ellipse, on met à la place de x la quantité x^2, et à la place de y la quantité y^2, on trouvera l'équation d'une courbe du quatrième degré qui aura quatre points doubles situés sur les axes des coordonnées.

L'équation de l'ellipse

$$y^2 - 2y + 16x^2 - 8x + 1 = 0$$

est un cas particulier qui remplit les conditions voulues.

Si l'on change dans cette équation x en x^2, et y en y^2, on a l'équation

$$y^4 - 2y^2 + 16x^4 - 8x^2 + 1 = 0,$$

qui représente une courbe du quatrième degré qui a quatre points doubles ; deux se trouvent sur l'axe des ordonnées aux deux distances ± 1, et deux sur l'axe des abscisses aux deux distances $\pm \frac{1}{2}$.

Une courbe du quatrième degré, ayant déjà quatre points doubles, peut être disposée dans la région des coordonnées positives, de manière à toucher, en deux points l'axe des ordonnées, et en deux autres points l'axe des abscisses. Ce qui revient au même, l'équation d'une courbe du quatrième degré ayant déjà quatre points doubles, peut être transformée, en changeant l'origine des coordonnées, en une autre équation qui, par l'hypothèse de $x = 0$, donne pour y deux couples de valeurs égales, et par l'hypothèse de $y = 0$ présente aussi pour x deux couples de valeurs égales.

Une fois que l'on aura trouvé une équation du quatrième degré remplissant ces conditions, il suffira d'y changer y en y^2, et x en x^2, pour avoir une courbe du huitième degré qui aura : huit points doubles situés sur les axes des coordonnées, et seize points doubles en dehors des axes des coordonnées, en tout vingt-quatre points doubles.

Une courbe du huitième degré pouvant avoir vingt-quatre points doubles, on trouvera de même qu'une courbe du seizième ordre pourra avoir cent douze points doubles, savoir, seize points doubles situés sur les axes des coordonnées, et quatre-vingt-seize points doubles en dehors des axes des coordonnées.

La partie réelle des courbes du quatrième ordre se présentant assez souvent sous forme de quatre ovales séparés, on pouvait prévoir que ces quatre ovales pourraient se toucher mutuellement deux à deux, et donner lieu à quatre points doubles.

La partie réelle des courbes du sixième ordre peut être présentée aussi quelquefois par neuf ovales rangés sur trois rangs, qui, en venant se toucher mutuellement deux à deux et tous ensemble, peuvent donner lieu à douze points doubles.

La partie réelle des courbes du huitième ordre peut s'offrir sous la forme de seize ovales séparés sur quatre rangs, qui, en se touchant mutuellement deux à deux, peuvent donner lieu à vingt-quatre points doubles.

En continuant de même, on verra que le nombre des points doubles que peut avoir une courbe de l'ordre 2ν, peut s'élever à un nombre représenté par la quantité $2\nu(\nu-1)$.

De même qu'une courbe de l'ordre ν, en mettant y^2 à la place de y, et x^2 à la place de x, peut donner une courbe de l'ordre 2ν; de même une courbe de l'ordre 2ν, qui ne contient que des puissances paires de x et de y, peut se réduire à une courbe de l'ordre ν, si l'on remplace y^2 par y, et x^2 par x.

Le nombre possible des points doubles de la courbe de l'ordre ν pourra donc se déduire du nombre possible des points doubles de la courbe de l'ordre 2ν. Si l'on désigne par M le nombre des points doubles de la courbe de l'ordre ν, et si l'on représente par N le nombre total des points doubles de la courbe de l'ordre 2ν, et par T le nombre des points doubles de la même courbe qui se trouvent sur les axes des coordonnées, on aura la relation

$$\mathrm{N}-\mathrm{T}=4\mathrm{M}.$$

Cette relation a lieu, soit que ν soit pair, soit qu'il soit impair.

Supposons ν impair, et de la forme $2\nu'+1$. La courbe de l'ordre $4\nu'+2$ pourra avoir $(8\nu'^2+4\nu')$ points doubles, parce qu'elle pourra avoir $(2\nu'+1)^2$ ovales séparés, rangés sur $(2\nu'+1)$ rangs. N sera donc égal à $8\nu'^2+4\nu'$.

Parmi les $(2\nu'+1)^2$ ovales séparés, rangés sur $(2\nu'+1)$ rangs, les deux rangées du milieu, partagées par les deux axes des coordonnées, pourront offrir chacune $2\nu'$ points doubles. Par conséquent la courbe de l'ordre $4\nu'+2$ pourra avoir $4\nu'$ points doubles situés sur les axes des coordonnées. $4\nu'$ sera donc la valeur de T. Mettant N et T dans la relation précédente, on tirera M égale $2\nu'^2$. Cette formule n'est vraie que quand ν' est >1.

D'où l'on conclura qu'une courbe d'un ordre impair $2\nu'+1$ ne pourra avoir plus de $2\nu'^2$ points doubles.

Par la méthode des ovales séparés, on prouvera encore que, si dans une courbe de l'ordre 2ν en x, les termes contenant y ne sont que de l'ordre $2s$ au plus, le nombre des points doubles, que cette courbe pourra avoir, ne pourra pas être plus grand que

$$2s\nu - s - \nu.$$

Si, dans une équation de l'ordre $2\nu + 1$ en x, les termes contenant y ne s'élèvent qu'à l'ordre $2s + 1$, le nombre des points doubles de la courbe représentée par cette équation ne surpassera jamais $2s\nu$, ν et s étant > 1.

Dans une équation de l'ordre 2ν en x, si les termes contenant y ne sont que de l'ordre $2s + 1$ au plus, le nombre des points doubles de la courbe représentée par cette équation ne dépassera jamais

$$2s\nu - s.$$

D'après la méthode de Cramer, le nombre des points doubles d'une courbe de l'ordre 2ν ne pourrait s'élever qu'à $(2\nu - 1)(\nu - 1)$, et le nombre des points doubles d'une courbe de l'ordre $2\nu + 1$ à la quantité $\nu(2\nu + 1)$.

Un point triple se forme par la réunion de trois points doubles;

Un point quadruple se forme par la réunion de six points doubles;

Un point quintuple se forme par la réunion de dix points doubles;

Enfin un point de l'ordre ν est produit par la réunion d'un nombre de points doubles égal à $\frac{\nu(\nu - 1)}{2}$.

D'après cela, une courbe du huitième ordre pourrait peut-être avoir quatre points quadruples ou huit points triples. Pour être sûr qu'il existe des courbes du huitième degré qui ont huit points triples ou quatre points quadruples, il faut en prouver l'existence par d'autres considérations, ou bien il faut trouver une équation particulière du huitième degré qui donne une courbe qui ait quatre points quadruples ou huit points triples.

Cette remarque s'applique à tous les cas que l'on peut découvrir soit par la méthode de Cramer, soit par la méthode que nous avons présentée ci-dessus. Ces méthodes ne donnent pas de preuves d'existence, mais des possibilités ou des probabilités d'existence; elles ne sont en définitive que des limites.

Un point sextuple équivalant à quinze points doubles, une courbe de huitième ordre ne peut avoir à la fois qu'un point sextuple et neuf points doubles, et non un point sextuple et quinze points doubles, comme l'indique Cramer dans le tableau des points multiples que peut avoir une courbe du huitième degré.

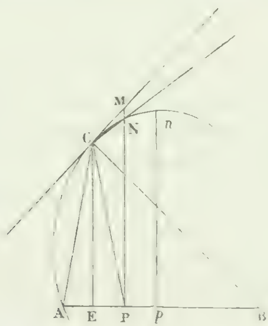
Dans le même tableau, Cramer indique qu'une courbe du huitième ordre peut avoir à la fois un point quintuple, trois points triples et huit points doubles; et d'après le nombre des points doubles nécessaires pour former un point quintuple et un point triple, une courbe du huitième ordre ne peut avoir à la fois qu'un point quintuple, trois points triples et cinq points doubles.

On voit que Cramer ignorait aussi à combien de points doubles était équivalent un point multiple de l'ordre ν; équivalence qui se conclut de la similitude des branches de courbes avec des droites qui se coupent dans un même plan.

Sur l'ellipse de plus petite surface qui passe par trois points A, B, C, *et sur l'ellipsoïde de plus petit volume qui passe par quatre points* A, B, C, D;

Par J. LIOUVILLE.

Je dis que la tangente au point C de l'ellipse dont il s'agit est parallèle à AB. Supposons, en effet, que le contraire ait lieu et que la tangente CM soit placée comme l'indique la figure. Menons CE perpendi-



culaire sur AB. L'angle MCE étant obtus, si l'on prend parallelement à CE une droite MNP très-voisine de CE et qu'on tire la corde CN, on pourra faire en sorte que l'angle NCP soit aussi obtus. On aura dès lors CP $<$ NP. Cela posé, inclinons toutes les ordonnées (NP, np, etc.) de l'ellipse, actuellement perpendiculaires à AB, en les faisant tourner autour de leurs pieds (P, p, etc.) de manière à les rendre parallèles à la droite CP; en même temps, diminuons-les dans le rapport constant de

CP à NP. L'ancienne ellipse se transformera ainsi dans une autre ellipse passant encore par les points A, B et aussi par le point C, où se transportera le point N de l'ellipse primitive. Or l'aire de la nouvelle ellipse est plus petite que celle de l'ancienne; en inclinant les ordonnées on change, en effet, les rectangles infinitésimaux dont se compose l'aire primitive, en parallélogrammes dont la base est la même et la hauteur moindre dans le rapport du sinus de l'angle CPA à l'unité; en diminuant ensuite les ordonnées, on diminue également les parallélogrammes dont il s'agit. La nouvelle ellipse ayant ainsi une aire moindre que l'ancienne, celle-ci n'était pas la plus petite possible. Donc, etc.

La tangente à l'ellipse *minimum* en chacun des sommets du triangle ABC étant, d'après ce qu'on vient de voir, parallèle à la corde qui forme le côté opposé, le centre de cette ellipse doit se trouver à la fois sur les trois droites qui joignent les sommets dont il s'agit aux milieux des côtés opposés. En d'autres termes, il doit coïncider avec le centre de gravité du triangle ABC.

Ces résultats s'accordent avec ceux qu'Euler a déduits de l'analyse dans les *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, et que d'autres auteurs ont ensuite obtenus par différents moyens. La méthode que nous avons suivie pourrait servir à résoudre des problèmes analogues pour certaines courbes de degré supérieur. Il est clair aussi qu'elle s'étend à la détermination de l'ellipsoïde *minimum* passant par quatre points donnés. Les plans tangents à cet ellipsoïde aux quatre sommets du tétraèdre ABCD doivent être parallèles aux faces opposées; son centre doit par suite coïncider avec le centre de gravité du tétraèdre.

DU JEU DE LOTO [*];

PAR M. DU HAYS.

Quoique tout le monde connaisse le *loto*, il ne paraît pas qu'on se soit encore occupé de l'analyse mathématique de ce jeu. M. P.-N. Huyn, auteur d'une brochure, publiée en 1788, intitulée : *La Théorie des jeux de hasard*, parle bien du *loto*; mais il expose, sous cette dénomination, les principes de la *Loterie royale de France*, récemment supprimée, et non ceux du véritable jeu de *loto*.

Ce jeu, de hasard pur, est composé des 90 premiers numéros de la suite des nombres naturels. Ces numéros sont rangés sur des tableaux qui offrent tous 9 colonnes verticales de 3 cases, ou, ce qui revient au même, 3 bandes horizontales de 9 cases chacune. Sur chaque bande sont inscrits 5 numéros qui forment un *quine*. Il résulte de cette disposition que chaque tableau contient 15 numéros, et qu'il faut 6 tableaux, ou 18 bandes, pour épuiser les 90 numéros du jeu sans en répeter aucun. Chaque série de 6 tableaux se distingue par une couleur particulière, et un jeu se compose d'un plus ou moins grand nombre de ces séries ou couleurs : jamais un quine quelconque ne doit être répété dans un même jeu.

La première colonne des séries de tableaux est consacrée aux nombres d'un seul chiffre et comprend 9 numéros et 9 cases vides. Les deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième et

[*] Il existe un autre jeu, nommé le *loto-dauphin*, beaucoup moins simple que le *loto* ordinaire, et dans lequel toutes les combinaisons sont formées par les joueurs eux-mêmes. Le nombre de ces combinaisons est bien plus grand encore que celui des combinaisons de l'autre *loto*, le seul dont il s'agisse ici.

huitième colonnes sont chacune consacrées à un ordre spécial de dixaines, et comprennent aussi chacune 10 numéros et 8 cases vides. La neuvième et dernière colonne, à cause du n° 90 qui s'y trouve placé avec les nombres de 8 dixaines, contient 11 numéros et 7 cases vides. Il eût été beaucoup plus régulier, et préférable peut-être, de remplacer le n° 90 par un zéro mis dans la première colonne; mais le jeu s'est établi autrement, et on n'a plus maintenant à examiner ce point.

On voit par ce qui précède que les quines se forment de l'arrangement des 9 colonnes prises 5 à 5, et de la combinaison entre eux des numéros de ces diverses colonnes : les colonnes fournissent

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126$$

combinaisons différentes. Celles de ces combinaisons où n'entrent ni la première ni la dernière colonne, donnent

$$\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} \times 10^5 = 21.10^5 = 2,100,000 \text{ quines};$$

celles où entre la première colonne sans la dernière, donnent

$$\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} \times 9 \times 10^4 = 35.9.10^4 = 3,150,000 \text{ quines};$$

celles où entre la dernière colonne sans la première, donnent

$$35.11.10^4 = 3,850,000 \text{ quines};$$

enfin, celles où entrent à la fois la première et la dernière colonne, donnent

$$\frac{7.6.5}{1.2.3} \times 9 \times 11 \times 10^3 = 35.9.11.10^3 = 3,465,000 \text{ quines différents};$$

en tout 12,565,000 quines possibles. Or comme chaque série ou couleur de 6 tableaux comprend 18 quines, il faudrait

$$\frac{12,565,000}{18} = 698,055\tfrac{5}{9}$$

séries pour les épuiser en totalité.

On peut réduire ces nombres immenses de quines et de séries en imposant à leur formation diverses conditions simultanées : comme, par exemple, qu'une bande ne présente jamais deux cases vides contigues, ni plus de 2 numéros attenants; qu'il n'y ait jamais moins d'un numéro, ni plus de 2, dans chaque colonne d'un tableau; qu'un même arrangement de numéros sur un tableau ne se montre pas plusieurs fois dans une même série, et que tous les quines soient composés de numéros alternativement pairs et impairs. On verra plus bas que cette dernière condition ne saurait s'adjoindre aux autres qu'autant que le nº 90, pris hors de ligne et composé d'un nombre impair de dixaines, soit employé comme s'il était un nombre véritablement impair.

La combinaison unique des première, troisième, cinquième, septième et neuvième colonnes, ou colonnes de rangs impairs, fournit tous les quines d'une première espèce, ceux qui n'ont aucun de leurs numéros contigus. Les quines qui ne comprennent qu'un seul groupe de 2 numéros attenants, renferment la seconde et la troisième espèce : dans celle-ci les bandes commencent par un numéro et finissent par une case vide; dans l'autre, au contraire, elles commencent par une case vide et finissent par un numéro. On verra encore ci-après qu'en plaçant un quine de la première espèce dans chaque tableau, il faut de nécessité absolue, pour compléter les séries, avec les conditions données, employer la quatrième espèce de combinaisons de colonnes possible, celle qui fournit les quines composés d'un numéro isolé et de 2 groupes de 2 numéros contigus.

Les bandes provenant de cette dernière espèce de combinaisons de colonnes commencent et finissent toujours par des cases vides, elles ne peuvent donc fournir aucun numéro aux première et dernière colonnes : ces numéros doivent donc venir des trois autres espèces de combinaisons. De plus, les bandes de la quatrième espèce ayant toutes un numéro à la cinquième case, on ne peut en adjoindre qu'une seule par tableau à la bande de la première espèce qui doit se trouver dans chacun d'eux; autrement la cinquième case du tableau contiendrait 3 numéros. On ne peut pas non plus placer 2 bandes de la première espèce dans un même tableau, autrement encore il se trouverait, à cause de la bande de deuxième ou de troisième espèce qui doit y être placée, soit dans la dernière, soit dans la première colonne, 3 numéros. Par un semblable motif, on ne saurait y avoir 2 bandes de l'une ou de l'autre de ces dernières espèces. En général, il ne peut donc entrer 2 bandes de même espèce dans un même tableau.

Les deuxième et troisième espèces d'arrangements de colonnes sont susceptibles chacune de 4 combinaisons; mais il en est 2 de chaque espece qui ont aussi des numéros dans la cinquième colonne, et qui, par cette raison, doivent être exclues, puisqu'elles ne peuvent être jointes dans les tableaux à aucune des autres combinaisons. De même, la quatrième espèce d'arrangements de colonnes est susceptible de 3 combinaisons différentes, mais l'une d'elles ne saurait non plus s'associer aux autres. Il ne résulte donc d'utile, des 4 espèces d'arrangements de colonnes, que les 7 combinaisons suivantes de numéros dans les bandes.

Bandes à numéros alternatifs....	1re espèce	$\times.o.\times.o.\times.o.\times.o.\times\ldots a;$
Bandes à un seul groupe de 2 numeros contigus..............	2e espèce	$o.\times.o.\times.o.\times.o.\times.\times\ldots b,$ $o.\times.o.\times.o.\times.\times.o.\times\ldots b';$
	3e espèce	$\times.o.\times.\times.o.\times.o.\times.o\ldots c,$ $\times.\times.o.\times.o.\times.o.\times.o\ldots c';$
Bandes à 2 groupes de numéros contigus....................	4e espèce	$o.\times.o.\times.\times.\times.o.\times.o\ldots d,$ $o.\times.\times.o.\times.o.\times.\times.o\ldots d'.$

Les zéros indiquent les cases vides, les signes $\times$ les numéros, et les lettres sont les indices des diverses sortes de bandes. Les bandes distribuent les numéros dans les colonnes de toutes les séries ou couleurs de tableaux, de la manière suivante.

	COLONNES								
	1re.	2e.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e	8e.	9e.
6 bandes a...........	6	0	6	0	6	0	6	0	6 numéros.
5 bandes b, b'.........	0	5	0	5	0	5	2	3	5 numéros.
3 bandes c, c'........	3	1	2	3	0	3	0	3	0 numero.
4 bandes d, d'........	0	4	2	2	4	2	2	4	0 numero.
18 bandes.	9	10	10	10	10	10	10	10	11 numeros.

En effet, chaque série devant se composer d'abord de 6 bandes a, une par tableau, les 5 numéros manquant dans la dernière colonne ne peuvent provenir que de 5 bandes b et b', et les 3 manquant dans la première, que de 3 bandes c et c'. De plus, les première et derniere colonnes étant complètes, les 4 numéros à mettre encore dans la cinquième ne peuvent être fournis que par 4 bandes d et d'. Mais les 3 numéros manquant dans la huitième colonne ne peuvent provenir que de 3 bandes b, et celui qui manque dans la deuxième colonne ne saurait provenir que de la bande c': il y aura donc dans chaque série, outre les 6 bandes a, 3 bandes b, 2 bandes b', 2 bandes c, et une bande c'. Enfin, les 2 numéros manquant encore dans chacune des septieme et troisième colonnes, ne sauraient provenir que de 2 bandes d, et de 2 bandes d'.

Les bandes b et b' combinées avec les bandes c et c' et avec les bandes d et d', ainsi que les bandes c et c' avec les bandes d et d', donnent 12 combinaisons, dont 2, cd' et $b'd$, qui ont 2 numéros, la premiere dans la troisième colonne et la seconde dans la septieme, ne sauraient etre jointes à la bande a pour former un tableau. Une troisieme de ces combinaisons, $c'd'$, ne saurait non plus être admise dans une série sans empecher d'y employer les 3 bandes b et les 2 bandes b' qui doivent y entrer: elle doit donc être aussi négligée. Si l'on réunit maintenant les 9 autres combinaisons à la bande a pour en former des types de tableaux et des séries de tableaux, on trouve que, la bande c' ne pouvant entrer qu'une seule fois dans chaque type de séries, et ne pouvant se joindre qu'aux trois bandes b, b' et d, on ne peut obtenir que 3 différents types que voici.

	TYPES DES SÉRIES.				TYPES DES SÉRIES.		
	1er.	2e.	3e		1re	2e.	3e
1er tableau	a b c	a b c	a b c	4e tableau......	a b' c'	a b' d	a b c
2e tableau.......	a b d	a b d	a b d	5e tableau....	a b' d'	a b c	a b d
3e tableau.......	a b d'	a b d'	a b d'	6e tableau....	a c d	a c' d	a c d

Les bandes a, b', c, d et d' sont en nombres pairs dans les 3 types de séries de tableaux. Il s'ensuit qu'en les commençant alternativement par des numéros impairs et par des numéros pairs, elles en absorberont un égal nombre de chaque sorte. La même chose aura lieu pour 2 des bandes b; mais la troisième devra compenser la bande c', et comme celle-ci a un numéro dans la première colonne qui renferme 4 numéros pairs et 5 numéros impairs, cette bande c' devra toujours commencer par un numéro impair, et les numéros des deuxième, sixième et neuvième cases de la bande isolée b devront par suite être aussi impairs. Il faudrait donc dans ces 2 bandes 6 numéros impairs et 4 numéros pairs; mais il n'en reste que 5 de chaque sorte à placer, et c'est pour pourvoir à cette exigence que le n° 90 doit être employé comme s'il était un numéro impair, et que 2 des bandes b, sur 3, devront toujours aussi commencer par des numéros impairs.

Les tableaux dont la disposition remplit les conditions imposées s'éloignent peu de ceux des jeux de *loto* ordinaires, seulement les numéros y sont distribués avec plus de régularité. On s'en convaincra en jetant les yeux sur les trois exemples suivants, fournis par les trois différents types qui précèdent.

TABLEAUX DE LOTO.

Première couleur.

$$1^{\text{er}}\text{ tableau}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a = 4.0.23.0.46.0.61.0.88, \\ b = 0.19.0.30.0.55.0.72.90, \\ c = 8.0.27.34.0.53.0.74.0; \end{array}\right.$$

$$2^{\text{e}}\text{ tableau}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a = 9.0.20.0.43.0.66.0.81, \\ b = 0.12.0.37.0.52.0.75.84, \\ d = 0.15.0.36.49.0.60.71.0; \end{array}\right.$$

$$3^{\text{e}}\text{ tableau}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a = 6.0.21.0.48.0.63.0.80, \\ b = 0.13.0.32.0.57.0.76.85, \\ d' = 0.10.29.0.42.51.0.78.0; \end{array}\right.$$

$$4^{\text{e}}\text{ tableau}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a = 5.0.28.0.41.0.64.0.87, \\ b' = 0.14.0.33.0.56.69.0.82, \\ c' = 1.16.0.35.0.50.0.77.0; \end{array}\right.$$

$$5^{\text{e}}\text{ tableau}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a = 2.0.25.0.40.0.67.0.86, \\ b' = 0.17.0.38.0.59.62.0.83, \\ d' = 0.11.24.0.47.54.0.73.0; \end{array}\right.$$

$$6^{\text{e}}\text{ tableau}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a = 3.0.22.0.45.0.68.0.89; \\ c = 7.0.26.31.0.58.0.79.0, \\ d = 0.18.0.39.44.0.65.70.0. \end{array}\right.$$

Deuxième couleur.

$$1^{\text{er}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 7.0.20.0.45.0.68.0.83, \\ b = 0.12.0.39.0.52.0.77.88, \\ c = 1.0.24.37.0.58.0.71.0; \end{array}\right.$$

$$2^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 2.0.21.0.48.0.65.0.86, \\ b = 0.19.0.38.0.59.0.78.90, \\ d = 0.15.0.32.49.0.64.73.0; \end{array}\right.$$

$$3^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 5.0.28.0.41.0.66.0.89, \\ b = 0.17.0.30.0.53.0.72.85, \\ d' = 0.14.27.0.42.51.0.76.0; \end{array}\right.$$

$$4^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 6.0.23.0.46.0.69.0.82, \\ b' = 0.11.0.34.0.55.62.0.87, \\ d' = 0.13.22.0.47.54.0.79.0; \end{array}\right.$$

$$5^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 3.0.26.0.43.0.60.0.81, \\ b' = 0.10.0.35.0.50.61.0.80, \\ c = 4.0.29.36.0.57.0.74.0; \end{array}\right.$$

$$6^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 8.0.25.0.40.0.63.0.84, \\ c' = 9.16.0.31.0.56.0.75.0, \\ d = 0.18.0.33.44.0.67.70.0. \end{array}\right.$$

Troisième couleur.

$$1^{\text{er}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 1.0.22.0.43.0.64.0.85, \\ b = 0.14.0.33.0.56.0.77.82, \\ c' = 7.18.0.35.0.50.0.71.0; \end{array}\right.$$

$$2^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 8.0.25.0.46.0.67.0.80, \\ b = 0.11.0.30.0.55.0.72.83, \\ d = 0.16.0.39.42.0.61.76.0; \end{array}\right.$$

$$3^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 5.0.26.0.47.0.68.0.89, \\ b = 0.15.0.38.0.57.0.78.81, \\ d' = 0.12.29.0.48.53.0.74.0; \end{array}\right.$$

$$4^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 2.0.23.0.44.0.65.0.86, \\ b' = 0.10.0.31.0.54.63.0.88, \\ c = 3.0.24.37.0.52.0.79.0; \end{array}\right.$$

$$5^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 9.0.20.0.49.0.62.0.90, \\ b' = 0.17.0.34.0.59.60.0.87, \\ d' = 0.19.28.0.41.58.0.75.0; \end{array}\right.$$

$$6^{\text{e}}\ \text{tableau} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} a = 4.0.21.0.40.0.69.0.84, \\ c = 6.0.27.32.0.51.0.70.0, \\ d = 0.13.0.36.45.0.66.73.0. \end{array}\right.$$

Il convient donc qu'un jeu de *loto* établi sur ces bases, soit composé de 3, 6, 9, 12,..., $3n$ différentes séries ou couleurs de tableaux.

La combinaison de colonnes, désignée par c', qui est unique et dont le premier numéro est toujours impair, exceptée, les six autres peuvent commencer toutes successivement par des numéros impairs et par des numéros pairs, et donner avec la première 13 arrangements, qui, en prenant comme il a été dit le n° 90 pour impair, fournissent 41,250 quines, savoir :

Le premier numéro de la bande étant impair.

3 bandes	a ..	$6.5^4 = 3750$ quines,	suffisant à $\frac{3750}{3}$	$= 1250$ séries.
2 bandes	b...	$6.5^4 = 3750$ quines,	suffisant à $\frac{3750}{2}$	$= 1875$ séries;
1 bande	b'...	$6.5^4 = 3750$ quines,	suffisant à........	3750 séries;
1 bande	c ...	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries;
1 bande	c' ..	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries;
1 bande	d...	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries;
1 bande	d' ..	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries.

Le premier numéro de la bande étant pair.

3 bandes	a ..	$4.5^4 = 2500$ quines,	suffisant à $\frac{2500}{3}$	$= 833\frac{1}{3}$ séries.
1 bande	b...	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries;
1 bande	b'..	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries;
1 bande	c...	$4.5^4 = 2500$ quines,	suffisant à........	2500 séries;
1 bande	d...	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries;
1 bande	d' ..	$5^5 = 3125$ quines,	suffisant à........	3125 séries.
18 bandes.		41250 quines.		

Or, les quines résultant de la bande a, commençant par un numéro pair, se trouvant tous absorbés par $\frac{2500}{3} = 833\frac{1}{3}$ séries, tandis que ceux résultant de la bande b', commençant par un numéro impair, suffiraient pour 3750 séries, on en conclut qu'il n'y a que 833 séries de tableaux complètes possibles, et qu'il y a en outre 2917 fragments de séries, dans les 41,250 quines différents que peut produire l'hypothèse dont on s'occupe.

Soit maintenant x le nombre de numéros à tirer pour qu'on puisse espérer d'obtenir, dans une bande déterminée, un *extrait*, un *ambe*, un *terne*, un *quaterne* ou un *quine;* sa valeur sera [*], pour un extrait,

$$\frac{90}{5} = 18 = x \text{ numéros à tirer};$$

pour un ambe,

$$\frac{90.89}{5.4} = \frac{801}{2} = \frac{x(x-1)}{1.2}, \quad \text{et} \quad x = 28,3 \text{ numéros à tirer};$$

pour un terne,

$$\frac{90.89.88}{5.4.3} = 11,748 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}, \quad x = 42,3 \text{ numéros à tirer};$$

pour un quaterne,

$$\frac{90.89.88.87}{5.4.3.2} = 511,038 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4.5}, \quad x = 60,7 \text{ numéros à tirer};$$

pour un quine,

$$\frac{90.89.88.87.86}{5.4.3.2.1} = 43,949,268 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}, \quad x = 90 \ \textit{id.}$$

Pour cette dernière chance, qui est unique, on devra tirer les 90 numéros; mais alors la probabilité devient une certitude.

S'il s'agissait de trouver le nombre x de numéros à tirer pour avoir la probabilité d'obtenir les mêmes chances, dans un tableau composé de trois bandes, on aurait:
pour un extrait,

$$\frac{90}{3.5} = 6 = x \text{ numéros à tirer};$$

pour un ambe,

$$\frac{90.89}{3.5.4} = \frac{267}{2} = \frac{x(x-1)}{1.2}, \quad \text{et} \quad x = 16,3 \text{ numeros à tirer};$$

---

[*] Il est facile d'apercevoir que la résolution par approximation des équations numériques de la forme de celles qui s'offrent ici (et en général de la forme

$$x(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \ldots (x \pm h) \ldots (x \pm m)(x \pm n) = A,$$

pour un terne,

$$\frac{90.89.88}{3.5.4.3} = 3916 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}, \quad x = 29,7 \text{ numéros à tirer:}$$

pour un quaterne,

$$\frac{90.89.88.87}{3.5.4.3.2} = 170,346 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}, \quad x = 46,5 \text{ numéros à tirer;}$$

pour un quine,

$$\frac{90.89.88.87.86}{3.5.4.3.2.1} = 14,649,756 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}, \quad x = 72,6 \quad id.$$

---

et il s'en présente souvent dans les calculs, quel que soit d'ailleurs le nombre r des facteurs du premier membre, ou degré de l'équation), est des plus simples et des plus promptes, au moyen de l'emploi des logarithmes. Lorsque les nombres $a, b, c, \ldots, h, \ldots, m$ et n sont petits comparativement à x, comme dans le cas actuel, la valeur du facteur moyen $x \pm h$ diffère peu de la quantité $\sqrt[r]{\mathrm{A}}$ et l'on peut prendre $\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h$ pour première valeur approchée de x. Des valeurs de plus en plus approchées s'obtiendront alors par les méthodes ordinaires: nommant donc z, z', z'', z''', etc., les nombres à ajouter à la première valeur pour obtenir les suivantes; D, D′, D″, etc., les différences obtenues par leurs substitutions successives dans l'équation, et P, Q, R, ..., T, etc., la somme des quantités $a, b, c, \ldots, h, \ldots, m$ et n; celles de leurs produits multipliés 2 à 2, puis 3 à 3, puis 4 à 4, ainsi de suite, on aura

$$z = \frac{\mathrm{D}}{r(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h)^{r-1} + \mathrm{P}(r-1)(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h)^{r-2} + \ldots + 2\mathrm{T}(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h)},$$

$$z' = \frac{\mathrm{D}'}{r(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h + z)^{r-1} + \ldots\ldots + 2\mathrm{T}(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h + z)},$$

$$z'' = \frac{\mathrm{D}''}{r(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h + z + z')^{r-1} + \ldots\ldots + 2\mathrm{T}(\sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h + z + z')},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$x = \sqrt[r]{\mathrm{A}} \mp h + z + z' + z'' + z''' + \ldots \text{ etc.}$$

Si l'on voulait le même nombre x pour une réunion de deux tableaux, on trouverait qu'il y aurait à tirer :
pour un extrait,

$$\frac{18}{6} = 3 = x \text{ numéros à tirer;}$$

pour un ambe,

$$\frac{801}{2.6} = \frac{267}{4} = \frac{x(x-1)}{1.2}, \quad \text{et} \quad x = 11.6 \text{ numéros à tirer :}$$

pour un terne,

$$\frac{11.748}{6} = 1958 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}, \quad x = 23,7 \text{ numéros à tirer;}$$

pour un quaterne,

$$\frac{511,038}{6} = 85.173 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}, \quad x = 39,3 \text{ numéros à tirer:}$$

pour un quine,

$$\frac{43,949,268}{6} = 7,324,878 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}, \quad x = 63.5 \quad \textit{id.}$$

On calculerait de la même manière le nombre de numéros à tirer, dans le cas où l'on aurait plus de deux tableaux.

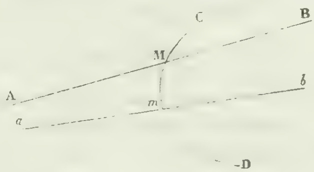
SUR

LES SURFACES RÉGLÉES DONT L'AIRE EST UN MINIMUM;

PAR E. CATALAN.

PROBLÈME. *Quelles sont, parmi les surfaces réglées, celles dont l'aire est un minimum, ou (ce qui revient au même) dont les deux rayons de courbure principaux sont, en chaque point, égaux entre eux et de signes contraires?*

1. Soit ab une position quelconque de la génératrice rectiligne. Me-



nons, par le point m, un plan perpendiculaire à ab: ce plan, normal à la surface, la coupera suivant une courbe CD.

La somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires doit être nulle; par suite, le rayon de courbure de la section CD, au point m, doit être infini.

Nous chercherons donc la valeur du rayon de courbure pour un point quelconque M de CD, et nous exprimerons que ce rayon devient infini quand le point M coïncide avec m.

2. Soient X, Y, Z les coordonnées de M, et x, y, z celles de m. En

désignant par R le rayon de courbure en M, on a généralement

$$R = \frac{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)^{\frac{3}{2}}}{[(dX\,d^2Y - dY\,d^2X)^2 + (dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y)^2 + (dZ\,d^2X - dX\,d^2Z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Représentons par dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z ce que deviennent les quantités analogues quand on remplace, dans ces dernières, X, Y, Z par x, y, z. Il faudra, puisque R doit être infini au point m, que l'on ait

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 0, \quad dy\,d^2z - dz\,d^2y = 0, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = 0.$$

Dans ces trois équations, qui n'équivalent qu'à deux distinctes, les quantités affectées de la caractéristique d ne sont pas de véritables différentielles : ce sont des fonctions inconnues d'un certain paramètre. Par exemple, d^2x n'est en aucune manière la différentielle de dx.

3. Les équations d'une génératrice quelconque AB sont

$$(1) \qquad X = AZ + P,$$

$$(2) \qquad Y = BZ + Q;$$

A, B, P, Q étant des fonctions d'une variable indépendante T, qui prend une valeur t lorsque M coïncide avec m.

Les équations de ab sont donc

$$(3) \qquad x = az + p,$$

$$(4) \qquad y = bz + q;$$

en représentant, d'après les conventions précédentes, par a, b, p, q ce que deviennent A, B, P, Q lorsque $T = t$.

L'équation du plan perpendiculaire à ab, et passant par m, est

$$(5) \qquad a(X - x) + b(Y - y) + Z - z = 0.$$

On doit, dans ces équations, regarder X, Y, Z comme des fonctions de T, et a, b, p, q, x, y, z et t comme des constantes.

En différentiant les équations (1), (2), (5), on obtient

$$dX = AdZ + dP, \qquad dY = BdZ + dQ,$$
$$d^2X = Ad^2Z + 2dA\,dZ + Zd^2A + d^2P,$$
$$d^2Y = Bd^2Z + 2dBdZ + Zd^2B + d^2Q,$$
$$adX + bdY + dZ = 0, \qquad ad^2X + bd^2Y + d^2Z = 0.$$

4. Actuellement, donnons à T la valeur particulière t; nous aurons pour déterminer les *inconnues* dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z :

$$dx = adz + dp, \tag{6}$$
$$dy = bdz + dq, \tag{7}$$
$$d^2x = ad^2z + 2da\,dz + zd^2a + d^2p, \tag{8}$$
$$d^2y = bd^2z + 2db\,dz + zd^2b + d^2q, \tag{9}$$
$$adx + bdy + dz = 0, \tag{10}$$
$$ad^2x + bd^2y + d^2z = 0. \tag{11}$$

Les équations (6), (7) et (10) donnent d'abord

$$dz = -\frac{(ada + bdb)z + adp + bdq}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Afin de simplifier, posons

$$(ada + bdb)z + (adp + bdq) = U,$$
$$a^2 + b^2 + 1 = c;$$

nous aurons

$$dz = -\frac{U}{c}. \tag{12}$$

L'équation (6) donne ensuite

$$dx = \frac{c(zda + dp) - aU}{c^2}. \tag{13}$$

De la même manière, les équations (8), (9) et (11) fournissent celle-ci :

$$(a^2 + b^2 + 1)d^2z + 2(ada + bdb)dz + (ad^2a + bd^2b)z + ad^2p + bd^2q = 0.$$

Posons

$$(ad^2a + bd^2b)z + ad^2p + bd^2q = \mathrm{V},$$

et observons que $2(ada + bdb)$ peut être représenté par dc; l'équation précédente deviendra

$$cd^2z + dc\,dz - \mathrm{V} = 0;$$

d'où

$$(14) \qquad d^2z = \frac{\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}}{c^2}.$$

L'équation (8) donne ensuite

$$(15) \qquad d^2x = \frac{a(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) - 2c\mathrm{U}da + c^2(zd^2a + d^2p)}{c^2}.$$

5. A l'aide des valeurs (12), (13), (14) et (15), nous pouvons former la fonction $dz\,d^2x - dx\,d^2z$, laquelle doit être égalée à zéro. Nous trouvons ainsi

$$-\frac{a(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V})\mathrm{U} - 2c\mathrm{U}^2da + c^2(zd^2a + d^2p)\mathrm{U}}{c^3}$$

$$-\frac{c(zda + dp)(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) - a(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V})\mathrm{U}}{c^3} = 0,$$

ou

$$(16) \qquad 2\mathrm{U}^2da - c(zd^2a + d^2p)\mathrm{U} - (zda + dp)(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) = 0.$$

6. L'équation que l'on aurait obtenue en égalant à zéro la quantité $dz\,d^2y - dy\,d^2z$, ne doit différer de la précédente que par le changement de a en b et de p en q; donc, à cause de la symétrie des valeurs de U, V et c :

$$(17) \qquad 2\mathrm{U}^2db - c(zd^2b + d^2q)\mathrm{U} - (zdb + dq)(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) = 0.$$

7. Si nous multiplions ces deux équations, la première par a, la seconde par b, et si nous ajoutons, il viendra

$$2\mathrm{U}^2(ada + bdb) - c[z(ad^2a + bd^2b) + ad^2p + bd^2q]\mathrm{U}$$
$$- [(ada + bdb)z + adp + bdq](\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) = 0.$$

ou

$$U^2 dc - cVU - U(Udc - cV) = 0.$$

Celle-ci n'est qu'une identité ; par conséquent, les équations (16) et (17) n'équivalent qu'à une seule équation. Nous pouvons donc les remplacer par une de leurs combinaisons.

Nous choisirons la suivante, qui a l'avantage d'éliminer V.

Multiplions respectivement par $zdb + dq$, par $zda + dp$, et retranchons ; il vient

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} 2U^2\,[da\,dq - db\,dp] \\ -c\left[\begin{array}{l} (zd^2a + d^2p)(zdb + dq) \\ -(zd^2b + d^2q)(zda + dp) \end{array}\right] U = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose nul le facteur U, cette équation est satisfaite. En même temps, les équations (16) et (17) se réduisent à

$$(zda + dp)\,V = 0,$$
$$(zdb + dq)\,V = 0.$$

Il est facile de voir, d'après celles-ci, que l'hypothèse de $U = 0$ entraîne, soit

$$ada + bdb = 0,\quad adp + bdq = 0,\quad ad^2a + bd^2b = 0,\quad ad^2p + bd^2q = 0,$$

soit

$$da = 0,\qquad db = 0,\qquad dp = 0,\qquad dq = 0.$$

Dans l'un ou l'autre cas, la surface représentée par $x = az + p$, $y = bz + q$, est un plan.

Laissons donc de côté cette solution évidente, et prenons l'équation (18) débarrassée du facteur U, savoir,

$$(19)\quad 2U[da\,dq - db\,dp] - c\left[\begin{array}{l} z^2(d^2a\,db - d^2b\,da) + z(d^2a\,dq - d^2b\,dp \\ + d^2b\,dp - d^2q\,da) + (d^2p\,dq - d^2q\,dp) \end{array}\right] = 0.$$

9. Jusqu'à présent nous avons supposé que a, b, p et q étaient des fonctions d'une variable indépendante t. Mais nous pouvons évidemment, dans les équations de la génératrice, prendre pour paramètre l'une de ces quantités, par exemple a, ce qui donnera $d^2a = 0$. En même temps, observons que la position du point m dépend seulement de a et de z, et que ces variables n'ont aucune dépendance entre elles. L'équation (19) devant avoir lieu pour tous les points de la surface, il faut que les coefficients des différentes puissances de z soient nuls. Par suite, après avoir remplacé U par la valeur, et avoir fait $d^2a = 0$, nous aurons les trois équations suivantes :

$$(20) \qquad d^2b = 0,$$

$$2(ada + bdb)(dadq - dbdp) - (a^2 + b^2 + 1)(d^2p\,db - d^2p\,da) = 0,$$
$$2(adp + bdq)(dadq - dbdp) - (a^2 + b^2 + 1)(d^2p\,dq - d^2q\,dp) = 0.$$

Si l'on élimine successivement d^2q, d^2p entre ces deux dernières, on trouve

$$(21) \qquad (dadq - dbdp)[2b(dbdp - dadq) + (a^2 + b^2 + 1)d^2p] = 0,$$
$$(22) \qquad (dadq - dbdp)[2a(dadq - dbdp) + (a^2 + b^2 + 1)d^2q] = 0.$$

Le problème est ramené à l'intégration des équations (20), (21), (22).

10. L'équation (20) donne

$$b = ga + h.$$

g et h étant deux constantes arbitraires.

On satisfait aux équations (21) et (22) en posant

$$dadq - dbdp = 0.$$

Mais ici, comme dans le nº **8**, on reconnaît facilement que la surface cherchée se réduit à un plan. Supprimons donc le facteur $dadq - dbdp$, et réduisons les équations (21) et (22) à

$$2b(dbdp - dadq) + (a^2 + b^2 + 1)d^2p = 0,$$
$$2a(dbdp - dadq) - (a^2 + b^2 + 1)d^2q = 0.$$

11. Ces deux dernières sont du second ordre; mais on les ramène au premier en posant $\frac{dp}{da} = p'$, $\frac{dq}{db} = q'$. On a alors, en remplaçant $\frac{db}{da}$ par g,

$$2b(gp' - q') + (a^2 + b^2 + 1)\frac{dp'}{da} = 0,$$

$$2a(gp' - q') - (a^2 + b^2 + 1)\frac{dq'}{da} = 0.$$

12. Pour intégrer ces deux équations simultanées, prenons

$$(23)\qquad gp' - q' = \theta,$$

θ étant une variable auxiliaire. Nous aurons $\dfrac{dq'}{da} = g\dfrac{dp'}{da} - \dfrac{d\theta}{da}$; et ensuite

$$(24)\qquad 2b\theta + (a^2 + b^2 + 1)\frac{dp'}{da} = 0,$$

$$2a\theta - (a^2 + b^2 + 1)\left(g\frac{dp'}{da} - \frac{d\theta}{da}\right) = 0.$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la première par g; il viendra

$$2(bg - a)\theta + (a^2 + b^2 + 1)\frac{d\theta}{da} = 0.$$

Dans cette dernière les variables se séparent immédiatement, et l'on obtient, en observant que $bg\,da = db$ et en intégrant,

$$\theta = \frac{C}{a^2 + b^2 + 1},$$

C étant une constante arbitraire.

L'équation (24) donne

$$dp' = -C\frac{2b\,da}{(a^2 + b^2 + 1)^2},$$

ou

$$dp' = -\frac{2C(ga + h)\,da}{[(1 + g^2)a^2 + 2gha + (1 + h^2)]^2}.$$

13. Posons, pour abréger,

$$m = 1 + g^2, \quad \alpha = -\frac{gh}{1 + g^2}, \quad \beta^2 = \frac{1 + g^2 + h^2}{(1 + g^2)^2};$$

la formule à intégrer sera

$$dp' = -\frac{2C}{m^2}\frac{(ga + h)\,da}{[(a - \alpha)^2 + \beta^2]^2}.$$

Sans effectuer l'intégration, on reconnaît que le résultat doit etre de la forme

$$p' = \frac{\mathrm{M}a + \mathrm{N}}{(a-\alpha)^2 + \beta^2} + \mathrm{P} \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{D}.$$

M, N, P étant des coefficients inconnus, et D une constante arbitraire.

Multipliant par da, et intégrant une seconde fois, on aura

$$(25)\quad p = (\mathrm{P}a + \mathrm{K}) \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{L} \log [(a-\alpha)^2 + \beta^2] + \mathrm{D}a + \mathrm{E}.$$

Pour déterminer les constantes P, K, L, je prends la seconde dérivée de cette équation; savoir

$$\frac{d^2p}{da^2} = 2\,\frac{(\mathrm{P}\beta - \mathrm{L})[(a-\alpha)^2 + \beta^2] - (\mathrm{P}a + \mathrm{K})(a-\alpha)\beta + 2\beta^2\mathrm{L}}{[(a-\alpha)^2 + \beta^2]^2}.$$

Le second membre doit être identique avec la valeur de $\frac{dp'}{da}$, donnée par la formule ci-dessus. En égalant les coefficients des mêmes puissances de a, nous aurons

$$\mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{K}\beta - \mathrm{P}\alpha\beta = \frac{\mathrm{C}g}{m^2}, \quad \mathrm{P}\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \mathrm{K}\alpha\beta = -\frac{\mathrm{C}h}{m^2}.$$

Ces deux dernières équations donneront

$$\mathrm{P} = -\frac{\mathrm{C}}{m^2\beta^3}(g\alpha + h), \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{C}}{m^2\beta^3}[g(\alpha^2 - \beta^2) + h\alpha].$$

Ainsi l'équation (25) devient

$$p = \frac{\mathrm{C}}{m^2\beta^3}[g(\alpha^2 + \beta^2) + h\alpha - (g\alpha + h)a] \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{D}a + \mathrm{E}.$$

L'équation (23) donne ensuite $q = gp - \int \theta\, da$, ou bien

$$q = gp - \frac{\mathrm{C}}{m\beta} \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{F}.$$

14. Maintenant que nous avons déterminé b, p et q en fonction de a, reprenons les équations (3) et (4),

$$x = az + p, \quad y = bz + q;$$

ou

$$x = az + p, \quad y = (ga + h)z + q.$$

La dernière peut être remplacée par

$$y - gx = hz + q - gp.$$

Par suite, la génératrice, dans une quelconque de ses positions, sera représentée par

$$(26) \quad x - az = \frac{C}{m^2\beta^3}[g(\alpha^2 + \beta^2) + h\alpha - (g\alpha + h)a] \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + Da + E.$$

$$(27) \quad y - gx - hz = -\frac{C}{m\beta} \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + F.$$

15. Il reste à reconnaître la nature de la surface réglée. Or, l'équation (27) représente un plan parallèle à celui dont l'équation est

$$y - gx - hz = 0.$$

Ainsi, *toutes les génératrices sont parallèles à un même plan directeur*. Prenons ce plan pour celui des xz : les constantes g et h devront être nulles, d'après l'équation précédente. En même temps, nous pouvons déplacer l'origine de manière à faire évanouir les constantes arbitraires D, E et F. Les équations (26) et (27) deviendront donc, à cause de

$$m = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 :$$

$$x - az = 0, \quad y = -C \operatorname{arc\,tang} a;$$

d'où

$$y = -C \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{z}.$$

16. Cette dernière équation représente un héliçoïde à plan directeur. Ainsi : *L'héliçoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée qui ait, en chaque point, ses deux rayons principaux, égaux et de signes contraires*.

NOTE

SUR UN

THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

Par J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

On a remarqué, depuis longtemps, que le plus court chemin d'un point à un autre n'est pas celui qu'un mobile doit suivre pour faire le trajet dans le moins de temps possible sous l'influence de la pesanteur. Par conséquent, il ne peut exister aucune relation entre la longueur d'une courbe et le temps qu'un mobile pesant met à la parcourir. On trouve en effet, comme cela est évident par l'exemple de la cycloïde, que, pour les courbes qui tournent leur convexité dans le sens de la pesanteur, la descente peut être indifféremment plus ou moins rapide dans les courbes de plus grande longueur. Mais si l'on examine les courbes qui tournent leur convexité du côté opposé, on peut prouver que le temps du trajet, sous l'influence d'une même vitesse initiale, est d'autant plus grand que la courbe est plus longue; en d'autres termes, que, *deux courbes concaves dans le sens de la pesanteur, et terminées aux mêmes extrémités, étant parcourues par des points pesants animés de vitesses initiales égales, la courbe enveloppante donnera un trajet plus long que la courbe enveloppée.*

Pour démontrer ce théorème, prenons pour axe des x une horizontale telle que la distance du point de départ du mobile à cette droite soit la hauteur due à la vitesse initiale, en sorte que le point soit toujours animé d'une vitesse $\sqrt{2gy}$, lorsque son ordonnée sera égale à y.

Nous aurons

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gy,$$

d'où

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}};$$

si donc x_0 et x_1 sont les abscisses des deux points extrêmes, le temps du trajet sera représenté par l'intégrale

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx.$$

Pour voir la manière dont il change lorsque l'on passe à une courbe voisine ayant les mêmes extrémités, il faut prendre la variation de cette intégrale en considérant les limites comme fixes ainsi que les valeurs de y qui y correspondent; on aura, en représentant par $\mathrm{F}dx$ la fonction sous le signe $\int$,

$$\delta t = \int_{x_0}^{x_1} \omega dx \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\right),$$

ω représentant la variation de y; mais

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g}},$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{2g}\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dy'} = \frac{y''}{\sqrt{2g}\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y'^2}{2\sqrt{2g}\, y^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+y'^2}},$$

et en substituant,

$$\delta t = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2\sqrt{2g}}\, \omega dx \left[\frac{1+y'^2+2yy''}{y^{\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Or si nous passons d'une courbe à une autre qui l'enveloppe, il faut supposer ω négatif; le facteur entre parenthèses est évidemment négatif, puisque y'' est positive par hypothèse, et que, d'après la valeur initiale de la vitesse, le mobile devant toujours rester au-dessous de l'axe des x, son ordonnée est constamment positive. La valeur de $-\delta t$ se compose donc d'éléments tous négatifs; par conséquent le temps du trajet augmente lorsque l'on passe d'une courbe concave, dans le sens de la pesanteur, à une courbe infiniment voisine qui l'enveloppe. Le temps augmentant pour une variation infiniment petite des ordonnées, il augmentera à plus forte raison lorsque l'on passera à une courbe située à une distance finie de la première, pourvu que l'on puisse passer de l'une à l'autre d'une manière continue par des courbes concaves, c'est-à-dire pourvu que la seconde courbe soit concave comme la première. Si cette condition n'était pas remplie, le facteur de ωdx sous l'intégrale pourrait changer de signe, et l'on n'arriverait plus à une conclusion précise.

On pourrait vérifier, par un moyen semblable, qu'une courbe convexe est plus petite que celles qui l'enveloppent; il suffirait de chercher la variation de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx:$$

cette variation est

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{\omega y'' dx}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc y'' est, en tous les points, de signe contraire à ω, la courbe primitive sera plus petite que celle qui l'enveloppe : par conséquent si la courbe est concave vers l'axe des x et que, sans changer les extrémités, on augmente les ordonnées, elle augmentera; si, au contraire, elle est convexe, une augmentation des ordonnées diminuera sa longueur: il est évident que ces résultats correspondent aux théorèmes connus de géométrie.

On démontrerait, d'une manière analogue, que l'intégrale double qui représente l'aire d'une surface convexe a une variation négative lorsque l'on passe à une nouvelle surface de même contour et qui l'enveloppe de toute part.

Ces calculs sont d'une extrême simplicité et ne présentent par eux-mêmes aucun intérêt; j'ai cru cependant pouvoir les indiquer, à l'occasion du théorème de Mécanique qui fait l'objet de cette Note, comme exemples de l'application du calcul des variations à des questions autres que celles de *maximum* et de *minimum*.

DEMONSTRATION

D'UN

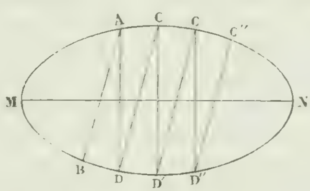
THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

Par J. BERTRAND.

Élève-Ingénieur des Mines.

Une courbe plane pour laquelle les milieux d'une série quelconque de cordes parallèles sont toujours en ligne droite est nécessairement une section conique.

Supposons que la courbe que représente la figure jouisse de la propriété énoncée; menons deux cordes parallèles AB, CD, tres-rapprochées l'une de l'autre; joignons AD, et, par le point C, menons une parallèle à AD; cette parallele viendra rencontrer la courbe au point D′ très-rapproché de D. Par les points A, B, C, D, D′, faisons passer une section conique; les parallèles AB, CD seront des cordes de cette conique. Donc, toute autre corde parallèle à leur direction sera coupée



en deux parties égales par le diamètre MN qui leur est conjugué. Si donc, par le point D′ qui appartient à la conique, on mene une parallèle à AB, et qu'à partir du point où cette parallèle rencontre MN, on la prolonge d'une quantité égale à elle-même, le point C′ ainsi obtenu appartiendra encore à la conique. Mais, par une raison toute semblable, il appartient aussi à la courbe; c'est donc un sixième point qui leur est commun. De même si par le point C' on mène une parallèle aux droites AD, CD', cette parallèle rencontrera la courbe donnée et la conique, en un même point D''. Ce point D'' fournira à son tour un autre point C'', et ainsi de suite indéfiniment. Or il est évident qu'on peut prendre les deux parallèles AB, CD assez rapprochées l'une de l'autre pour que la diagonale AD leur soit aussi peu inclinée que l'on voudra. Alors les points que fournit notre construction seront très-rapprochés les uns des autres; nous aurons donc entre la courbe et la conique des points communs dont le nombre pourra devenir aussi grand que nous voudrons et qui seront de plus en plus rapprochés les uns des autres. D'après cela, il est manifeste que la courbe proposée ne peut être autre chose qu'une section conique.

On peut voir aisément qu'il y a un théorème analogue pour les surfaces.

MÉMOIRE

SUR LES LOIS

DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION CRISTALLINES;

PAR M. JAMES MAC-CULLAGH,

Membre du Collége de la Trinité, à Dublin [*].

(Extrait des *Transactions de l'Académie royale d'Irlande*, vol. XVIII, part. 1re.)

Lorsqu'un rayon de lumière, polarisé dans un plan connu, subit la réflexion et la réfraction à la surface d'un milieu transparent, les rayons dans lesquels il se partage sont polarisés suivant d'autres plans. On peut se proposer de déterminer les positions de ces plans, et les intensités relatives de ces rayons; ou, en langage théorique, de trouver l'amplitude des vibrations réfléchies et réfractées, quand on suppose donnée celle des vibrations incidentes. Le milieu transparent peut être, ou uniréfringent comme le verre, ou biréfringent comme le spath d'Islande. Si le milieu est de la première espèce, le problème est comparativement simple, et n'est en réalité qu'un cas particulier du problème plus général où le milieu est supposé de la seconde espèce. Dans la marche de la science, il était naturel que la question la plus simple fût traitée la première, et Fresnel, pendant sa courte et brillante carrière, trouva le temps de la résoudre. Mais le problème général, pour les milieux biréfringents, n'avait été abordé par personne, lorsqu'en 1834 je fus conduit à m'en occuper. J'ai rap-

[*] Bien que le Mémoire de M. Mac-Cullagh ait une date déjà assez ancienne, puisqu'il a été lu à l'Académie de Dublin le 9 janvier 1837, il est peu connu en France, et nos lecteurs nous sauront gré d'en publier ici la traduction. L'auteur s'est occupé à diverses reprises de la théorie de la lumière. Rappelons à cette occasion la lettre dans laquelle il a élevé en 1839 une réclamation de priorité au sujet de certaines formules. On trouvera cette lettre et les observations auxquelles elle a donné lieu de la part de M. Cauchy, dans le tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, page 961. (J. LIOUVILLE.)

pelé alors une conclusion que j'avais déduite quelques années auparavant, et qui, dans cette occasion, m'a été d'un grand secours. Passionné pour les constructions géométriques, j'avais pris plaisir, la première fois que je connus les théories de Fresnel, à traduire, autant que je le pouvais, ses expressions algébriques sous une forme géométrique, et traitant ainsi les formules bien connues dans lesquelles il a renfermé la solution du problème énoncé plus haut, j'avais obtenu un résultat remarquable, qui me donna la première idée du principe que j'ai employé depuis sous le nom de *principe de l'équivalence des vibrations*. Pour faire connaître brièvement ce résultat, je désignerai par un terme nouveau une ligne droite menée parallèlement au plan de polarisation d'un rayon, et perpendiculaire à la direction de ce rayon même. Appelant cette ligne *la transversale* du rayon polarisé, j'ai trouvé, d'après les formules de Fresnel, que, quand de la lumière polarisée tombe sur un milieu uniréfringent, les transversales des rayons incident, réfléchi, et réfracté, sont parallèles à un même plan, lequel est le plan de polarisation du rayon réfracté, et que les grandeurs des vibrations ou les plus grandes excursions des molécules éthérées, pour les rayons incident et réfléchi, sont inversement l'une à l'autre comme les sinus des angles que les transversales respectives de ces rayons font avec la transversale du rayon réfracté. Je fus frappé de l'analogie complète que ces relations entre les transversales avaient avec la composition des forces ou des petites vibrations en mécanique; malheureusement, dans la théorie de Fresnel, les vibrations de la lumière sont, non parallèles, mais perpendiculaires aux transversales; ainsi aucune circonstance physique n'appuyait cette analogie, puisqu'il n'y a pas de mouvement sur les transversales; tandis que l'analogie n'existe pas pour les vibrations elles-mêmes dans les directions assignées par Fresnel. Aussi fut-ce avec un vif intérêt que j'appris depuis, par la publication du dixième volume des *Mémoires de l'Institut*, que M. Cauchy avait alors déduit de principes mécaniques que les vibrations de la lumière polarisée sont dans la direction des transversales; mais cette déduction ne pouvait être admise avec une entière confiance, parce qu'elle était contraire à l'hypothèse de Fresnel; en outre, j'avais trouvé le moyen d'adapter mon analogie à cette dernière hypothèse, en supposant que *les aires* soient composées à l'instar des vibrations, en sorte que j'hésitais dans le choix à faire entre les deux opinions. Adoptant cependant l'opinion de M. Cauchy, comme celle qui s'accordait le plus naturellement avec l'analogie énoncée, je fus conduit à cette conclusion, que la vibration réfractée est probablement la résultante des vibrations incidente et réfléchie; et je compris que si le principe était vrai pour les milieux uniréfringents, il devait être vrai aussi, d'après sa nature et quand il serait convenablement généralisé, pour les cristaux biréfringents; c'est-à-dire que, dans ces cristaux, la résultante des deux vibrations réfractées serait la même, en grandeur et en direction, que la résultante des vibrations incidente et réfléchie.

Tel était le principe des vibrations équivalentes. Mais je n'eus pas plutôt commencé à le regarder comme probable, qu'une objection s'éleva contre lui : dans le cas d'un rayon réfracté simplement, d'un milieu moins dense dans un milieu plus dense, la grandeur de la vibration réfractée, déduite de ce principe, était plus grande que celle déduite de la théorie de Fresnel, dans la proportion du sinus d'incidence au sinus de réfraction. Conséquemment, en supposant, avec Fresnel, que l'éther est plus dense dans les milieux plus réfringents, la loi de la conservation des forces vives était enfreinte.

Je tombai encore dans un autre embarras, en cherchant les lois de la lumière réfléchie par les cristaux. Regardant comme certaine l'hypothèse de Fresnel, que la densité de l'éther dans un milieu ordinaire est proportionnelle au carré de l'indice de réfraction, je ne savais quelle hypothèse faire par rapport aux cristaux biréfringents, dans lesquels l'indice change avec la direction du rayon, car cette densité est nécessairement indépendante de la direction, et ne saurait varier avec l'indice de réfraction. Il y a environ deux ans, je parvins à lever cette difficulté, en supposant que la densité de l'éther est la même dans tous les milieux [*]. A la même époque, je fus forcé d'employer le principe des vibrations équivalentes pour obtenir un nombre suffisant de conditions; et quoique j'eusse négligé l'accord entre ce principe et la loi des forces vives, il se trouva que maintenant

[*] Cette hypothèse est adoptée par M. Challis; elle s'accorde très bien avec le phénomène astronomique de l'aberration de la lumière. (*Voir*, sur ce sujet, le Rapport du professeur Lloyd sur l'Optique physique; quatrième Rapport de l'*Association britannique pour l'avancement des sciences*, pages 311 à 313.)

thèse d'une densité constante rendait la force vive du rayon réfracté exactement la même que dans la théorie de Fresnel.

Mais pour voir combien il était nécessaire d'employer le principe des vibrations équivalentes, il faut observer que, quand un rayon polarisé atteint un cristal, il y a quatre choses à déterminer : la direction et la grandeur de la vibration réfléchie, et les grandeurs des deux vibrations réfractées. Il est donc nécessaire d'avoir quatre conditions, ou des relations conduisant à ce même nombre d'équations. Mais les hypothèses adoptées par Fresnel, pour résoudre le problème de la réflexion sur les milieux ordinaires, ne donnent que trois conditions; ces hypothèses sont les suivantes :

Première hypothèse. Les vibrations de la lumière polarisée s'exécutent dans le plan de l'onde, et perpendiculairement au plan de polarisation.

Deuxième hypothèse. La densité de l'éther est proportionnelle au carré de l'indice de réfraction du milieu.

Troisième hypothèse. La force vive est conservée.

Quatrième hypothèse. Les vibrations parallèles à la surface de séparation des deux milieux sont équivalentes, c'est-à-dire que la vibration réfractée, parallèle à la surface, est la résultante des vibrations incidente et réfléchie, parallèles à la même surface.

On voit que la quatrième hypothèse donne deux conditions, et que la loi des forces vives en donne une troisième.

Prenons maintenant le principe plus général des vibrations équivalentes, au lieu de la quatrième hypothèse de Fresnel; altérons la première comme nous avons montré qu'il était nécessaire de le faire quand on admet ce principe, et supposons l'éther de densité constante. Alors, si nous conservons la loi des forces vives, nos nouvelles hy[illegible]thèses seront celles-ci :

Première hypothèse. Les [illegible] la lumière polarisée s'exécutent [illegible], et *parallèlement* au plan de polarisation; [illegible] être exprimé en un mot, en disant que les vibrations sont *transversales*, ce terme ayant le sens particulier que j'ai défini.

Deuxième hypothèse. La densité de l'éther dans tous les milieux est la même que dans le vide.

Troisième hypothèse. La force vive est conservée.

Quatrième hypothèse. Les vibrations dans deux milieux contigus sont équivalentes, c'est-à-dire que la résultante des vibrations incidente et réfléchie est la même, en grandeur et en direction, que la résultante des vibrations réfractées.

Il est évident que cette dernière hypothèse apporte trois équations, que l'on obtiendra en décomposant les vibrations parallèlement à trois axes coordonnés; et la loi des forces vives fournit la quatrième équation. Ainsi nous avons le nombre d'équations nécessaire.

Telles sont les hypothèses qui servent de base au Mémoire actuel. Elles ont été disposées de manière à renfermer la loi des forces vives, car j'ai trouvé récemment que cette loi doit nécessairement accompagner les autres; mais je l'avais d'abord négligée, et, à l'aide d'une autre hypothèse, j'avais obtenu des formules qui représentaient assez bien les expériences connues. Cette autre hypothèse me fut suggérée par un article de M. Cauchy, inséré au *Bulletin des sciences mathématiques* [*],

---

[*] Sur la réfraction et la réflexion de la lumière, *Bulletin des sciences mathématiques*, juillet 1830. Dans ce Mémoire, les vibrations de la lumière polarisée sont supposées perpendiculaires au plan de polarisation, quoique ce Mémoire fût publié immédiatement après que l'auteur eut avancé l'opinion contraire, que j'ai adoptée d'après lui parce qu'elle s'accorde très-bien avec l'analogie énoncée plus haut; mais il y renonce formellement, et retourne à l'hypothèse de Fresnel. M. Cauchy suppose encore, dans ce Mémoire, que la densité de l'éther est la même dans tous les milieux; mais depuis il a trouvé des raisons d'abandonner aussi cette hypothèse. *Voyez* les Notes adressées à M. Libri, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. II, p. 343, où il donne les motifs de ses nouvelles opinions. M. Cauchy dit : « Ainsi Fresnel a eu » raison de dire, non-seulement que les vibrations des molécules éthérées sont généralement comprises dans les plans des ondes, mais encore que les plans de polarisation sont perpendiculaires aux directions des vitesses ou des déplacements moléculaires. J'arrive, au reste, à cette dernière conclusion d'une autre manière, en établissant » les lois de la réflexion et de la réfraction à l'aide d'une nouvelle méthode qui sera développée dans mon Mémoire... Cette méthode ne m'oblige plus à supposer, comme je » l'avais fait dans un article du *Bulletin des sciences*, que la densité de l'éther est la » même dans tous les milieux. Mes nouvelles recherches donnent lieu de croire que cette » densité varie, en général, quand on passe d'un milieu à un autre. » Plus récemment, dans ses *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, septième livraison, M. Cauchy établit positivement que ses principes ne lui permettent pas l'hypothèse d'une densité constante. Il donne aussi les équations différentielles qui, comme il l'a trouvé par sa nouvelle méthode, doivent subsister à la surface de séparation de deux milieux, et desquelles il déduit les formules de Fresnel pour la réflexion ordinaire; mais ces équations ne renferment pas la loi de la réflexion sur les substances cristallisées.

et dans lequel il arrive, par un procédé particulier, aux formules de Fresnel relatives à la réflexion ordinaire. Les hypothèses principales qu'il emploie sont des relations entre certaines quantités appelées pressions; et c'est une relation semblable que j'adoptais au lieu de la loi des forces vives. Je supposais qu'aux confins de deux milieux, la pression sur la surface de séparation, dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence, devait être la même, qu'elle fût considérée comme résultant des vibrations du premier milieu, ou de celles du second. Je pensais que cette hypothèse était vraie en général, comme pour les milieux ordinaires. En la combinant avec le principe des vibrations équivalentes, j'en déduisis plusieurs expressions pour les cristaux à un axe, et entre autres une formule pour les angles de polarisation dans différents azimuts du plan de réflexion. Quand je comparai les résultats déduits de cette formule avec les expériences de sir David Brewster sur les angles de polarisation du spath d'Islande (*Transactions philosophiques*, 1819, page 150), l'accord fut si satisfaisant que je crus fermement être arrivé à la véritable formule de ces angles; et quoique cette vérification ne me permît pas de conclure que les principes d'où j'étais parti étaient vrais, la présomption en leur faveur était du moins très-forte; ma conviction fut telle que, n'ayant pas tardé à reconnaître l'accord de la loi des forces vives avec mes autres hypothèses, je ne crus pas nécessaire de voir ce que donnerait directement cette loi [*], employée au lieu de la relation entre les pressions.

---

[*] D'ailleurs la loi des forces vives me donnait une équation du second degré, et je desirais avoir toutes mes équations linéaires, de peur que, dans la question en apparence compliquée de la réflexion cristalline, elles donnassent deux réponses quand la nature de la question n'en requérait qu'une. Cette circonstance s'est présentée, depuis la lecture de ce Memoire, lorsque j'ai appliqué mes hypothèses au cas de la reflexion interne sur la seconde surface d'un cristal à un axe. Supposant qu'un rayon ordinaire sorte du cristal après avoir subi deux réflexions intérieures, et désignant par θ l'angle que la transversale du rayon émergent fait avec le plan d'incidence, j'ai trouvé, pour déterminer θ, une équation de la forme

$$A + B \operatorname{tang} \theta + C \operatorname{tang}^2 \theta = 0,$$

dans laquelle A est très-petit, mais non nul; en sorte que l'équation donne deux ra-

Ce fut dans cet état que j'exposai ma théorie à la séance de l'Association britannique de Dublin, en août 1835 (*London and Edimburgh philosophical Magazine*, t. VII, page 295); les conséquences et les résultats furent ensuite publiés dans une lettre adressée à sir David Brewster (*ibid.*, vol. VIII, février 1836).

Maintenant, il faut le remarquer, quand de la lumière commune est polarisée par réflexion à la surface d'un cristal biréfringent, le plan de polarisation ne doit pas, en général, coïncider avec le plan de réflexion, comme dans le cas d'un milieu ordinaire : ces deux plans font entre eux un certain angle, qu'on peut appeler *la déviation;* c'est en égalant deux valeurs de cette déviation, que j'avais obtenu la formule des angles de polarisation. Cette formule, comme nous l'avons vu, était d'accord avec les faits, mais il arrivait néanmoins que les expressions de la déviation, employées pour obtenir la formule, étaient inexactes. C'est M. Seebeck que je dois remercier d'avoir signalé cette singulière circonstance. Dans les *Annales de Poggendorff*, t. XXXVIII, page 276, après avoir donné un extrait de ma Lettre à sir David Brewster, il compare mes résultats avec ses expériences nombreuses et soignées sur les angles de polarisation du spath d'Islande, et sur les angles de déviation. Il a reconnu que ma formule représentait la première classe d'expériences aussi bien qu'on pouvait le desirer, mais que les valeurs théoriques des déviations ne s'accordaient pas du tout avec ses mesures expérimentales. A l'aide des déviations exactes qu'il a publiées à cette occasion, j'ai pu remonter jusqu'à la source de l'erreur, et reconnaître qu'elle dépendait de la relation entre les pressions. J'abandonnai donc cette relation, pour lui substituer le principe des forces vives, et la théorie devint même beaucoup plus simple par cet

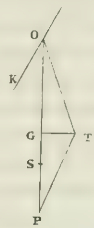
---

cines, une très-petite, et l'autre qui est la valeur véritable. Il est clair toutefois que la mise en équation du problème pêche en quelque chose; mais je suis maintenant porté à croire que la faute ne dépend pas du principe des forces vives. Il est possible que les lois de la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents ne soient pas encore complétement connues. Quelle que soit la loi supplémentaire qui détruise l'anomalie de ce résultat, elle rendra compte sans doute du phénomène extraordinaire observé par Brewster, sur la réflexion à la première surface, quand le cristal est en contact avec un milieu d'une puissance réfractive à peu près égale à la sienne échange. C'est ainsi que j'ai obtenu pour la déviation une expression nouvelle qui s'accorde avec les expériences de M. Seebeck, tandis que la formule des angles de polarisation reste la même qu'auparavant. Cette correction fut faite le 6 décembre 1836. (*Philosophical Magazine*, vol. X, page 43, janvier 1837.)

Avant cette nouvelle publication, j'étais arrivé à des lois géométriques très-élégantes, qui peuvent se retenir aisément, et qui embrassent toute la théorie de la réflexion cristalline. Pour énoncer ces lois, il convient de mener toutes les transversales par la même origine O, que nous supposerons être le point d'incidence lui-même qui appartient à la fois aux rayons incident, réfléchi, ou réfracté; on peut imaginer les ondes planes menées par la même origine, de telle sorte que chaque transversale soit couchée sur l'onde plane qui lui correspond. Les ondes planes incidente et réfléchie seront respectivement perpendiculaires aux rayons incident et réfléchi, mais les deux ondes planes réfractées seront, en général, obliques sur leurs rayons. Dans ce dernier cas, une droite menée par l'origine perpendiculairement à l'onde plane est appelée la normale de l'onde. Il est nécessaire de remarquer que les quatre ondes planes coupent la surface du cristal suivant une même ligne, qui est perpendiculaire au plan d'incidence, et que les angles de réfraction sont les angles que les normales des ondes planes réfractées font avec une perpendiculaire à cette surface. L'indice de réfraction est le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction, comme dans les milieux ordinaires; mais ici ce rapport est variable, et a différentes valeurs pour le même angle d'incidence. J'ai montré, dans un autre Mémoire, comment on détermine les rayons réfractés et leurs ondes planes, quand le rayon incident est donné. (*Irish. Acad. Trans.*, vol. XVII, page 252.)

Comme nous supposons que les molécules d'éther vibrent parallèlement aux transversales, nous pouvons prendre les longueurs des transversales proportionnelles aux grandeurs ou aux amplitudes des vibrations, ces longueurs étant toujours mesurées à partir de l'origine commune O. Alors, en vertu de notre quatrième hypothèse, les transversales se composeront et décomposeront exactement suivant les mêmes règles que si elles représentaient des forces agissant au point O.

Nous pouvons maintenant concevoir la surface des ondes dans le cristal, ayant son centre au point d'incidence O; les vitesses des rayons lumineux qui traversent le cristal, dans des directions parallèles aux rayons vecteurs de cette surface, sont représentées par ces rayons mêmes. Soit décrite une sphère concentrique avec un rayon OS, qui représen-



tera, sur la même échelle, la vitesse constante de la lumière dans le milieu extérieur au cristal. A tout point T pris sur la surface des ondes appartient un plan tangent, sur lequel nous abaissons, de O, une perpendiculaire OG rencontrant ce plan en G; sur cette perpendiculaire nous prenons la longueur OP, de O au delà de G, telle que OP soit troisième proportionnelle à OG et à la ligne constante OS. Alors, tandis que le point T décrit la surface des ondes, le point P décrira une autre surface, réciproque de la première. (Pour la théorie des surfaces réciproques, voir *Irish. Acad. Trans.*, vol. XVII, page 241). Cette autre surface peut être appelée *surface des indices* [*], parce que son rayon vecteur OP est l'indice de réfraction du rayon lumineux dont la vitesse est OT, ou mieux celui de l'onde plane TG qui correspond à ce rayon; car si nous concevons qu'une onde plane incidente, touchant la sphère, soit réfractée dans l'onde TG touchant la surface des ondes en T, le sinus de l'angle d'incidence sera au sinus de l'angle de réfraction comme OS à OG, ou comme OP à OS; en sorte que si l'on

[*] C'est cette surface que j'appelais autrefois *surface de réfraction*, nom qui ne la definissait pas suffisamment. Sir W. Hamilton l'a appelée *surface de l'onde lente* (of wave slowness), et en même temps *surface des composantes* (of componess). Mais le nom de *surface des indices* semble se recommander de lui-même, comme court et expressif.

prend la constante OS pour unité, l'indice de réfraction sera représenté par OP. La surface des ondes et la surface des indices seront réciproques l'une à l'autre, chaque point T sur l'une ayant un point P réciproquement correspondant sur l'autre.

Il faut remarquer que la transversale du rayon OT est perpendiculaire au plan OTP; car, dans la théorie de Fresnel, comme je l'ai prouvé jadis (*Ibidem*, vol. XVI, page 76), la direction des vibrations est la droite TG; et comme je suppose que la transversale est perpendiculaire aux vibrations de cette théorie, et située en même temps dans l'onde plane qui est perpendiculaire à OP, il s'ensuit que la transversale doit être perpendiculaire à la fois aux lignes TG et OP, et conséquemment à leur plan OTP. C'est pourquoi, si l'on conçoit la transversale menée par O à angle droit du plan OTP, le plan de polarisation du rayon OT devra passer par cette ligne. Mais il n'y a pas d'autre condition qui fixe la position de ce dernier plan. Nous pouvons le faire passer par le rayon OT lui-même, comme dans un milieu ordinaire, ou le conduire suivant la normale à l'onde plane avec Fresnel; enfin, au lieu de le mener par un de ces deux côtés du triangle OTP, nous pouvons le prendre parallèle au troisième côté TP. Cette dernière définition est celle que je préfère, parce que le plan ainsi déterminé possède d'importantes propriétés. Toutefois je l'appellerai le *plan polaire*, expression plus courte que celle de plan de polarisation, qui restera distincte, et correspondra si l'on veut à la définition adoptée par Fresnel; d'ailleurs, pour un milieu uniréfringent, les deux expressions signifieront la même chose. Le plan polaire du rayon OT est donc un plan passant par sa transversale, et parallèle à la droite TP; en sorte que, si OK est parallele à TP, le plan polaire passera par OK. En général, pour trouver la transversale et le plan polaire d'un rayon, il faut d'abord joindre le point où ce rayon rencontre la surface des ondes avec le point correspondant de la surface des indices, puis tracer un plan qui contienne la droite de jonction et le centre des deux surfaces. Alors la ligne menée par l'origine perpendiculairement à ce plan sera la transversale, et le plan mené par cette transversale parallèlement à la ligne de jonction sera le plan polaire.

Maintenant, soit un rayon polarisé, tombant en O sur le cristal. Il sera généralement divisé en deux rayons réfractés. Mais chacun de ces rayons peut successivement disparaître si l'on polarise le rayon incident dans un certain plan. Supposons donc qu'il n'y ait qu'un seul rayon réfracté OT. Dans quel plan doit être polarisé le rayon incident, ou, en d'autres termes, quelle doit être la position de sa transversale pour qu'il en soit ainsi? et quelle sera alors la transversale du rayon réfléchi? La réponse est simple : ces deux transversales seront situées dans le plan polaire du rayon réfracté. Développons en peu de mots cette solution.

Le rayon réfracté OT étant donné, on peut trouver son plan polaire, et ensuite les intersections de ce plan avec les ondes planes, incidente et réfléchie. Ces intersections sont les positions des transversales incidente et réfléchie, quand OT est le seul rayon réfracté. La transversale réfractée est aussi dans le plan polaire, et cette transversale est, par notre quatrième hypothèse, la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont les deux autres transversales; ce qui détermine les longueurs des trois transversales, ou les amplitudes relatives de leurs vibrations. Enfin, les intensités des rayons incident et réfléchi sont proportionnelles aux carrés de leurs transversales. Quand le rayon OT disparaît, on doit prendre le plan polaire de l'autre rayon, et procéder de la même manière.

Ainsi il existe sur l'onde plane incidente deux directions de la transversale qui ne donnent qu'un seul rayon réfracté. Ces directions, aussi bien que leurs correspondantes sur l'onde plane réfléchie, peuvent être appelées *transversales uniradiales;* elles sont les intersections des plans polaires des deux rayons réfractés avec les ondes planes incidente et réfléchie.

Quand la transversale incidente ne coïncide avec aucune des directions uniradiales, il faut la décomposer parallèlement à ces directions; alors chaque transversale composante fournit un rayon réfracté, en se conformant aux règles précédentes. Les transversales réfléchies provenant de ces composantes incidentes, sont trouvées séparément par les mêmes règles, et doivent être ensuite composées en une seule.

Dans la réflexion ordinaire, si la transversale incidente est dans le plan d'incidence, ou lui est perpendiculaire, la transversale réfléchie l'est pareillement; mais cela n'a pas lieu dans la réflexion cristalline. La méthode générale, qui vient d'être donnée, sera toutefois capable de déterminer les positions et les grandeurs des transversales réfléchies dans ces deux cas remarquables; et alors, si on le préfère, on pourra réduire tout autre cas à ces deux-là, en décomposant la transversale incidente sur les directions parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence.

Si nous concevons que deux transversales incidentes, à angle droit l'une sur l'autre, tournent autour de l'origine, il existera évidemment une position de leur système, telle que les transversales réfléchies correspondantes seront aussi à angle droit. Il y a de l'avantage à employer cette position, dont la recherche ne présente aucune difficulté, quand la lumière incidente n'est pas polarisée. Car les transversales incidentes étant rectangulaires, on pourra supposer la lumière également partagée entre elles, et les intensités des portions réfléchies correspondantes se trouveront par les règles précédentes. Les transversales réfléchies étant aussi rectangulaires, la somme de ces intensités donnera l'intensité totale de la lumière réfléchie, et leur différence sera l'intensité de la lumière polarisée qui en fera partie. Cette partie sera polarisée dans un plan passant par la plus grande des deux transversales réfléchies.

La lumière commune sera complétement polarisée par la réflexion, quand les deux directions uniradiales, sur l'onde plane réfléchie, coïncideront l'une avec l'autre, c'est-à-dire quand cette onde plane et les deux plans polaires réfractés auront une intersection commune. En effet, dans cette circonstance, si la lumière incidente était polarisée, il est évident que la transversale réfléchie se coucherait sur cette intersection, quelle que fût la position de la transversale incidente; et c'est pourquoi, si la lumière incidente est commune, avec ses transversales dans toute direction possible, les transversales réfléchies n'auront qu'une seule et même direction. Ainsi la lumière réfléchie sera complétement polarisée dans un plan passant par l'intersection des plans polaires.

Puisque le rayon réfléchi est perpendiculaire à son onde plane, il suit de ce qui précède, qu'*à l'angle de polarisation d'un cristal, le rayon réfléchi est perpendiculaire à l'intersection des plans polaires des deux rayons réfractés*. La transversale réfléchie est, comme nous l'avons vu, cette même intersection; elle est inclinée, en général, sur le plan d'incidence, et nous avons eu l'occasion de parler de cette inclinaison sous le nom de *déviation*. Si l'on suppose maintenant que la double réfraction diminue au point de disparaître, l'intersection des plans polaires coïncidera avec le rayon réfracté. Il n'y aura alors aucune déviation, et les rayons réfléchi et réfracté seront à angle droit l'un sur l'autre, conformément à la loi de Brewster sur l'angle de polarisation d'un milieu ordinaire.

La construction que nous avons donnée, pour déterminer le plan polaire d'un rayon, devient inutile quand le rayon OT est normal à la surface des ondes, car alors OP coïncide avec OT, et cette construction ne peut plus servir à trouver la transversale; mais dans ce cas le plan polaire est aisément déterminé, puisqu'il n'est autre que le plan de polarisation de Fresnel. Par exemple, s'il s'agit du rayon ordinaire dans un cristal à un axe, son plan polaire passe par ce rayon même et par l'axe du cristal; et pour un milieu uniréfringent le plan polaire et le plan de polarisation sont identiques.

Il est convenable d'appliquer nos règles générales au cas de la réflexion et de la réfraction simples. Supposons qu'un rayon polarisé tombe sur la surface d'un milieu uniréfringent; le plan mené par la transversale incidente et le rayon réfracté sera le plan de polarisation de ce rayon, et coupera l'onde plane réfléchie suivant sa transversale. La transversale réfractée sera la diagonale du parallélogramme ayant pour côtés les deux autres transversales; les grandeurs relatives des trois transversales étant ainsi connues, tout se trouve déterminé [*].

---

[*] Cette construction a été communiquée à l'Association britannique de Dublin (*Voyez* les Rapports de cette Association, ou le *London and Edinburg Phil. Mag.*, vol. VII, page 295). Voici un extrait du Mémoire que je lus à cette occasion.

« On verra que les formules de Fresnel sur le même sujet s'accordent exactement » avec notre construction pour les positions des plans de polarisation, et pour l'am- » plitude de la vibration réfléchie. Mais l'accord n'a plus lieu pour l'amplitude de la » vibration réfractée, quoique la force vive du rayon réfracté soit la même dans les » deux théories.

» Il est très-remarquable qu'il suffise d'altérer les hypothèses de Fresnel de ma- » nière à les mettre d'accord avec les principes précédents, pour déduire de ses équa- » tions de condition des formules qui s'accordent sous tous les rapports, même pour » l'amplitude de l'onde réfractée, avec la construction que nous avons donnée en sui-

La raison de cette construction sera évidente, si l'on considère que, pour un milieu uniréfringent, le plan polaire est le même que le plan de polarisation; et, puisqu'il n'y a qu'un seul rayon réfracté, que les trois transversales sont dans le plan polaire de ce rayon, conformément à la remarque générale d'où nous sommes partis. Procédons mainte-

---

» vant une route différente (c'est-à-dire en nous servant de la relation entres les pressions au lieu de la loi des forces vives). Les altérations nécessaires sont au nombre de deux : 1° les vibrations doivent être supposées parallèles et non perpendiculaires au plan de polarisation; et 2° la densité de l'éther doit être supposée la même dans les deux milieux; d'où il suit que les masses d'éther correspondantes, imaginées par Fresnel, sont entre elles comme le sinus du double de l'angle d'incidence est au sinus du double de l'angle de réfraction. En substituant dans les équations de condition de Fresnel cette valeur du rapport des masses, on obtient des formules que je suis porté à regarder comme exactes. »

Les équations dont il est parlé dans cet extrait sont celles qui dérivent du principe des forces vives, et de l'équivalence des vibrations parallèles à la surface de séparation des deux milieux. Mais il est bon d'observer que si les vibrations s'exécutent toutes dans la même direction, c'est-à-dire si la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, les formules présentent une analogie remarquable avec celles d'Young pour deux boules élastiques, desquelles l'une choque directement l'autre supposée d'abord en repos; les masses des boules étant dans le même rapport que les masses d'éther citées plus haut. Il me semble que ce rapprochement conduit à l'explication la plus simple de la loi de Brewster, relative à l'angle de polarisation. En effet, s'il n'existe pas de mouvement réfléchi quand les boules sont égales, toute la vitesse du choc étant communiquée à la boule qui était d'abord en repos, de même il n'y a pas de vibration réfléchie quand les masses d'éther sont égales, c'est-à-dire quand le sinus du double de l'angle d'incidence est égal au sinus du double de l'angle de réfraction, ou quand les angles d'incidence et de réfraction font ensemble un angle droit. La totalité de la vibration incidente passe alors dans le rayon réfracté. En général, si i_1 et i_2 représentent les angles d'incidence et de réfraction, les masses des boules supposées seront entre elles comme $\sin 2i_1$ est à $\sin 2i_2$; et si la vitesse primitive est prise pour unité, la théorie du choc des corps donnera

$$\text{(i)} \qquad \frac{\sin 2i_1 - \sin 2i_2}{\sin 2i_1 + \sin 2i_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\tan (i_1 - i_2)}{\tan (i_1 + i_2)},$$

pour la vitesse retenue par la boule choquante, et

$$\text{(ii)} \qquad \frac{2\sin 2i_1}{\sin 2i_1 + \sin 2i_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin 2i_1}{\cos (i_1 + i_2) \cos (i_1 - i_2)},$$

nant à la démonstration du théorème avancé dans cette remarque, en prouvant qu'il résulte nécessairement de nos hypothèses; nous en déduirons ensuite quelques résultats facilement comparables aux expériences.

Supposons la direction de la transversale incidente, telle qu'il n'y

---

pour la vitesse communiquée à l'autre boule. Ces expressions (i) et (ii) sont les mêmes que les valeurs de τ_3 et τ_2 que nous déduirions des équations (1) et (2) du texte, en supposant $\tau_1 = 1$, et les angles θ_1, θ_2, θ_3, droits. La construction générale conduit aux mêmes résultats, si nous déduisons les rapports limites des transversales, de la supposition que leurs directions se rapprochent successivement l'une de l'autre, pour coïncider enfin sur une droite perpendiculaire au plan d'incidence.

Quand les transversales sont toutes dans le plan d'incidence, ou quand la lumière est polarisée dans ce plan, les transversales incidente, réfléchie, et réfractée, sont respectivement entre elles comme $\sin(i_1+i_2)$, $\sin(i_1-i_2)$, $\sin 2i_1$; car chaque transversale est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les deux autres, et dans le cas actuel l'angle compris entre les deux transversales est égal à l'angle compris entre les rayons correspondants. De là, prenant la transversale incidente pour unité, la transversale réfléchie est

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)},$$

et la transversale réfractée

$$\text{(iv)} \qquad \frac{\sin 2i_1}{\sin(i_1 + i_2)}.$$

On a déjà observé que notre théorie diffère de celle de Fresnel, eu égard à la grandeur des transversales réfractées. Les expressions (ii) et (iv) doivent, en effet, être multipliées chacune par $\frac{\sin i_2}{\sin i_1}$ pour produire les expressions correspondantes qui résultent des hypothèses de Fresnel. Mais les deux théories diffèrent aussi par les deux directions relatives des transversales incidente et réfléchie. Car, en supposant que la lumière tombe sur un milieu plus réfringent, ou que i_1 soit plus grand que i_2, notre construction indique que ces transversales, quand l'angle d'incidence est petit, tendent vers la même direction, tandis que Fresnel conclut précisément le contraire. Cependant ce désaccord cesse quand on approche de l'incidence limite de 90°; car les deux théories s'accordent à faire tendre les deux transversales, incidente et réfléchie, vers des directions opposées. Cette dernière conclusion est conforme à la conséquence que le professeur Lloyd a tirée de ses expériences sur l'interférence de la lumière directe et de la lumière réfléchie sous une incidence très-oblique (Voyez *Irish. Acad. Trans.*, vol. XVII, page 176).

ait qu'un seul rayon réfracté. Il est évident que les trois transversales doivent se trouver dans un même plan, puisque, par notre quatrième hypothèse, la vibration réfractée est la résultante des vibrations incidente et réfléchie; il suffit donc de prouver que ce plan des transversales n'est autre que le plan polaire du rayon réfracté. Soient τ_1, τ_2, τ_3, les longueurs respectives des trois transversales, incidente, réfractée et réfléchie; θ_1, θ_2, θ_3, les angles qu'elles font avec le plan d'incidence (θ_2 étant connu par la théorie de Fresnel); i_1, i_2, i_3, les inclinaisons des trois ondes planes sur la surface du cristal; enfin m_1, m_2, m_3, les masses relatives d'éther mises en mouvement par ces ondes. Alors nos quatre hypothèses donneront les quatre équations suivantes :

$$(1) \qquad m_1\tau_1^2 = m_2\tau_2^2 + m_3\tau_3^2,$$

$$(2) \qquad \tau_1 \sin\theta_1 + \tau_3 \sin\theta_3 = \tau_2 \sin\theta_2,$$

$$(3) \qquad \tau_1 \cos\theta_1 \cos i_1 + \tau_3 \cos\theta_3 \cos i_3 = \tau_2 \cos\theta_2 \cos i_2,$$

$$(4) \qquad \tau_1 \cos\theta_1 \sin i_1 + \tau_3 \cos\theta_3 \sin i_3 = \tau_2 \cos\theta_2 \sin i_2.$$

La première équation est évidemment la traduction de la loi de conservation des forces vives : les trois autres équations sont données par le principe des vibrations équivalentes, en décomposant les vibrations, ou les transversales, sur trois directions rectangulaires. Dans la seconde équation les trois transversales sont projetées perpendiculairement au plan d'incidence, dans la quatrième perpendiculairement à la face du cristal, et dans la troisième parallèlement à l'intersection de ces deux plans. Quand les angles θ_1, θ_2, θ_3, commencent, les transversales sont dans le plan d'incidence, dans une telle position relative, que si leur système tournait dans ce plan d'un angle droit, elles se trouveraient chacune dans la direction vers laquelle marche son onde plane. Ces angles croissent, du même côté du plan d'incidence, de 0° à 360°. Les angles i_1, i_2, i_3, sont ceux d'incidence, de réfraction et de réflexion; mais, pour plus de symétrie, ils désignent les angles que les normales aux ondes planes, menées par l'origine dans les directions de leurs mouvements, font avec la perpendiculaire à la surface, dirigée vers l'intérieur du cristal. Il arrive ainsi que i_3 est le supplément de i_1 : d'après cette relation, les équations (3) et (4) donnent

$$(5)\quad \begin{cases} \tau_1 \cos\theta_1 - \tau_3 \cos\theta_3 = \tau_2 \cos\theta_2 \dfrac{\cos i_2}{\cos i_1}, \\ \tau_1 \cos\theta_1 + \tau_3 \cos\theta_3 = \tau_2 \cos\theta_2 \dfrac{\sin i_2}{\sin i_1}, \end{cases}$$

et par addition et soustraction,

$$(6)\quad \tau_1 = \tau_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \frac{\sin(i_1 + i_2)}{\sin 2 i_1}, \qquad \tau_3 = \tau_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3} \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin 2 i_1}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (1) et (2), en observant que $m_3 = m_1$, comme cela est évident, on obtient

$$(7)\quad \frac{\sin^2(i_1 + i_2)}{\cos^2\theta_1} - \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\cos^2\theta_3} = \frac{m_2}{m_1} \frac{\sin^2 2 i_1}{\cos^2\theta_2},$$

$$(8)\quad \sin(i_1 + i_2) \operatorname{tang}\theta_1 - \sin(i_1 - i_2) \operatorname{tang}\theta_3 = \sin 2 i_1 \operatorname{tang}\theta_2.$$

Retranchant de l'équation (7) l'identité

$$\sin^2(i_1 + i_2) - \sin^2(i_1 - i_2) = \sin 2 i_1 \sin 2 i_2,$$

il reste

$$(9)\quad \begin{cases} \sin^2(i_1 + i_2) \operatorname{tang}^2\theta_1 - \sin^2(i_1 - i_2) \operatorname{tang}^2\theta_3 \\ \qquad = \dfrac{\sin^2 2 i_1}{\cos^2\theta_2} \left(\dfrac{m_2}{m_1} - \dfrac{\sin 2 i_2}{\sin 2 i_1} \cos^2\theta_2 \right); \end{cases}$$

et cette équation, en posant

$$(10)\quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin 2 i_2 + 2 h \sin^2\theta_2}{\sin 2 i_1},$$

devient

$$(11)\quad \begin{cases} \sin^2(i_1 + i_2) \operatorname{tang}^2\theta_1 - \sin^2(i_1 - i_2) \operatorname{tang}^2\theta_3 \\ \qquad = \sin 2 i_1 (\sin 2 i_2 + 2h) \operatorname{tang}^2\theta_2, \end{cases}$$

et est divisible par l'équation (8), le quotient étant

$$(12)\quad \begin{cases} \sin(i_1 + i_2) \operatorname{tang}\theta_1 + \sin(i_1 - i_2) \operatorname{tang}\theta_3 \\ \qquad = (\sin 2 i_2 + 2h) \operatorname{tang}\theta_2. \end{cases}$$

Alors, ajoutant et retranchant les équations (8) et (12), on obtient

$$(13)\quad \begin{cases} \tang\theta_1 = \quad \cos(i_1 - i_2)\tang\theta_2 + \dfrac{h\tang\theta_2}{\sin(i_1+i_2)}, \\ \tang\theta_3 = -\cos(i_1+i_2)\tang\theta_2 + \dfrac{h\tang\theta_2}{\sin(i_1-i_2)}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les positions des transversales, incidente et réfléchie, quand h est connu.

Prenons pour axes des z, x, y, les directions choisies pour établir les équations (2), (3), (4); en sorte que l'origine étant O, le plan des xy soit le plan d'incidence, et l'axe des x sur la surface de cristal. Le rayon réfléchi étant placé dans l'angle fait par les directions positives des x et y, la condition initiale que nous avons donnée pour les angles θ_1, θ_2, θ_3, sera satisfaite, si l'on suppose que, lors de la naissance de ces angles, les transversales τ_1 et τ_2 tombent entre les directions négatives de x et y, et la transversale τ_3 entre $+x$ et $-y$. Alors si θ_1, θ_2, θ_3, sont comptés du côté de l'axe positif des z, de telle sorte que chacun d'eux puisse être de 90°, quand la transversale correspondante est parallèle à cet axe, les équations de la transversale τ_1 seront

$$(14)\qquad \frac{z}{\tang\theta_1} = -\frac{x}{\cos i_1} = -\frac{y}{\sin i_1},$$

et celles de τ_3

$$(15)\qquad \frac{z}{\tang\theta_3} = \frac{x}{\cos i_1} = -\frac{y}{\sin i_1}.$$

Soit l'équation

$$(16)\qquad z + Ax + By = 0$$

celle du plan passant par les directions τ_1, τ_2 et τ_3. Pour déterminer A et B, il faut éliminer les variables de cette équation (16), successivement à l'aide des groupes (14) et (15); ce qui conduit aux deux équations de condition

$$(17)\quad \tang\theta_1 - A\cos i_1 - B\sin i_1 = 0, \qquad \tang\theta_3 + A\cos i_1 - B\sin i_1 = 0,$$

qui, par addition et soustraction, donnent

$$(18)\qquad B = \frac{\operatorname{tang}\theta_1 + \operatorname{tang}\theta_3}{2\sin i_1}, \qquad A = \frac{\operatorname{tang}\theta_1 - \operatorname{tang}\theta_3}{2\cos i_1}.$$

Substituant dans ces valeurs les expressions (13) de $\operatorname{tang}\theta_1$, $\operatorname{tang}\theta_3$, on a

$$(19)\qquad \begin{cases} B = \operatorname{tang}\theta_2 \left(\sin i_2 + \dfrac{h\cos i_2}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2}\right), \\ A = \operatorname{tang}\theta_2 \left(\cos i_2 - \dfrac{h\sin i_2}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2}\right); \end{cases}$$

d'où, en faisant

$$(20)\qquad \operatorname{tang}k = \frac{h}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2},$$

on déduit

$$(21)\qquad \frac{B}{A} = \frac{\operatorname{tang} i_2 + \operatorname{tang}k}{1 - \operatorname{tang}k \operatorname{tang} i_2} = \operatorname{tang}(i_2 + k).$$

Mais si $z = 0$, dans (16), on a

$$(22)\qquad Ax + By = 0,$$

pour l'équation de la droite suivant laquelle le plan des transversales coupe le plan d'incidence. Cette droite est située entre les directions $+x$ et $-y$, comme la normale à l'onde réfractée; elle fait donc avec la direction des $-y$ un angle v qui a évidemment pour tangente $\frac{B}{A}$; et, d'après l'expression (21), on a

$$(23)\qquad v = i_2 + k.$$

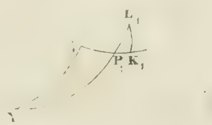
Ce qui montre que l'intersection des deux plans est inclinée, sur la normale à l'onde réfractée, d'un angle k.

Il faut maintenant chercher la valeur de h, qui dépend des masses relatives d'éther mises en mouvement par les ondes incidente et réfractée. Concevons que les rayons incident et réfracté soient des faisceaux cylindriques, ayant une section commune sur le plan des xz, ou sur la surface du cristal; supposons que chaque pinceau soit coupé par deux plans parallèles à son onde plane, et distants l'un de l'autre d'une longueur d'ondulation ; alors les volumes des cylindres compris entre ces plans représenteront les masses d'éther correspondantes, puisque, par notre seconde hypothèse, la densité du fluide est la même dans les deux milieux. Ces volumes sont l'un à l'autre dans le rapport composé, de leurs hauteurs qui sont les longueurs d'ondulation, et des aires de leurs bases. Les hauteurs sont évidemment entre elles comme $\sin i_1$ est à $\sin i_2$. La première base est une section perpendiculaire du faisceau incident, la seconde une section oblique du faisceau réfracté, l'obliquité étant égale à l'angle ε compris entre la normale à l'onde plane réfractée et son rayon. Les sections perpendiculaires des deux faisceaux sont entre elles comme les cosinus des angles qu'elles font avec la section commune des deux cylindres, ou comme $\cos i_1$ est à $\cos i_{(2)}$; $i_{(2)}$ désignant l'angle compris entre le rayon réfracté et la direction négative des y. La seconde base est plus grande que la section perpendiculaire du faisceau réfracté dans la proportion de l'unité à $\cos\varepsilon$. Tous ces rapports combinés donnent

(24) $$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin i_2 \cos i_{(2)}}{\sin i_1 \cos i_1 \cos\varepsilon}.$$

On peut obtenir directement le même résultat, en remarquant que, dans tout système d'ondes, les masses d'éther correspondantes sont proportionnelles aux ordonnées y des points où les rayons rencontrent leurs surfaces des ondes. J'appelle ici *système d'ondes* une onde incidente accompagnée de toutes les ondes qui en dérivent par réflexion et par réfraction, soit sur la même surface du cristal, soit sur des surfaces parallèles. Si au point où le rayon incident coupe son onde sphérique on mène un plan tangent à cette sphère, ce plan coupe le plan des xz suivant une droite parallèle à l'axe des z; si par cette droite on mène d'autres plans tangents à la surface des ondes en quatre points, ces plans tangents seront les ondes dérivées de l'onde incidente; et les points de contact, y compris celui de la sphère, seront les points où les rayons rencontrent leurs surfaces des ondes. Alors les masses correspondantes seront représentées par des prismes, ayant une base rectangulaire commune située sur le plan des xz; un des côtés de ce rectangle est la distance qui sépare l'origine O de l'intersection commune des plans tangents; la face triangulaire de chaque prisme a pour base cette même distance, et pour sommet un point de contact. Ces prismes ayant une base commune, seront proportionnels à leurs hauteurs, lesquelles sont les ordonnées y des points de contact. Cette proportionnalité conduit aisément à l'expression (24).

Soient T_1, P_1, Y_1, les points où OT, OP, et la direction négative des y, rencontrent l'onde sphérique de rayon OS; et L_1 le point où cette onde est traversée par la droite d'intersection du plan des transversales et du plan d'incidence. Alors les points Y_1, P_1, L_1, étant tous



dans le plan d'incidence, seront sur un même grand cercle $Y_1 P_1 L_1$; et menant les grands cercles $I_1 P_1$, $Y_1 T_1$, nous aurons $Y_1 P_1 = i_2$, $Y_1 T_1 = i_{(2)}$, $T_1 P_1 = \varepsilon$, et $Y_1 L_1 = \upsilon = i_2 + k$, d'après (23); d'où $P_1 L_1 = k$.

Comme la transversale τ_2 est perpendiculaire au plan OTP, ou au plan du grand cercle $T_1 P_1$, le cosinus de l'angle sphérique $T_1 P_1 Y_1$ est le sinus de θ_2, et le triangle $T_1 P_1 Y_1$ donne conséquemment

$$(25) \qquad \cos i_{(2)} = \cos i_2 \cos \varepsilon + \sin i_2 \sin \varepsilon \sin \theta_2;$$

cette valeur, substituée dans l'équation (24), donne

$$(26) \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin 2 i_2 + 2 \sin^2 i_2 \sin \theta_2 \tan \varepsilon}{\sin 2 i_1}.$$

Si l'on compare ce résultat avec l'expression (10), on trouve

$$(27) \qquad h = \frac{\sin^2 i_2 \tan \varepsilon}{\sin \theta_2};$$

d'où il suit, d'après l'équation (20), que

$$(28)\qquad \operatorname{tang} k = \frac{\sin^2 i_2 \operatorname{tang} \varepsilon}{(\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2)\sin \theta_2}.$$

Menons le grand cercle $L_1 K_1$ à angle droit sur $T_1 P_1$, et qui le rencontre en K_1; alors le plan de $L_1 K_1$ sera le plan des transversales, puisque ce dernier plan passe par L_1 et est perpendiculaire à $T_1 P_1$. Mais la tangente de $P_1 K_1$ est égale à la tangente de $P_1 L_1$ multipliée par le cosinus de l'angle P_1 ou par le sinus de θ_2; c'est pourquoi, désignant $P_1 K_1$ par ε_1, et rappelant que $P_1 L_1 = K$, nous trouvons

$$(29)\qquad \frac{\operatorname{tang} \varepsilon_1}{\operatorname{tang} \varepsilon} = \frac{\sin^2 i_2}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2}.$$

Maintenant, nous avons vu que le rapport de OP à OS, ou de OS à OG, est l'indice de réfraction; en sorte que $\sin^2 i_1$ est à $\sin^2 i_2$ comme OP à OG. D'où il suit, d'après (29), que

$$(30)\qquad \frac{\operatorname{tang} \varepsilon_1}{\operatorname{tang} \varepsilon} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OP} - \mathrm{OG}} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{GP}};$$

mais OG : GP :: tang TPG : tang TOG; et puisque $\mathrm{GOT} = \varepsilon$, il s'ensuit que $\varepsilon_1 = \mathrm{TPG} = \mathrm{KOP}$. Conséquemment, OK rencontrera la surface de la sphère au point K_1. Donc enfin, comme nous l'avons avancé, *quand il n'y a qu'un seul rayon réfracté, le plan des transversales est le plan polaire de ce rayon.*

Le signe de h est toujours le même que celui de l'angle sphérique $T_1 P_1 Y_1$. Mais, pour éloigner toute ambiguité par rapport à ce signe, nous devons faire quelques conventions additionnelles. Supposons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que la lumière réfractée se meuve de O à T, et concevons une droite menée par l'origine, parallèle à GT, et dirigée de G vers T; soit à chercher l'angle δ_2 que cette droite fait avec le plan d'incidence, et qui, comme θ_1, θ_2, provient d'une position initiale comprise entre les directions négatives de x et y. Alors δ_2 sera toujours égal, ou à l'angle P_1 du triangle sphérique $T_1 P_1 Y_1$, ou à l'angle rentrant $(360° - P_1)$, et $\cos \delta_2$ n'aura qu'une même valeur dans les deux cas. Conséquemment, si au lieu de (25 nous nous servons de la formule trigonométrique

$$\cos i_{(2)} = \cos i_2 \cos \varepsilon + \sin i_2 \sin \varepsilon \cos \delta_2, \tag{31}$$

nous trouvons

$$h = \frac{\sin^2 i_2 \cos \varepsilon \cos \delta_2}{\sin^2 \theta_2}, \tag{32}$$

valeur qui montre que le signe de h est toujours le même que celui de $\cos \delta_2$. Maintenant, comme θ_2 diffère de δ_2 d'un angle droit, nous supposerons

$$\theta_2 = \delta_2 + 90^\circ, \tag{33}$$

et nous aurons alors $\sin \theta_2 = \cos \delta_2$, algébriquement aussi bien que numériquement. Ainsi, en adoptant ces conventions, la valeur de h dans (27) aura le signe convenable. Substituant donc cette valeur de h dans les formules (13), on a

$$\left\{\begin{aligned} \tang \theta_1 &= \quad \cos(i_1 - i_2) \tang \theta_2 + \frac{\sin^2 i \tang \varepsilon}{\cos \theta_2 \sin(i_1 + i_2)}, \\ \tang \theta_3 &= -\cos(i_1 + i_2) \tang \theta_2 + \frac{\sin^2 i_2 \tang \varepsilon}{\cos \theta_2 \sin(i_1 - i_2)}. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Ces formules donnent les directions uniradiales, ou les positions des transversales incidente et réfléchie, quand le seul rayon réfracté est celui que nous avons considéré. Les directions semblables, quand l'autre rayon existe seul, sont données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \tang \theta'_1 &= \quad \cos(i_1 - i'_2) \tang \theta'_2 + \frac{\sin^2 i'_2 \tang \varepsilon'}{\cos \theta'_2 \sin(i_1 + i'_2)}, \\ \tang \theta'_3 &= -\cos(i_1 + i'_2) \tang \theta'_2 + \frac{\sin^2 i'_2 \tang \varepsilon'}{\cos \theta'_2 \sin(i_1 - i'_2)}, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

où toutes les quantités, à l'exception de i_1 qui reste le même, sont marquées d'un accent, pour indiquer qu'elles appartiennent au second rayon réfracté.

Les directions uniradiales étant trouvées par ces équations, les grandeurs relatives des transversales uniradiales sont déterminées par les équations (6). Quand la transversale incidente n'est pas uniradiale, il est évident, comme nous l'avons dit plus haut, qu'elle peut être décomposée sur les deux directions uniradiales [*]; que chaque transversale composante, comme si l'autre n'existait pas, fournira un des rayons réfractés, et une transversale réfléchie partielle sur une des directions uniradiales; enfin que la transversale réfléchie totale sera la résultante des deux transversales partielles.

---

[*] Il paraît très-évident que, si une transversale incidente est décomposée sur deux directions quelconques, les transversales réfractée et réfléchie, déduites directement de cette transversale incidente, seront les résultantes de celles qui se déduiraient des composantes traitées chacune séparément; supposer qu'il en pût être autrement, ce serait faire violence à nos idées sur la physique. Néanmoins il est nécessaire de prouver que ce principe n'est pas contraire à la loi des forces vives, car, bien que la force vive puisse être conservée pour chaque couple de composantes, comme cela a lieu, par exemple, quand elles sont uniradiales, nous ne pouvons cependant en conclure qu'elle sera nécessairement conservée par leurs résultantes. Là se trouve une preuve de la vérité de notre théorie; car nous sommes parvenus à démontrer que la loi des forces vives n'est pas enfreinte par l'adoption du principe en question. Quelles que puissent être les deux directions sur lesquelles la transversale incidente est décomposée, comme les transversales réfléchie et réfractée qui appartiennent à chaque composante peuvent être obtenues à l'aide d'une décomposition sur les directions uniradiales, il suffit de considérer le cas de cette dernière décomposition.

La transversale incidente étant désignée par T_1, soit T_3 la transversale réfléchie déterminée par les règles données dans le texte; soient τ_1, τ'_1, les composantes uniradiales de la première; τ_3, τ'_3, celles de la seconde. Alors on aura

$$T_1^2 = \tau_1^2 + \tau_1'^2 + 2\tau_1 \tau'_1 \cos(\theta_1 - \theta'_2), \quad T_3^2 = \tau_3^2 + \tau_3'^2 + 2\tau_3 \tau'_3 \cos(\theta_3 - \theta'_3),$$

où $\theta_1, \theta'_1, \theta_3, \theta'_3$, ont les mêmes significations que dans le texte. La force vive d'un rayon réfracté est $m_1(\tau_1^2 - \tau_3^2)$, et celle de l'autre $m(\tau_1'^2 - \tau_3'^2)$; la force vive des deux rayons réfractés est donc $m_1(\tau_1^2 + \tau_1'^2 - \tau_3^2 - \tau_3'^2)$, quantité qui doit être égale à $m_1(T_1^2 - T_3^2)$; c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\text{(V)} \qquad \tau_1 \tau'_1 \cos(\theta_1 - \theta'_2) = \tau_3 \tau'_3 \cos(\theta_3 - \theta'_3),$$

ou, à l'aide des expressions (6) pour τ_1, τ_3, et de leurs semblables pour τ'_1, τ'_3,

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin(i_1 - i_2)\sin(i_1 - i'_2)(1 + \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta'_1) \\ = \sin(i_1 - i_2)\sin(i_1 - i'_2)(1 + \operatorname{tang}\theta_3 \operatorname{tang}\theta'_3), \end{array} \right.$$

Quand $\theta_3 = \theta'_3$, les transversales partielles réfléchies doivent coïncider, et leur résultante aura une direction fixe, indépendante de la direction de la transversale incidente. L'angle d'incidence correspondant à ce cas est l'angle de polarisation, et la valeur commune de θ_3 et θ'_3 est la déviation. Si, à l'angle de polarisation, les transversales partielles réfléchies sont égales en grandeur, et opposées en direction, leur résultante s'évanouit, et le rayon réfléchi disparaît. C'est ce qui arrive quand la transversale incidente est dans le plan des deux transversales réfractées, et située sur l'intersection de ce plan avec l'onde plane incidente; car lorsqu'il n'y a pas de rayon réfléchi, la transversale incidente seule doit être équivalente aux deux transversales réfractées.

Puisque la transversale réfléchie peut être annulée à l'angle de po-

---

ou enfin, par la substitution des valeurs (13) et de leurs semblables,

$$\text{(vii)} \qquad \sin(i_2 + i'_2)\,[\cos(i_2 - i'_2) + \operatorname{cotang}\theta_2 \operatorname{cotang}\theta'_2] + h + h' = 0;$$

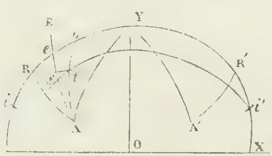
équation dans laquelle h' désigne pour un rayon réfracté ce que h désigne pour l'autre; la valeur de h étant donnée par la formule (27), et h' par la même formule avec des lettres accentuées. On peut observer que l'angle d'incidence a disparu de cette équation.

Donc si les lois que nous avons obtenues sont réellement celles de la réflexion cristalline, cette dernière équation (vii) doit être satisfaite à l'aide des relations déduites des lois de la propagation; ou mieux, cette équation doit exprimer une propriété de la surface des ondes d'un cristal, quoiqu'il puisse paraître étrange que cette propriété puisse dériver des lois de la réflexion, lois qui paraîtraient au premier abord n'avoir aucun rapport avec la forme de la surface des ondes. Or nous avons trouvé que cette équation (vii) exprime une propriété rigoureusement vraie de la surface des ondes d'un cristal à deux axes découverte par Fresnel; fait très-curieux, qui prouve, non-seulement que les lois de la réflexion et celles de la réfraction sont parfaitement adaptées l'une à l'autre, mais aussi que ces deux espèces de lois ont leur source commune dans d'autres lois plus intimes, et non encore découvertes. En réalité les lois de la réflexion ne sont pas indépendantes par elles-mêmes, car les expressions (iii) et (iv) de la note précédente, sur la réflexion ordinaire, sont déduites du principe des vibrations équivalentes, et satisfont en outre à la loi des forces vives. Il y a lieu d'espérer que de nouveaux progrès dans l'optique physique conduiront à des principes plus élevés et plus élémentaires, qui établiront un lien naturel entre les lois de la réflexion et celles de la propagation, comme entre les parties d'un même système.

larisation, cet angle peut être trouvé directement, en supposant que la force vive du rayon incident est égale à la somme des forces vives des deux rayons réfractés, et en exprimant que la transversale incidente est la résultante des deux transversales réfractées. Si l'on décompose les transversales parallèlement aux axes coordonnés, ces conditions donneront quatre équations, entre lesquelles on pourra éliminer les rapports des trois transversales, et l'angle suivant lequel la transversale incidente est inclinée sur le plan d'incidence. Dans l'équation qui résultera de cette élimination, l'angle d'incidence sera l'angle de polarisation, et les autres quantités étant connues en fonction de cet angle, cette équation le déterminera.

Il importe de remarquer que, pour tout autre angle d'incidence, si les ondes planes, incidente et réfléchie, sont coupées par le plan qui contient les deux transversales réfractées, les intersections seront les directions de deux transversales correspondantes; c'est-à-dire que si la transversale incidente coïncide avec une des intersections, la transversale réfléchie coïncidera avec l'autre. Car il est évident, par notre quatrième hypothèse, que si trois transversales sont dans un même plan, la quatrième doit pareillement s'y trouver.

Appliquons maintenant notre théorie au cas d'un cristal à un axe, et prenons un cristal négatif, tel que le spath d'Islande, où la réfraction ordinaire est plus puissante que la réfraction extraordinaire. Sur la sphère décrite du centre O avec le rayon OS, soit XY le grand cercle



situé dans le plan d'incidence, les rayons OX et OY étant les directions positives des axes des x et des y. Supposons que les droites Oi et Oi', coupant la sphère en i et i', soient les rayons incident et réfléchi; imaginons que le rayon ordinaire, et la normale à l'onde extraordinaire, soient prolongés en arrière, pour rencontrer la sphère du côté de la lumière incidente dans les points o et e; soit la droite OA, coupant la sphère en A, la direction de l'axe du cristal; et soient menés les grands cercles Ao, Ae, AY. Les points i, e, o, i', sont tous sur le cercle XY. Le point E, où le rayon extraordinaire OE prolongé en arrière rencontre la sphère, sera sur le cercle Ae; et si, comme dans la figure, l'arc Ae est plus petit qu'un quadrans, le point e sera situé entre A et E. Le plan polaire du rayon ordinaire est évidemment le plan du cercle Ao; mais la détermination du plan polaire de l'autre rayon exige la construction suivante : sur l'arc AeE, prenez la portion ef, telle que e puisse être situé entre E et f, et que $\tan ef$ soit à $\tan \mathrm{E}e$ comme $\sin^2 e\mathrm{Y}$ est à $(\sin^2 i\mathrm{Y} - \sin^2 e\mathrm{Y})$. Par f menez le grand cercle ft, perpendiculaire au cercle AeE; il est évident, d'après la formule (29), que le plan de ft est le plan polaire du rayon extraordinaire. Sur chaque circonférence Ao et ft, les points qui sont distants de 90° de i et de i', en mesurant les distances par des arcs de grands cercles, sont les points où les transversales uniradiales, venant du centre O, coupent la sphère. Soient t le point d'intersection de Ao et de ft, et ti' l'arc de grand cercle qui unit le point t au point i'. Quand l'arc ti' est un quadrans, les deux transversales uniradiales, appartenant au rayon réfléchi, coïncident toutes les deux avec la droite Ot; l'angle d'incidence est alors l'angle de polarisation, le plan de ti' est le plan de polarisation du rayon réfléchi, et l'angle ti'Y est la déviation.

Pour trouver les équations propres aux cristaux à un axe, nous supposerons que les formules (34) appartiennent au rayon ordinaire, et les formules (35) au rayon extraordinaire. Alors $\varepsilon = 0$, et $\varepsilon' = \text{arc } \mathrm{E}e$. Désignant par θ et θ' les angles sphériques Aoi, Aei, on verra aisément que $\theta_2 = \theta + 180°$, $\theta'_2 = \theta' + 90°$, si l'on conçoit que le point A et l'axe positif des z soient en avant du plan XOY. Et si ω' désigne l'arc Ae, tandis que b et a désignent les réciproques des indices principaux, ordinaire et extraordinaire, la loi d'Huyghens, concernant la double réfraction des cristaux à un axe, donnera

$$(36) \qquad \tan \varepsilon' = \frac{a^2 - b^2}{\mathrm{S}^2} \sin \omega' \cos \omega',$$

où

$$(37) \qquad \mathrm{S}^2 = \frac{\sin^2 i_2}{\sin^2 i_1} = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \omega'.$$

Pour toutes ces relations, on a, d'après les formules (34),

$$(38)\qquad \operatorname{tang}\theta_1 = \cos(i_1 - i_2)\operatorname{tang}\theta,\quad \operatorname{tang}\theta_3 = -\cos(i_1 + i_2)\operatorname{tang}\theta,$$

pour le rayon ordinaire; et d'après les formules (35),

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\theta'_1 &= -\cos(i_1 - i'_2)\operatorname{cotang}\theta' - (a^2 - b^2)\frac{\sin\omega'\cos\omega'\sin^2 i_1}{\sin\theta'\sin(i_1 + i'_2)},\\ \operatorname{tang}\theta'_3 &= \cos(i_1 + i_2)\operatorname{cotang}\theta' - (a^2 - b^2)\frac{\sin\omega'\cos\omega'\sin^2 i_1}{\sin\theta'\sin(i_1 - i'_2)},\end{aligned}\right.$$

pour le rayon extraordinaire.

Les quatre équations précédentes déterminent les directions uniradiales; et l'équation suivante

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos(i_1 + i_2)\operatorname{tang}\theta + \cos(i_1 + i'_2)\operatorname{cotang}\theta'\\ &\qquad\qquad - (a^2 - b^2)\frac{\sin\omega'\cos\omega'\sin^2 i_1}{\sin\theta'\sin(i_1 - i'_2)} = 0,\end{aligned}\right.$$

obtenue en posant $\operatorname{tang}\theta_3 = \operatorname{tang}\theta'_3$, est celle qui détermine l'angle de polarisation.

En faisant usage de cette dernière équation pour en déduire les lois de l'angle de polarisation dans différentes positions de l'axe du cristal, nous nous bornerons au cas où la réflexion a lieu dans l'air, parce que l'angle $(i_1 - i'_2)$ est alors considérable, tandis que les quantités $\cos(i_1 + i_2)$ et $\cos(i_1 + i'_2)$ sont petites, en sorte qu'il sera aisé d'arriver à des résultats approximatifs. Car nous aurons, en premier lieu,

$$(41)\qquad \cos(i_1 + i'_2) = \cos(i_1 + i_2) - (i'_2 - i_2),$$

à très-peu près, puisque $(i_1 + i_2)$ ne diffère pas beaucoup de l'angle droit; et parce que

$$(42)\qquad \sin i_2 = b\sin i_1,\quad \sin i'_2 = \mathrm{S}\sin i_1,$$

nous aurons aussi, rigoureusement,

$$(43)\ \sin^2 i'_2 - \sin^2 i_2 = (\mathrm{S}^2 - b^2)\sin^2 i_1 = (a^2 - b^2)\sin^2\omega'\sin^2 i_1,$$

ou

$$(44)\qquad \sin(i'_2 - i^2) = (a^2 - b^2)\frac{\sin^2\omega'\sin^2 i_1}{\sin^2(i'_2 + i_2)},$$

formule que l'on peut écrire ainsi

$$(45)\qquad i'_2 - i_2 = (a^2 - b^2)\frac{\sin^2\omega' \sin^2 i_1}{\sin^2 i_2},$$

avec une exactitude suffisante. Cette valeur de $(i'_2 - i_2)$ ayant été substituée dans (41), l'expression qui en résulte pour $\cos(i_1 - i'_2)$ doit être substituée dans la formule (40), qui devient alors

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos(i_1 + i_2)(\operatorname{tang}\theta + \cot\theta)\\ &\qquad -(a^2 - b^2)\sin^2 i_1 \sin\omega\left(\frac{\sin\omega\cot\theta}{\sin 2i_2} + \frac{\cos\omega}{\sin\theta\cos 2i_2}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

si, désignant l'arc Ao par ω, nous confondons ω' avec ω, θ' avec θ, et que nous écrivions $\cos 2i_2$ au lieu de $\sin(i_1 - i'_2)$. Multipliant tous les termes de (46) par $\sin\theta\cos\theta$, nous trouvons

$$(47)\qquad \cos(i_1 + i_2) = (a^2 - b^2)\sin^2 i_1 \sin\omega\cos\theta\left(\frac{\sin\omega\cos\theta}{\sin 2i_2} + \frac{\cos\omega}{\cos 2i_2}\right).$$

De A menons l'arc AR coupant l'arc iY à angle droit au point R, et prenons $\mathrm{RY} = p$, $\mathrm{AR} = q$. Alors, à l'aide des valeurs

$$(48)\qquad \cos\omega = \cos q\cos(p - i_2),\quad \sin\omega\cos\theta = \cos q\sin(p - i_2),$$

données par le triangle rectangle ARo, l'équation (47) prendra la forme

$$(49)\qquad \cos(i_1 + i_2) = \frac{(a^2 - b^2)\sin^2 i_1}{\sin 2i_2\cos 2i_2}\cos^2 q\sin(p - i_2)\sin(p + i_2),$$

ou

$$(50)\qquad \cos(i_1 + i_2) = k\cos^2 q(\sin^2 p - \sin^2 i_2),$$

dans laquelle

$$(51)\qquad k = \frac{(a^2 - b^2)(1 + b^2)}{2b(1 - b^2)},$$

en posant $\operatorname{tang} i_2 = \operatorname{cotang} i_1 = b$, ce qui est encore suffisamment exact.

Nous obtenons ainsi $(i_1 + i_2)$, ou la somme de l'angle de polarisation et de l'angle de réfraction ordinaire. Le premier angle lui-même peut être déduit de la formule (50) à l'aide de la relation

$\sin i_2 = b \sin i_1$. Pour cela, si nous posons ϖ_1 au lieu de i_1 pour distinguer l'angle de polarisation des autres angles d'incidence, et si nous prenons

$$(52) \qquad K = \frac{k}{1+b^2} = \frac{a^2-b^2}{2b(1-b^2)},$$

nous trouverons

$$\varpi_1 = \varpi - K\cos^2 q\,(\sin^2 p - \sin^2 i_2),$$

équation dans laquelle ϖ est l'angle dont la cotangente est b : en d'autres termes, ϖ est l'angle de polarisation d'un milieu uniréfringent dont l'indice de réfraction serait égal à l'indice ordinaire du cristal.

Ce résultat rend compte d'un fait remarquable observé en 1819 par sir David Brewster, qui cherchait par l'expérience les lois de la réflexion cristalline. Il a trouvé que l'angle de polarisation reste le même quand on retourne le cristal de 180°, quoiqu'un des angles de réfraction change, et que la situation des rayons réfractés par rapport aux axes du cristal soit tout à fait différente. Cette circonstance, qui me surprit la première fois que j'en eus connaissance, est une conséquence immédiate de la formule (53); car l'effet d'une demi-révolution du cristal est de changer les signes de p et de q; or la nature de la formule est telle que ces changements de signe n'altèrent pas la valeur de ϖ_1. Cette valeur n'est pas non plus altérée lorsqu'on retourne le cristal jusqu'à ce que l'azimut, ou l'angle sphérique AYi, soit changé dans son supplément; car alors le signe de p est seul affecté.

Une autre remarque faite par le même observateur est encore une conséquence de la formule (53) : il résulte de ses expériences que, pour une surface donnée du cristal, l'angle de polarisation surpasse un certain angle constant d'une quantité proportionnelle au carré du sinus de l'azimut AYi. Appelons cet azimut α, et désignons par λ l'angle aigu qui mesure l'inclinaison de l'axe du cristal sur sa surface, en sorte que λ soit le complément de l'arc AY; nous aurons

$$(54) \qquad \sin q = \cos\lambda \sin\alpha, \qquad \tang p = \cot\lambda \cos\alpha;$$

substituant ces valeurs dans la formule (53), après avoir changé $\sin i_2$

en $\cos\varpi$, elle devient

$$(55)\qquad \varpi_1 = \varpi - \mathrm{K}(\sin^2\varpi - \sin^2\lambda) + \mathrm{K}\sin^2\varpi\cos^2\lambda\sin^2\alpha,$$

et s'accorde avec la remarque de Brewster.

La déviation θ_3 ou θ'_3 se trouve par la seconde des formules (38), en posant $\dfrac{\tang q}{\tang(p - i_2)}$ à la place de $\tang\theta$, et en substituant à $\cos(i_1 + i_2)$ la valeur (49) ou (50) qui correspond à l'angle de polarisation. On a ainsi

$$(56)\qquad \theta_3 = \theta'_3 = -\frac{k}{2}\sin 2q \sin(p + i_2);$$

car l'arc θ_3 peut être pris pour sa tangente. Ce résultat se transforme aisément dans celui-ci

$$(57)\qquad \theta_3 = \theta'_3 = -k\sin q\cos\varphi,$$

où φ désigne l'arc $\mathrm{A}i$, c'est-à-dire l'angle que le rayon incident fait avec l'axe du cristal; enfin cette dernière expression est équivalente à la suivante

$$(58)\qquad \theta_3 = \theta'_3 = -k\cos\lambda\sin\alpha(\sin\lambda\cos\varpi + \cos\lambda\sin\varpi\cos\alpha),$$

qui donne la déviation en λ et α.

Comme exemple d'application, nous ferons quelques calculs relatifs au spath d'Islande. Suivant M. Rudberg, l'indice ordinaire de ce cristal, pour un rayon situé dans la partie la plus brillante du spectre, à la limite de l'orangé et du jaune, est 1,66; et le plus petit indice extraordinaire pour le même rayon est 1,487; de là

$$\varpi = 58^\circ 56', \quad \mathrm{K} = 0{,}1164 = 6^\circ 40', \quad k = 0{,}1587 = 9^\circ 5'.$$

Ayant ainsi déterminé les constantes, nous pouvons aisément calculer l'angle de polarisation et la déviation pour tout couple de valeurs données de λ et α.

D'abord voyons comment l'angle de polarisation varie suivant différentes faces du cristal.

1°. Quand $\lambda = 90^\circ$, la face du cristal est perpendiculaire à l'axe, et

$\sin i_2 = b \sin i_1$. Pour cela, si nous posons ϖ_1 au lieu de i_1 pour distinguer l'angle de polarisation des autres angles d'incidence, et si nous prenons

(52) $$K = \frac{k}{1+b^2} = \frac{a^2 - b^2}{2b(1-b^2)},$$

nous trouverons

$$\varpi_1 = \varpi - K \cos^2 q (\sin^2 p - \sin^2 i_2),$$

équation dans laquelle ϖ est l'angle dont la cotangente est b : en d'autres termes, ϖ est l'angle de polarisation d'un milieu uniréfringent dont l'indice de réfraction serait égal à l'indice ordinaire du cristal.

Ce résultat rend compte d'un fait remarquable observé en 1819 par sir David Brewster, qui cherchait par l'expérience les lois de la réflexion cristalline. Il a trouvé que l'angle de polarisation reste le même quand on retourne le cristal de 180°, quoiqu'un des angles de réfraction change, et que la situation des rayons réfractés par rapport aux axes du cristal soit tout à fait différente. Cette circonstance, qui me surprit la première fois que j'en eus connaissance, est une conséquence immédiate de la formule (53); car l'effet d'une demi-révolution du cristal est de changer les signes de p et de q; or la nature de la formule est telle que ces changements de signe n'altèrent pas la valeur de ϖ_1. Cette valeur n'est pas non plus altérée lorsqu'on retourne le cristal jusqu'à ce que l'azimut, ou l'angle sphérique A$\mathrm{V}i$, soit changé dans son supplément; car alors le signe de p est seul affecté.

Une autre remarque faite par le même observateur est encore une conséquence de la formule (53) : il résulte de ses expériences que, pour une surface donnée du cristal, l'angle de polarisation surpasse un certain angle constant d'une quantité proportionnelle au carré du sinus de l'azimut A$\mathrm{V}i$. Appelons cet azimut α, et désignons par λ l'angle aigu qui mesure l'inclinaison de l'axe du cristal sur sa surface, en sorte que λ soit le complément de l'arc AY; nous aurons

(54) $$\sin q = \cos\lambda \sin\alpha, \qquad \tang p = \cot\lambda \cos\alpha;$$

substituant ces valeurs dans la formule (53), après avoir changé $\sin i_2$

en $\cos\varpi$, elle devient

$$(55)\qquad \varpi_1 = \varpi - \mathrm{K}(\sin^2\varpi - \sin^2\lambda) + \mathrm{K}\sin^2\varpi\cos^2\lambda\sin^2\alpha,$$

et s'accorde avec la remarque de Brewster.

La déviation θ_3 ou θ'_3 se trouve par la seconde des formules (38), en posant $\frac{\tang q}{\tang(p-i_2)}$ à la place de $\tang\theta$, et en substituant à $\cos(i_1+i_2)$ la valeur (49) ou (50) qui correspond à l'angle de polarisation. On a ainsi

$$(56)\qquad \theta_3 = \theta'_3 = -\frac{k}{2}\sin 2q\sin(p+i_2);$$

car l'arc θ_3 peut être pris pour sa tangente. Ce résultat se transforme aisément dans celui-ci

$$(57)\qquad \theta_3 = \theta'_3 = -k\sin q\cos\varphi,$$

où φ désigne l'arc Ai, c'est-à-dire l'angle que le rayon incident fait avec l'axe du cristal; enfin cette dernière expression est équivalente à la suivante

$$(58)\qquad \theta_3 = \theta'_3 = -k\cos\lambda\sin\alpha(\sin\lambda\cos\varpi + \cos\lambda\sin\varpi\cos\alpha),$$

qui donne la déviation en λ et α.

Comme exemple d'application, nous ferons quelques calculs relatifs au spath d'Islande. Suivant M. Rudberg, l'indice ordinaire de ce cristal, pour un rayon situé dans la partie la plus brillante du spectre, à la limite de l'orangé et du jaune, est 1,66; et le plus petit indice extraordinaire pour le même rayon est 1,487; de là

$$\varpi = 58°56', \quad \mathrm{K} = 0{,}1164 = 6°40', \quad k = 0{,}1587 = 9°5'.$$

Ayant ainsi déterminé les constantes, nous pouvons aisément calculer l'angle de polarisation et la déviation pour tout couple de valeurs données de λ et α.

D'abord voyons comment l'angle de polarisation varie suivant différentes faces du cristal.

1°. Quand $\lambda = 90°$, la face du cristal est perpendiculaire à l'axe, et

ϖ_1 est indépendant de α. Dans ce cas la formule (55) donne

$$\varpi_1 = \varpi + k \cos^2 \varpi = 60^\circ\, 42'$$

pour la valeur maxima de l'angle de polarisation.

2°. Quand $\lambda = 0$, la face du cristal est parallèle à l'axe, et la formule (55) devenant

$$\varpi_1 = \varpi - k \sin^2 \varpi \cos^2 \alpha,$$

montre que $\varpi_1 = \varpi$ quand $\alpha = 90^\circ$ ou 270°. Mais quand α est 0° ou 180°, on obtient

$$\varpi_1 = \varpi - k \sin^2 \varpi = 54^\circ 2'$$

pour la valeur minima de l'angle de polarisation.

3°. Pour une face de clivage naturel du cristal la valeur de λ est de $45^\circ 23'$. De là, quand $\alpha = 0$, ou 180°,

$$\varpi_1 = \varpi - k (\sin^2 \varpi - \sin^2 \lambda) = 57^\circ\, 2';$$

et quand $\alpha = 90^\circ$, ou 270°,

$$\varpi_1 = \varpi + k \cos^2 \varpi \sin^2 \lambda = 59^\circ 50'.$$

Ces valeurs des angles de polarisation s'accordent très-bien avec les expériences de sir David Brewster, et mieux encore avec celle de M. Seebeck.

Si nous désirons connaître dans quel azimut ϖ_1 est égal à ϖ sur une surface donnée du cristal, il est évident d'après l'équation (55) que nous devons faire

$$\sin^2 \varpi - \sin^2 \lambda = \sin^2 \varpi \cos^2 \lambda \sin^2 \alpha,$$

ou plus simplement

$$(59) \qquad \cos \alpha = \pm \frac{\operatorname{tang} \lambda}{\operatorname{tang} \varpi}.$$

Cette formule montre que la chose est impossible si λ est plus grand que ϖ; et que, si λ est moindre que ϖ, quatre azimuts satisfont à la question. En effet, il y a généralement quatre valeurs de α qui correspondent à toute autre valeur particulière de l'angle de polarisation; α' étant le plus petit de ces azimuts, les autres seront

$$180^\circ - \alpha', \quad 180^\circ + \alpha', \quad 360^\circ - \alpha'.$$

Sur une face naturelle du cristal, la valeur de α', répondant à la supposition $\varpi_1 = \varpi$, est $52^\circ 22'$.

Indiquons ensuite les changements que la déviation éprouve dans quelques cas remarquables.

1°. Quand la face du cristal est perpendiculaire à l'axe, il n'y a évidemment pas de déviation;

2°. Quand la face du cristal est parallèle à l'axe, la déviation s'évanouit pour les azimuts 0°, 90°, 180°, 270°. Pour les azimuts qui surpassent de 45° chacun des précédents, la déviation est un maximum: car si nous posons $\lambda = 0$ dans la formule (58), le résultat sera

$$\delta_3 = -\frac{k}{2}\sin\varpi\sin 2\alpha;$$

et cette quantité, en négligeant son signe, est un maximum quand $\sin 2\alpha = \pm 1$. Le coefficient de $\sin 2\alpha$ est égal à $3^\circ 54'$, et donne conséquemment la plus grande valeur de la déviation. Suivant les expériences de M. Seebeck, cette valeur maxima est $3^\circ 57'$.

3°. Sur une surface de clivage naturel, la déviation s'évanouit pour les azimuts 0° et 180°, et aussi pour les azimuts tels que

$$\cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang}\varpi}, \quad \text{et} \quad \varpi_1 = \varpi.$$

Pour l'azimut de 45°, la déviation est $-3^\circ 35'$; pour l'azimut 90°, elle est $-2^\circ 32'$; pour l'azimut $127^\circ 38'$ elle s'évanouit; après quoi elle atteint un petit maximum avec un signe positif, et s'évanouit encore pour l'azimut 180°. Les valeurs calculées de la déviation s'accordent très-bien avec les observations de M. Seebeck.

Le signe de la déviation indique de quel côté du plan d'incidence se trouve le plan de polarisation. Mais la position de ce dernier plan est mieux indiquée par la transversale du rayon réfléchi. Si cette transversale et l'axe du cristal, menés par l'origine, du même côté du plan des xz, coupent la sphère aux points t et A, ces points se trouveront sur le même côté du grand cercle XY quand la déviation et le sinus de l'azimut n'auront pas le même signe algébrique; et ils seront sur des côtés opposés de ce cercle quand ces quantités auront le même signe. C'est pourquoi, si l'on suppose que le cristal tourne à partir de l'azimut zéro, les points t et A resteront sur le même côté de XY jusqu'à ce que A atteigne la position A' où l'angle $A'Yi = 127^\circ 38'$; le point t passera alors du côté opposé, où il restera jusqu'à ce que A atteigne l'azimut $232^\circ 22'$; de là, jusqu'à la fin de la révolution, les deux points se trouveront du même côté de XY.

Nous avons vu que la déviation s'évanouit toujours quand l'axe du cristal est sur le plan d'incidence; on pouvait le prévoir, puisque ce plan partage alors le cristal en deux parties symétriques. Dans cette circonstance le problème de la réflexion est plus facile, car les directions uniradiales sont évidemment parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence. Développons donc ce cas particulier.

1°. En premier lieu, quand il n'y a que le seul rayon réfracté ordinaire, les trois transversales sont dans le plan d'incidence, et la transversale de chaque rayon est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les deux autres. De là les proportions :

$$(60) \qquad \frac{\tau_1}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{\tau_2}{\sin 2 i_1} = \frac{\tau_3}{\sin(i_1 - i_2)},$$

qui sont les mêmes que pour les milieux uniréfringents.

2°. En second lieu, quand il n'y a que le seul rayon réfracté extraordinaire, les trois transversales sont perpendiculaires au plan d'incidence; et si l'on emploie des accents pour désigner les quantités relatives à ce rayon, on a les équations

$$(61) \qquad \tau'_1 + \tau'_3 = \tau'_2, \qquad m_1 \tau_1'^2 = m'_2 \tau_2'^2 + m_1 \tau_3'^2,$$

qui donnent les proportions

$$(62) \qquad \frac{\tau'_1}{m_1 + m'_2} = \frac{\tau'_2}{2 m_1} = \frac{\tau'_3}{m_1 - m'_2},$$

d'où

$$(63) \qquad \frac{m'_2}{m_1} = \frac{\sin 2 i'_2 \pm 2 \sin^2 i'_2 \operatorname{tang} \varepsilon'}{\sin 2 i_1},$$

d'après (26); le signe supérieur, ou inférieur, étant pris dans le numérateur de (63), quand le rayon réfracté, ou la normale de son onde plane, fait le plus petit angle avec une perpendiculaire à la face du cristal.

Pour trouver l'angle de polarisation, il suffit de faire $m_1 = m'_2$, car alors τ'_3 s'évanouira d'après (62); et si la lumière incidente est commune, tout le pinceau réfléchi sera polarisé dans le plan d'incidence. Supposant toujours le cristal négatif, concevons que le rayon réfracté soit placé dans l'angle aigu fait par l'axe du cristal avec une perpendiculaire à sa surface. Il faudra prendre alors le signe + dans le numérateur de (63), et l'angle de polarisation sera donné par cette condition

$$(64) \qquad \sin 2 i_1 = \sin 2 i'_2 + 2 \sin^2 i'_2 \operatorname{tang} \varepsilon'.$$

Mais, d'après (36), on a en général

$$(65) \qquad \sin^2 i'_2 \operatorname{tang} \varepsilon' = (a^2 - b^2) \sin \omega' \cos \omega' \sin^2 i_1,$$

et dans le cas actuel il est évident que $\omega' = 90° - \lambda - i'_2$, où λ désigne comme ci-dessus l'angle que l'axe du cristal fait avec sa surface. Substituant ces valeurs dans (64), et multipliant tous les termes par $\operatorname{tang} i'_2$, on obtient

$$\sin^2 i'_2 = \cos i_1 \sin i_1 \operatorname{tang} i'_2 - (a^2 - b^2) \sin(\lambda + i'_2) \cos(\lambda + i'_2) \operatorname{tang} i'_2 \sin^2 i_1.$$

On a encore, d'après (37),

$$(66) \qquad \sin^2 i'_2 = b^2 \sin^2 i_1 + (a^2 - b^2) \cos^2 (\lambda - i'_2) \sin^2 i_1;$$

égalant ces deux expressions de $\sin^2 i'_2$, on trouvera

$$(67) \qquad \operatorname{tang} i'_2 = \frac{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}{\cot i_1 + (a^2 - b^2) \sin \lambda \cos \lambda}.$$

Enfin si l'on substitue cette valeur de $\operatorname{tang} i'_2$ dans (66), après avoir divisé tous les termes par $\cos^2 i'_2$, on obtient la formule simple et rigoureuse

$$(68) \qquad \sin^2 i_1 = \frac{1 - a^2 \cos^2 \lambda - b^2 \sin^2 \lambda}{1 - a^2 b^2} = \sin^2 \varpi_1,$$

pour déterminer l'angle de polarisation ϖ_1 quand l'axe du cristal est dans le plan d'incidence. Il est évident, d'après la nature de cette formule, que cet angle est le même pour les azimuts 0° et 180°, c'est-à-

32..

dire quand la lumière tombe à droite ou à gauche de la perpendiculaire à la surface du cristal.

Cette formule se trouve plus vite, en rappelant que les masses correspondantes m_1 et m'_2 sont proportionnelles aux ordonnées y, des points où le rayon incident et le rayon réfracté extraordinaire rencontrent leurs surfaces des ondes; d'où il suit que ces ordonnées doivent être égales pour l'angle de polarisation ; ce qui réduit la question à un problème de géométrie. Car, comme les deux rayons sont dans le plan d'incidence, l'axe des x sera coupé en un seul et même point par les droites touchant les surfaces des ondes, ou leurs sections, aux extrémités des ordonnées. Or les sections dans le plan des xy sont un cercle et une ellipse, ayant leur centre commun à l'origine; le rayon du cercle est l'unité, et les demi-axes de l'ellipse sont a et b, le dernier étant incliné de λ sur l'axe OX; le problème se réduit donc à mener, parallèlement à l'axe des x, une droite qui coupe le cercle et l'ellipse, de telle manière que les tangentes à ces courbes, aux deux points d'intersection situés sur le même côté de l'axe des y, puissent se couper sur l'axe des x. L'angle que la tangente au cercle fait avec l'axe des x est alors l'angle de polarisation ϖ_1; et la solution de ce problème conduit directement et aisément à la formule (68). Par cette manière d'envisager la question, on voit pourquoi l'angle de polarisation est le même dans les azimuts 0° et 180°; car si des tangentes sont appliquées aux deux autres points d'intersection, déterminés par la parallèle dont on vient de parler, il est évident que ces deux nouvelles tangentes se couperont aussi sur l'axe des x, puisque les tangentes menées aux extrémités d'une corde appartenant à un cercle, ou à une ellipse, coupent le diamètre parallèle à cette corde à égale distance du centre.

Supposons que la surface du cristal soit en contact avec un milieu fluide, dont l'indice principal de réfraction soit représenté par N; et soient B et A les indices des réfractions, ordinaire et extraordinaire, opérées du vide dans le cristal. Alors, substituant $\frac{N}{A}$ à a, et $\frac{N}{B}$ à b, dans la formule précédente, et faisant pour abréger

$$L^2 = A^2 \sin^2\lambda + B^2 \cos^2\lambda,$$

on en déduit aisément

$$(69) \qquad \operatorname{tang}^2 \varpi_1 = \frac{A^2 B^2 - L^2 N^2}{N^2 (L^2 - N^2)}.$$

Cette formule fait voir que si $L^2 = AB$, c'est-à-dire si $\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{\frac{B}{A}}$ (auquel cas λ ne sera jamais beaucoup plus grand, ni beaucoup plus petit que 45°), la valeur de ϖ_1 sera toujours possible; car on aura alors

$$(70) \qquad \operatorname{tang}^2 \varpi_1 = \frac{AB}{N^2}.$$

Mais si λ diffère de cette valeur, la valeur de ϖ_1 peut devenir impossible pour certaines valeurs de N. En effet, il est clair que si N tombe entre les limites L et $\frac{AB}{L}$, le numérateur et le dénominateur de la fraction (69) seront de signes contraires, et $\operatorname{tang}\varpi_1$ sera la racine carrée d'une quantité négative. Dans ce cas, si la lumière incidente est commune, « elle se refusera à être polarisée », comme l'exprime Brewster; en d'autres termes, il sera impossible de trouver un angle d'incidence pour lequel le faisceau réfléchi cesserait de contenir de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, ou pour lequel la transversale τ_3 s'évanouirait. Pour toutes les valeurs de N, autres que celles qui sont comprises entre les limites rapprochées L et $\frac{AB}{L}$, l'angle de polarisation est possible; il change rapidement, jusqu'à ce que N ait dépassé l'une ou l'autre de ces limites d'une quantité considérable comparée à l'intervalle qui les sépare.

La formule (68) donne $\varpi_1 = \lambda$, quand $a = 1$, ou $N = A$; et aussi $\varpi_1 = 90^\circ - \lambda$, quand $b = 1$, ou $N = B$. Dans le dernier cas, il faut remarquer qu'il n'y a pas de lumière réfléchie, lorsque de la lumière commune tombe sur le cristal sous l'incidence $90^\circ - \lambda$. Car alors on a $\tau' = 0$, et parce que $\tau_1 = \tau_2$, on a pareillement $\tau_3 = 0$; aucune lumière ne peut donc entrer dans le faisceau réfléchi. Mais ce cas mérite d'être étudié plus complétement, sans le restreindre par la supposition que l'axe du cristal soit situé dans le plan d'incidence.

Supposons donc que $N = B$, ou que l'indice de réfraction du fluide qui couvre la surface réfléchissante soit égal à l'indice ordinaire du vons ces cas pour en faire l'objet d'un nouveau Mémoire. Il nous serait aisé cependant d'écrire ici les solutions algébriques de ces problèmes particuliers, telles qu'elles résultent de notre théorie; mais ces solutions ne nous satisfont pas, comme étant encore trop compliquées, et je parviendrai sans doute à les réduire sous une forme plus simple. C'est le caractère de toutes les vraies théories, que plus elles sont étudiées, et plus simples elles paraissent; et l'on peut ajouter

---

formai d'abord une idée claire de ce que devait être cette règle, je la vérifiai pour le cas de la réfraction simple, et enfin je la démontrai pour le cas des cristaux biréfringents. La vérité de la règle pour ces cristaux dépend de la réalité des trois équations suivantes :

$$(\text{viii})\quad \left\{\begin{aligned} &\sin(i_{,,}+i'_{,,})\,[\cos(i_{,,}-i'_{,,})-\cot\theta_{,,}\cot\theta'_{,,}]+h_{,,}+h'_{,,}=0,\\ &\sin(i_2-i_{,,})\,[\cos(i_2-i_{,,})-\cot\theta_2\cot\theta_{,,}]+h_2-h_{,,}=0,\\ &\sin(i_2-i'_{,,})\,[\cos(i_2-i'_{,,})-\cot\theta_2\cot\theta'_{,,}]+h_2-h'_{,,}=0,\end{aligned}\right.$$

dont la notation se comprendra facilement. La première est la même que l'équation (vii) déjà signalée; les deux autres n'en diffèrent qu'en apparence, la différence des signes étant occasionnée par un changement dans la position relative des rayons.

Dans le cas de la réflexion totale, je suppose, en imitant Fresnel, que l'expression algébrique générale de chaque transversale réfléchie devient alors imaginaire, et, la mettant sous la forme

$$T(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

j'obtiens T pour la transversale réfléchie, et φ pour le changement de phase.

D'après la nature des règles que nous avons données, pour traiter la question de la réflexion sur les deux faces du cristal, il résulte que l'équation finale qui sert à déterminer la position d'une transversale est toujours du premier degré, quoique l'équation des forces vives soit du second degré. Ce résultat confirme pleinement notre théorie; mais il montre en même temps que la loi des forces vives ne doit pas être regardée comme un principe final, mais plutôt comme une conséquence de quelque loi élémentaire non encore découverte.

On voit maintenant que les conjectures avancées dans la note de la page 222 étaient hasardées, et qu'il y avait quelque erreur dans les calculs qui m'y ont conduit. Il est nécessaire de dire que la feuille, dans laquelle cette note se trouve, était imprimée avant que j'eusse obtenu le résultat annoncé dans la note postérieure de la page 240. Divers retards sont survenus tandis que mon Mémoire s'imprimait, et j'en ai profité pour lui donner plus de valeur, en y joignant des notes, sur quelques questions que j'avais dédaignées ou oubliées lors de mes premières recherches sur le sujet.

qu'un examen approfondi de ces théories trouve sa récompense dans les conséquences inattendues [*] qui se présentent d'elles-mêmes. Les lois de la double réfraction ont été énoncées par Fresnel de la manière la plus simple, et cependant les propriétés de la surface des ondes continuent toujours à fournir aux géomètres des relations nouvelles et curieuses. Nous pouvons donc espérer qu'un peu plus de temps, consacré aux lois de la réflexion, ne sera pas dépensé inutilement. Ces lois promettent de fournir beaucoup d'autres théorèmes qui ne seront pas indignes de fixer l'attention, quoiqu'ils ne soient peut-être pas aussi simples, ni aussi faciles à comprendre que ceux déjà connus.

Si l'on nous demandait d'appuyer, par quelques raisons, les hypothèses sur lesquelles se fonde la théorie qui précède, nous serions

---

[*] Comme preuve de cette vérité, on peut dire que la conclusion à laquelle conduit la note de la page 240, était totalement inattendue. En vérifiant l'équation (vii), j'ai découvert un théorème utile, car il m'a servi à trouver une expression traitable pour la tangente de l'angle ε, que la normale à l'onde fait avec le rayon. Cette expression manque pour appliquer les formules (34) et (35) aux cristaux à deux axes, et c'est un motif plus que suffisant pour l'introduire ici.

Ayant décrit une sphère concentrique à la surface de l'onde, prolongeons la normale à l'onde plane OP, et les deux axes optiques, qui sont les diamètres nodaux *de la surface des indices*, depuis le centre O jusqu'à la rencontre de la sphère aux points P_1, A, A_1, formant ainsi les sommets du triangle sphérique P_1AA_1. La même normale d'onde peut appartenir à deux rayons différents; et si nous choisissons un de ces rayons, sa transversale doit être située dans un plan mené par la normale à l'onde plane et coupant en deux parties égales l'angle sphérique AP_1A_1, ou son supplémentaire. En prolongeant l'un ou l'autre des axes optiques, on peut toujours faire en sorte que ce plan (appelé par Fresnel le plan de polarisation) opère la bissection de l'angle intérieur. Supposons que cette condition soit satisfaite pour le rayon choisi; représentons par ω et ω_1 les côtés P_1A et P_1A_1 du triangle sphérique, et par ψ l'angle compris AP_1A_1. Soit S la longueur de la normale d'onde, comprise entre le centre et le point où elle coupe le plan tangent à l'extrémité du rayon; enfin soient a et c le plus grand et le plus petit des demi-axes de l'ellipsoïde qui engendre la surface des ondes. Nous aurons alors

$$\text{(ix)} \qquad \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{a^2 - c^2}{2S^2} \sin \omega - \omega_1 \sin \frac{1}{2} \psi.$$

loin de pouvoir donner une réponse satisfaisante. Nous sommes obligés d'avouer que, à l'exception de la loi des forces vives, ces hypothèses ne sont que des conjectures heureuses. Ces conjectures sont très-probablement justes, puisqu'elles ont conduit à des lois élégantes, qui sont complétement vérifiées par l'expérience; mais c'est là tout ce que nous pouvons dire sur elles. Il est certain que la lumière est produite par des ondulations, qui se propagent par vibrations transversales, à travers un éther très-élastique; mais la constitution de cet éther, et les lois de son action sur les particules des corps, s'il en existe une, sont tout à fait inconnues. Le mécanisme particulier de la lumière est un secret que nous ne sommes pas encore capables de pénétrer. Cet état d'imperfection de la science paraît évident quand on observe que plusieurs phénomènes des plus simples et des plus familiers n'ont jamais été étudiés. Pour ne pas parler de la dispersion, sur laquelle on a tant écrit inutilement, nous pouvons remarquer que la vraie cause de la réfraction ordinaire, ou du retard que la lumière éprouve en pénétrant dans un milieu transparent, n'est pas

---

Et si ε_1 est l'angle que fait avec l'autre rayon la même normale d'onde, et S_1 la longueur de cette normale, on aura pareillement

$$\text{(x)} \qquad \tang \varepsilon_1 = \frac{a^2 - c^2}{2S_1^2} \sin(\omega + \omega_1) \cos \frac{1}{2} \psi.$$

Si l'on se donne la direction d'un rayon, il y a deux normales qui lui correspondent; et alors les angles ε et ε_1 que cette direction fait avec les deux normales sont donnés par les formules

$$\text{(xi)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \tang \varepsilon &= \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin(\omega - \omega_1) \sin \frac{1}{2} \psi, \\ \tang \varepsilon_1 &= \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin(\omega + \omega_1) \cos \frac{1}{2} \psi; \end{aligned} \right.$$

où r et r_1 représentent les deux rayons de la surface des ondes qui se trouvent sur la direction donnée; mais le triangle sphérique P_1AA_1, dont les côtés et l'angle compris sont encore exprimés par les mêmes lettres que ci-dessus, se forme maintenant en prolongeant la direction donnée, et les deux diamètres nodaux *de la surface des ondes*, jusqu'à ce qu'ils coupent la sphère aux points P_1, A, A_1.

du tout connue. Encore moins peut-on dire que la double réfraction a été rigoureusement expliquée ; seulement ses lois ont été clairement développées par Fresnel. Bref, la totalité de nos connaissances, eu égard à la propagation de la lumière, se réduit aux lois du phénomène; à peine quelques pas ont-ils été faits dans la théorie mécanique de ces lois. Et si le cas de la propagation non interrompue de la lumière à travers un milieu continu présente de telles difficultés, il serait inutile de songer à se rendre compte des lois qui subsistent aux confins de deux milieux, où la continuité n'existe plus.

Mais peut-être pourra-t-on faire quelques pas dans une autre direction, en regardant ces lois vérifiées comme rigoureusement exactes, et essayant de s'élever par elles à des principes plus généraux. Sous ce point de vue notre seconde hypothèse est extrêmement remarquable; car elle semble contraire, en quelque sorte, à l'idée que les molécules d'éther sont fortement attirées ou repoussées par les particules des corps pondérables. Quoi qu'il en soit, il paraîtrait qu'une vraie théorie doit s'accorder avec cette hypothèse, et que des idées mécaniques, qui feraient varier la densité moyenne de l'éther d'un milieu à un autre, ne peuvent être admises pour représenter les faits naturels. On ne saurait objecter contre l'hypothèse en question, qu'elle augmente la difficulté de rendre compte de la réfraction; car, comme l'évidence est positivement en faveur de cette hypothèse, il faut plutôt conclure que l'opinion commune qui attribue la réfraction à un changement de densité de l'éther, est tout à fait erronée.

On peut remarquer ensuite que notre quatrième hypothèse, concernant la direction des vibrations de la lumière polarisée, sera utile pour éprouver toute théorie qui sera proposée par la suite; car il semble maintenant certain que les vibrations sont parallèles, et non perpendiculaires au plan de polarisation comme Fresnel le supposait, cette direction des vibrations devant être regardée comme prouvée par les vérifications de notre théorie.

La troisième hypothèse, ou le principe de la conservation des forces vives, est la plus naturelle qu'on puisse imaginer, d'autant plus qu'elle exprime seulement que la lumière incidente est égale à la somme des lumières réfléchies et réfractées. Il est encore probable que ce principe même, comme la loi des forces vives dans les machines, n'est que le résultat d'autres lois plus simples, et que cette relation deviendra manifeste aussitôt que le vrai mécanisme de la lumière sera découvert.

La quatrième hypothèse est très-importante, car sur elle repose toute la théorie; c'est pour cela qu'au commencement de ce Mémoire, nous avons détaillé les recherches qui l'ont suggérée. Si nous voulions donner une raison à l'appui de cette hypothèse, nous pourrions dire que le mouvement d'une particule d'éther, à la surface commune de deux milieux, doit être le même, quel que soit celui des deux milieux auquel on admette que la particule appartienne; et comme les vibrations incidente et réfléchie sont supposées dans un des milieux, et les vibrations réfractées dans l'autre, on peut en conclure que la résultante des premières vibrations doit être la même, en grandeur et en direction, que la résultante des dernières. Au premier abord ce raisonnement paraît suffisamment exact; mais il ne supporte pas un examen approfondi. Car l'argument étant général, il prouverait que le principe de l'équivalence des vibrations est aussi vrai pour les métaux [*], que pour les milieux cristallisés, ce qui n'est certainement

[*] Peu de jours après la lecture de ce Mémoire, j'ai été conduit à démontrer, en quelque sorte, que dans les métaux les vibrations parallèles à la surface sont équivalentes, mais qu'il n'en est pas de même de celles qui lui sont perpendiculaires; et que pour les métaux, comme pour les substances cristallisées, la force vive est conservée. Cette démonstration est fondée sur un système de formules que j'ai trouvées, pour exprimer les lois de la réflexion et de la réfraction métalliques, et qui semblent representer d'une manière très-satisfaisante les expériences de Brewster (*Phil. Trans.* 1830). Comme les réflexions métallique et cristalline sont de même famille, et seront ramenées un jour à une même théorie, quelque distinctes qu'elles paraissent maintenant, il ne sera pas hors de place d'insérer ici les formules relatives aux métaux. Je ne propose pas ces formules comme absolument vraies, mais seulement comme vraisemblables; on verra qu'elles expliquent, au moins d'une manière générale, toutes les circonstances, regardées jusqu'ici comme des anomalies, que présente l'action des métaux sur la lumière.

Je suppose que, pour chaque métal, il existe deux constantes M et ψ, desquelles la première est un nombre plus grand que l'unité, et la seconde un angle compris entre 0° et 90°. J'appelle le nombre M le *module*, et l'angle ψ la *caractéristique* du métal. M et ψ varient tous deux avec la couleur de la lumière, et le rapport $\frac{M}{\cos\psi}$ est probablement pas. Il n'est pas aisé de voir pourquoi le principe embrasserait l'un des cas et non l'autre; l'obstacle provient sans doute de la cause inconnue qui produit un changement de phase dans la réflexion métallique.

Il sera convenable de terminer ce Mémoire par un résumé succinct des recherches faites par sir David Brewster, et par M. Seebeck, les seuls physiciens qui se soient occupés de la réflexion cristalline.

Dès 1819, sir D. Brewster publia, dans les *Transactions philoso-*

---

l'indice de réfraction. Il paraît résulter des expériences de Brewster que M diminue du rouge au violet; et c'est pourquoi nous supposerons que $\cos\psi$ diminue dans une plus grande proportion, pour que l'indice de réfraction puisse croître comme dans les substances transparentes.

Soient i_1 l'angle d'incidence, i_2 celui de réfraction, d'où

$$\text{(xii)}\qquad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{M}{\cos\psi};$$

et soit μ une variable déterminée par la condition

$$\text{(xiii)}\qquad \mu = \frac{\cos i_1}{\cos i_2};$$

ces deux relations combinées donneront

$$\text{(xiv)}\qquad \frac{1}{\mu^2} = 1 + \left(1 - \frac{\cos^2\psi}{M^2}\right)\operatorname{tang}^2 i_1;$$

formule qui montre que μ est égal à l'unité pour l'incidence perpendiculaire, et s'évanouit pour une incidence de 90°, en décroissant toujours dans l'intervalle.

Maintenant, si une onde plane de lumière polarisée tombe sur le métal, on doit distinguer deux cas principaux, suivant que la lumière est polarisée dans le plan d'incidence, ou dans le plan perpendiculaire. Dans le premier cas, désignant les transversales réfléchie et réfractée par τ_3 et τ_2, représentons par Δ_3 le changement de phase du rayon réfléchi, et par Δ_2 celui du rayon réfracté; les mêmes symboles, marqués avec des accents, ayant les mêmes significations pour le second cas. Alors, si la transversale incidente est prise pour unité, on aura les formules suivantes : 1° Si la transversale incidente est dans le plan d'incidence,

$$\text{(xv)}\quad \left\{\begin{aligned} \tau_3^2 &= \frac{M^2+\mu^2-2M\mu\cos\psi}{M^2+\mu^2+2M\mu\cos\psi}, & \tau_2^2 &= \frac{4M^2\mu^2}{M^2+\mu^2+2M\mu\cos\psi},\\ \operatorname{tang}\Delta_3 &= \frac{2M\mu\sin\psi}{M^2-\mu^2}, & \operatorname{tang}\Delta_2 &= \frac{\mu\sin\psi}{M+\mu\cos\psi}; \end{aligned}\right.$$

phiques (*Phil. Trans.*, 1819, p. 145), un Mémoire concernant « l'action des surfaces cristallisées sur la lumière ». Dans ce Mémoire, l'auteur décrit des expériences nombreuses et variées sur la polarisation par réflexion à la surface du spath d'Islande. Il donne les mesures des angles de polarisation pour différents azimuts, quand la réflexion a lieu dans l'air; mais il n'indique pas les déviations qui les accompagnent, probablement parce qu'elles étaient trop petites pour attirer son attention. Dans d'autres occasions, cependant, il a obtenu de très-grandes déviations. Il conçut l'idée de poursuivre ses expériences dans un cas

---

2° Si la tranversale incidente est perpendiculaire au plan d'incidence,

$$\text{(xvi)}\quad \left\{\begin{aligned} \tau_3'^2 &= \frac{1 + M^2\mu^2 - 2M\mu\cos\psi}{1 + M^2\mu^2 + 2M\mu\cos\psi}, & \tau_2'^2 &= \frac{4M^2\mu^2}{1 + M^2\mu^2 + 2M\mu\cos\psi},\\ \operatorname{tang}\Delta_3' &= \frac{2M\mu\sin\psi}{M^2\mu^2 - 1}, & \operatorname{tang}\Delta_2' &= \frac{\sin\psi}{M\mu + \cos\psi}. \end{aligned}\right.$$

Quand $\psi = 0$, il n'y a pas de changement de phase, et les formules deviennent identiques avec celles données dans la note de la page 229. Quand $\psi = 90°$, il y a réflexion totale pour toutes les incidences. Le cas de l'argent pur approche de celui-ci. Pour un bon miroir métallique ψ est environ 70°. La valeur de M est comprise entre $2\frac{1}{2}$ et 5 pour différents métaux.

Quand la transversale incidente est inclinée sur le plan d'incidence, ses composantes, parallèle et perpendiculaire à ce plan, donnent deux transversales réfléchies, avec une différence de phase égale à $\Delta_3' - \Delta_3$. La vibration réfléchie sera alors elliptique; la position et la grandeur relative des axes de l'ellipse décrite pourra se déduire des formules précédentes. Les conséquences de ces formules sont simples et élégantes, mais je ne puis les développer ici. Il suffit d'observer que chaque angle d'incidence a un autre angle qui lui correspond, et que j'appelle son conjugué; la valeur de $(\Delta_3' - \Delta_3)$ pour un de ces angles est le supplément de sa valeur pour l'autre, tandis que le rapport $\frac{\tau_3'}{\tau_3}$ est le même pour les deux. Il suit de là, entre autres conséquences, que les vibrations elliptiques, réfléchies aux angles conjugués, sont semblables l'une à l'autre, et ont leurs axes homologues également inclinés au plan d'incidence, mais sur des côtés opposés. Quand $(\Delta_3' - \Delta_3) = 90°$, ou $M\mu = 1$, la valeur de τ_3' est un minimum et égale à $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$.

Les formules précédentes ne diffèrent que de très-peu de celles que j'ai données dans les *Irish. Acad. Trans.* La quantité ψ', qu'on rencontre dans ces dernières, a été négligée à dessein, sa présence s'opposant à la simplicité des expressions.

extrême, en masquant la réfraction ordinaire, et laissant la réfraction extraordinaire se développer en toute liberté. Il y parvint en versant sur la surface réfléchissante un peu d'huile de cassia, fluide dont l'indice de réfraction est presque égal à l'indice ordinaire du spath d'Islande. Quand de la lumière commune, tombant à 45°, était réfléchie à la surface de séparation de l'huile et du spath, le faisceau réfléchi se trouvait partiellement, et quelquefois totalement polarisé dans des plans diversement inclinés sur le plan d'incidence, l'inclinaison passant par toutes les grandeurs comprises entre 0° et 180°, lorsqu'on faisait tourner le cristal. La théorie indique aussi ce résultat général, lorsqu'on suppose que l'angle d'incidence est presque égal à l'un des angles de réfraction; mais pour comparer complétement les résultats théoriques avec ceux de l'expérience, il eût fallu faire de longs calculs que je n'ai pas eu le temps d'entreprendre. Néanmoins, pour faire voir clairement que, d'après la théorie, le champ des déviations est illimité, j'ai considéré le cas simple dans lequel $N = B$, ou dans lequel l'indice de réfraction du fluide est *exactement* égal à l'indice ordinaire du cristal. Ce cas est en outre remarquable par lui-même, et mériterait qu'on le vérifiât par des expériences directes. Il faudrait se procurer un fluide dont l'indice de réfraction, pour un certain rayon défini dans le spectre, fût égal à l'indice ordinaire du cristal pour le même rayon; il faudrait en outre que la lumière commune, quels que fussent d'ailleurs l'angle d'incidence et son azimut, fût réfléchie à la surface même de séparation du fluide et du cristal. Alors, si la théorie est exacte, cette lumière définie serait, comme nous l'avons vu, complétement polarisée par réflexion, et le plan de polarisation serait toujours perpendiculaire au plan mené par la direction du rayon réfléchi et par l'axe du cristal. Ce serait soumettre notre théorie à une épreuve élégante, que de l'appliquer ainsi à des cas extrêmes; et si cette épreuve réussissait, il n'y aurait plus de doute [*] à émettre sur l'exactitude rigoureuse des lois géométriques de la réflexion.

---

[*] Je doutais à cette époque que les phénomènes observés avec l'huile de cassia pussent se concilier avec la théorie, et quand j'écrivis la note de la page 222, j'étais convaincu de cette discordance. Mais, depuis, je pense en avoir trouvé la cause :

Les expériences faites avec l'huile de cassia doivent être très-difficiles, à raison de la grande faiblesse de la lumière réfléchie; néanmoins sir David Brewster les a reprises à différentes époques, et il a présenté une série nombreuse de leurs résultats, à la section de physique de l'Association britannique, lors de la dernière séance à Bristol.

Ce ne fut qu'à la fin de novembre 1836 que j'eus connaissance des recherches de M. Seebeck, qui ont beaucoup contribué aux progrès de la question. Ce physicien a fait des expériences très-soignées sur la lumière réfléchie dans l'air par le spath d'Islande. Il a découvert la déviation, malgré sa petitesse, et l'a mesurée avec soin. Il a ainsi fait

---

Quelques-unes des expériences de Brewster ont été faites sur les surfaces naturelles du spath, d'autres sur des surfaces polies artificiellement. A en juger par quelques essais, je crois que la première classe d'expériences sera parfaitement d'accord avec la théorie; mais je suis certain que la dernière classe ne pouvait l'être, ou que l'on ne devait pas l'espérer. Car le procédé du polissage artificiel doit nécessairement occasionner de petites inégalités, qui exposent de petits rhomboïdes élémentaires avec leurs faces inclinées sur la surface générale; et l'action de ces faces peut produire les effets anomaux que Brewster signale comme extraordinaires (Sixième Rapport de *Brit. Assoc.*, *Transactions des sections*, page 16); je ne sais vraiment à quelle autre cause on pourrait attribuer ces effets. Il paraît évident, d'après une ancienne observation de Brewster (*Phil. Trans.*, 1819), que le poli imparfait produit un défaut de symétrie dans les phénomènes: car de la lumière commune se réfléchissant entre l'huile de cassia, et une surface perpendiculaire à l'axe, mais mal polie, Brewster trouva que le rayon réfléchi était polarisé, non dans le plan d'incidence, non dans le plan perpendiculaire, mais dans l'azimut de 75°. La même surface, quand la lumière se réfléchissait dans l'air, donnait un angle de polarisation plus grand de 2° que sa valeur connue.

Pour prouver que, sous d'autres rapports, le caractère général des phénomènes est d'accord avec la théorie, on peut observer que si $N = B$, $\lambda = 0°$ ou $90°$, et si la lumière commune tombe sur le cristal sous l'incidence de 45°, dans le plan de la section principale, la totalité de la lumière réfléchie sera polarisée perpendiculairement à ce plan. Si donc N est presque égal à B, toutes choses égales d'ailleurs, le faisceau réfléchi contiendra un peu de lumière non polarisée, ou ne sera pas totalement polarisé perpendiculairement au plan d'incidence; en sorte que, comme Brewster l'a trouvé par l'expérience, le cristal produira par réflexion le même effet qu'un milieu uniréfringent. C'est ce qui n'arrivera pas, comme Brewster l'a pareillement trouvé, quand λ et l'angle d'incidence seront chacun de 45°, parce qu'alors la lumière tombe sous l'angle de polarisation.

le premier pas dans la théorie physique de la réflexion cristalline; et la formule remarquable (68), qui donne l'angle de polarisation quand l'axe est parallèle au plan d'incidence, lui est due. Les hypothèses qu'il a employées diffèrent peu de celles de Fresnel; elles l'ont mis à même de résoudre le problème de la réflexion dans ce cas particulier, mais non de l'aborder en général. Ses premiers Mémoires datent de 1831 (*Poggendorff Ann.*, t. XXI, p. 290; t. XXII, p. 126); mais il ne publia ses expériences sur la déviation que dans une occasion plus récente (*ibid.*, t. XXXVIII, p. 280), quand il fut conduit à les comparer avec la théorie que j'avais donnée dans ma lettre à sir David Brewster. J'ai déjà établi la correction [*], nécessitée par ses expériences, qui m'a conduit à la forme simple que ma théorie possède actuellement.

---

[*] Deux ou trois mois après que cette correction fut publiée dans le *Phil. Mag.*, un extrait en fut inséré dans les *Annales de Poggendorf* (v. XL, page 462). Avant ce temps, je crois que rien n'avait été publié en Allemagne sur la théorie générale de la réflexion cristalline; au moins l'auteur de l'extrait (qui, je pense, est M. Seebeck) ne semble pas avoir entendu parler d'aucune autre théorie, d'aucuns principes analogues. Mais dans le numéro suivant (*Pogg. Ann.*, vol. XL, page 497), il parut une lettre de M. Neumann, dans laquelle l'auteur parle d'une théorie qui lui appartiendrait, fondée sur des principes exactement les mêmes que les miens; il rappelle un Mémoire qu'il avait communiqué sur ce sujet à l'Académie de Berlin. Le Mémoire a été imprimé dans les Actes de cette Académie, pour 1835; par l'obligeance de l'auteur, j'ai reçu une copie de ce Mémoire assez à temps pour le reconnaître ici. En jetant les yeux sur ce travail, je reconnais plusieurs équations qui me sont familières; entre autres les formules (vii), (viii), (ix), (x), que j'ai trouvées de mon côté en novembre dernier. Le Mémoire de M. Neumann est très-élaboré [**], et me fait abandonner, en grande partie, le dessein que j'avais formé de consacrer mes loisirs à traiter le sujet plus complétement; maintenant je ne puis mieux faire que de le recommander à ceux qui désirent suivre les investigations dans tous leurs détails.

[**] Quoique le Mémoire de M. Neumann soit fort long, nous espérons en donner bientôt la traduction complète, dont M. Cabart, répétiteur à l'École Polytechnique, a bien voulu se charger.

J. LIOUVILLE.

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. DARU [*].

Soit

$$(A) \qquad \varphi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + r\frac{dy}{dx} + sy = 0$$

l'équation proposée. Quelle que soit la constante m, on a évidemment

$$(1) \qquad \varphi(e^{mx}) = e^{mx} f(m),$$

$f(m)$ représentant la quantité $m^n + pm^{n-1} + \ldots + rm + s$. Pour prendre la dérivée d'une fonction linéaire

$$\varphi(y) \quad \text{ou} \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots,$$

par rapport à un paramètre m contenu dans y seulement, il suffit, en général, de remplacer y par $\frac{dy}{dm}$, en sorte que

$$\frac{d\varphi(y)}{dm} = \varphi\left(\frac{dy}{dm}\right);$$

l'équation (1), différentiée par rapport à m, fournira en conséquence

$$(2) \qquad \varphi(e^{mx}.x) = e^{mx}[xf(m) + f'(m)].$$

[*] J'emprunte à d'anciens cahiers la substance de cette Note que M. Daru, mon camarade de promotion à l'École Polytechnique, composa jadis étant encore élève. Quoiqu'il s'agisse d'un théorème très-simple et dont les auteurs ont donné dix démonstrations différentes, la méthode ingénieuse suivie par M. Daru méritait, je crois, d'être indiquée. J. LIOUVILLE.

Une seconde différentiation fournira de même

$$(3)\qquad \varphi(e^{mx}.x^2) = e^{mx}[x^2 f(m) + 2x f'(m) + f''(m)];$$

et ainsi de suite.

Maintenant si m est racine de $f(m) = 0$, l'équation (1) donne

$$\varphi(e^{mx}) = 0;$$

donc $y = e^{mx}$ est une intégrale de l'équation (A). Si la racine m est double, on a de plus $f'(m) = 0$, et l'équation (2) donne

$$\varphi(e^{mx}.x) = 0;$$

donc $y = e^{mx}.x$ est une seconde intégrale de l'équation (A). Si la racine m est triple, $f''(m)$ est aussi $= 0$, et l'équation (3) donne

$$\varphi(e^{mx}.x^2) = 0;$$

donc $y = e^{mx}.x^2$ est alors une troisième intégrale de l'équation (A). En continuant ainsi l'on voit que des n racines égales ou inégales de $f(m) = 0$, on peut toujours déduire n intégrales particulières distinctes, d'où l'on conclura ensuite l'intégrale complète.

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE M. BIOT

SUR

LES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES PRÈS DE L'HORIZON;

PAR J. LIOUVILLE [*].

Deux molécules lumineuses partent d'un même point O de l'atmosphère terrestre; l'une est lancée dans la direction OA horizontale, l'autre dans la direction OB qui fait avec l'horizon un angle infiniment petit β. Il faut examiner les effets différents que produiront sur ces deux molécules les couches successives de l'atmosphère, dont on suppose la puissance réfractive variable suivant une fonction quelconque de la distance au centre C de la Terre.

La vitesse d'une molécule lumineuse dans un milieu donné ne dépend que de la nature de ce milieu. Les vitesses de nos deux molécules au point O sont donc égales. Les composantes de ces deux vitesses estimées perpendiculairement au rayon CO sont par suite, entre elles, dans le rapport de 1 à $\cos\beta$; et d'après le principe des aires, ce même rapport subsistera entre les composantes v, v' perpendiculaires aux rayons CM, CN, menés du centre C aux positions M, N, que nos deux molécules occuperont plus tard dans une même couche sphérique quelconque MN. Ainsi l'on aura toujours $v' = v \cos\beta$; ce qui, en négligeant les infiniment petits du second ordre, donne $v' = v$.

Quant aux composantes u, u' des vitesses dans le sens des rayons

[*] Le Mémoire de M. Biot fait partie des Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1839.

vecteurs CM, CN, elles devront (les vitesses absolues étant les mêmes de part et d'autre) satisfaire à la relation

$$v^2 + u^2 = v'^2 + u'^2 \quad \text{ou} \quad (u' + u)(u' - u) = v^2 \sin^2 \beta.$$

en sorte que le produit $(u' + u)(u' - u)$ doit être un infiniment petit du second ordre. Cette condition est remplie d'elle-même au point O, puisqu'en ce point la composante u est nulle et la composante u' infiniment petite. Mais dans toute couche MN située à une distance finie du point O et coupée sous un angle fini par nos trajectoires lumineuses, u et u' auront des valeurs finies. Il faudra donc que la différence $u' - u$ soit infiniment petite du second ordre, ou que l'on ait $u' = u$ en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier.

En négligeant le carré de β, on a donc à la fois $u' = u$, $v' = v$, dans toute couche située à une distance finie du point O. Ainsi, à partir d'une certaine limite finie, nos deux molécules seront animées de vitesses égales, tant dans le sens du rayon que dans le sens perpendiculaire. Les déviations seront dès lors les mêmes de part et d'autre. L'inégalité de réfraction qui a lieu dans les deux trajectoires ne peut donc dépendre que de l'action des couches très-voisines du point O. C'est le théorème de M. Biot. On voit clairement ici, ce me semble, quelle en est l'origine physique, et pourquoi il se trouverait en défaut dans des atmosphères qui seraient douées d'une constitution exceptionnelle et où les trajectoires lumineuses dont nous avons parlé pourraient ne pas couper sous un angle fini des couches telles que MN situées à une distance finie du point O.

Quant à la mesure de l'effet produit par les couches très-voisines du point O, elle dépend d'une formule simple que M. Biot a donnée aussi, et qu'on peut retrouver par la méthode suivante.

Considérons la trajectoire d'une molécule lumineuse quelconque, ou plutôt la partie de cette trajectoire qui est comprise entre une couche sphérique de rayon r et la couche extrême de rayon a où se termine l'atmosphère. Soient r' une variable qui peut croître depuis r jusqu'à a, i l'indice de réfraction pour la couche de rayon r, i' l'indice analogue pour la couche de rayon r', et θ le complément de l'angle sous lequel la trajectoire lumineuse à son origine coupe la couche de rayon r. La partie R de la réfraction qui répond à l'espace compris entre les rayons r et a sera exprimée par la formule

$$R = ir\sin\theta \int_a^r \frac{\frac{di'}{dr'}\,dr'}{i'\sqrt{i'^2 r'^2 - i^2 r^2 \sin^2\theta}},$$

laquelle résulte immédiatement de la théorie ordinaire et bien connue des réfractions. Je ne m'arrêterai pas à démontrer cette formule. On la déduira, si l'on veut, de celle que Laplace a donnée dans la *Mécanique céleste;* il suffira d'avoir égard à la différence des notations.

Si l'on considère r et θ comme des variables indépendantes, R sera une fonction de ces deux variables, et en différentiant sous ce point de vue, on obtiendra aisément une équation assez remarquable que les deux dérivées partielles de R doivent vérifier.

En effet, si l'on différentie par rapport à r, et si l'on se rappelle que i est fonction de r, on a d'abord

$$\frac{dR}{dr} = \frac{R}{ir}\cdot\frac{d.ir}{dr} + \frac{\sin\theta}{i\cos\theta}\cdot\frac{di}{dr}$$

$$+ i^2 r^2 \sin^3\theta \cdot \frac{d.ir}{dr}\cdot \int_a^r \frac{\frac{di}{dr'}\,dr'}{i'(i'^2 r'^2 - i^2 r^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}};$$

en différentiant par rapport à θ, on trouve d'autre part

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{R\cos\theta}{\sin\theta} + i^3 r^3 \sin^2\theta\cos\theta \int_a^r \frac{\frac{di'}{dr'}\,dr'}{i'(i'^2 r'^2 - i^2 r^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale étant la même dans ces deux formules, on peut l'éliminer. Il vient ainsi

$$ir\cos\theta\,\frac{dR}{dr} = \sin\theta\,\frac{d.ir}{dr}\cdot\frac{dR}{d\theta} + r\sin\theta\,\frac{di}{dr}.$$

C'est l'équation aux différences partielles dont nous parlions tout à l'heure.

Si l'on suppose l'angle θ droit, $\cos\theta \frac{dR}{dr}$ s'évanouira en général, et l'on aura

$$\frac{dR}{d\theta} = -\frac{rdi}{d(ir)},$$

formule équivalente à celle de M. Biot, et d'où l'on tire

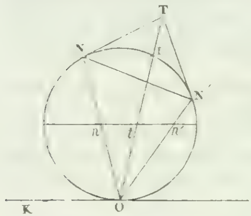
$$\frac{dR}{d\theta} d\theta = -\frac{rdi}{d(ir)} d\theta.$$

Le premier membre de cette dernière équation exprime la quantité dont la réfraction varie lorsqu'un observateur placé dans la couche de rayon r passe d'une direction horizontale à une direction infiniment peu inclinée sur l'horizon; et nous voyons par la composition du second membre que cette quantité dépend uniquement de l'indice de réfraction i qui répond à la couche de rayon r et de la dérivée $\frac{di}{dr}$ de cet indice. Nous voilà donc de nouveau conduits à reconnaître que les couches supérieures de l'atmosphère n'ont ici aucune influence; mais de plus nous mesurons d'une manière très-simple l'effet produit par les couches inférieures.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

PAR M. CHASLES.

Dans la construction des cartes, suivant la projection stéréographique, on a à déterminer le centre du cercle qui représente en projection un cercle de la sphère. On construit ce centre en faisant usage de trois points par lesquels passe le cercle. Cette construction peut se faire plus simplement au moyen du théoreme suivant, qui constitue une troisième propriété de la projection stéréographique, dont les deux propriétés, en usage dans la construction des cartes, sont bien connues.



THÉORÈME. *Le centre du cercle nn' qui représente en projection un cercle* NN' *de la sphère, est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle* NN'.

Il faut prouver que $nt = n't$.

On a, dans le triangle nOt, $\frac{nt}{tO} = \frac{\sin nOt}{\sin tnO}$;

et dans le triangle NTI, $\frac{TI}{TN} = \frac{\sin TNI}{\sin TIN}$.

Or $\sin TNI = \sin nOt$; $\sin TIN = \sin NIO = \sin NOK = \sin tnO$.

Donc $$\frac{nt}{tO} = \frac{TI}{TN}.$$

On a semblablement $$\frac{n't}{tO} = \frac{TI}{TN'}.$$

Mais $TN = TN'$. Donc $nt = n't$. *C. Q. F. D.*

Cette démonstration est plus propre à entrer dans l'enseignement de la construction des cartes, que celles que j'ai données antérieurement du même théorème, et dont l'une est analytique, l'autre fondée sur la théorie des transversales. Il est inutile de rappeler ici que le théorème s'applique à une surface du deuxième degré quelconque et qu'on l'emploie utilement pour la démonstration d'un grand nombre de propositions de géométrie plane. (Voir les *Annales de Mathématiques*.)

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

SUR

LES FORCES ATTRACTIVES ET RÉPULSIVES

QUI AGISSENT EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DES DISTANCES;

PAR C.-F. GAUSS [*].

(Traduit de l'ouvrage intitulé : *Résultats des observations faites par la Société magnétique* en 1839; par MM. GAUSS et WEBER.)

I.

La nature nous présente plusieurs phénomènes que nous expliquons en supposant certaines forces dont l'action s'exerce entre les plus petites parties des corps, suivant la raison inverse du carré des distances.

De ce nombre est principalement la gravitation universelle, en vertu de laquelle une molécule pondérable exerce sur une autre molécule une action qui tend à les rapprocher dans la direction de la ligne droite qui les joint. La grandeur de cette action est mesurée par $\frac{\mu\mu'}{r^2}$, μ, μ' étant les masses des molécules, r leur distance.

Afin d'expliquer les phénomènes magnétiques, nous imaginons deux fluides dont l'un est considéré comme quantité positive et l'autre comme quantité négative; nous admettons que deux portions μ, μ' de ces fluides exercent l'une sur l'autre dans la direction de la ligne qui les unit, une action encore mesurée par $\frac{\mu\mu'}{r^2}$, et qui est répulsive si μ et μ' sont de même espèce, attractive dans le cas contraire.

[*] Ce Mémoire a été lu le 9 mars 1840 à la Société royale de Gottingue. Quelque temps auparavant M. Chasles aussi s'était livré à des recherches générales sur l'attraction (*voir* le tome VIII, page 209, des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 11 février 1839): son travail vient de paraître dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'annee 1845. J. LIOUVILLE.

On peut en dire autant de l'action réciproque qu'exercent les parties des fluides électriques.

L'élément linéaire ds d'un courant galvanique exerce également sur tout élément μ de fluide magnétique (en admettant que ce fluide existe), une action qui est inversement proportionnelle au carré de la distance r; mais ici la force motrice, au lieu d'être dirigée suivant la ligne de jonction, est perpendiculaire au plan mené par μ et par la direction de ds: son intensité ne dépend pas non plus de la seule distance r, mais aussi de l'angle que r fait avec la direction de ds. Cet angle étant désigné par θ, on trouve que $\frac{\sin \theta . \mu ds}{r^2}$ est la mesure de l'action exercée par ds sur μ. Quant à l'action de μ sur ds, elle est naturellement égale et contraire à celle-là.

Si l'on regarde, avec Ampère, deux éléments de courants galvaniques ds, ds', comme agissant l'un sur l'autre dans la direction de la ligne droite qui les unit, soit attractivement, soit répulsivement, on est encore obligé d'admettre que la force motrice est en raison inverse du carré de la distance; mais la manière dont elle dépend de la direction des courants est plus compliquée.

Nous nous bornerons dans cet article aux trois premiers cas, c'est-à-dire à ceux où les forces agissent dans la direction de la droite menée entre l'élément qui produit l'action et celui qui la reçoit, avec une intensité proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance. Il est vrai que plusieurs de nos théorèmes s'appliquent à d'autres cas, avec de légères modifications; mais nous préférons réserver cette extension pour un autre Mémoire.

II.

Soient a, b, c les coordonnées rectangulaires d'un point matériel d'où émane une force attractive ou répulsive. Soit

$$\frac{\mu}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}=\frac{\mu}{r^2}$$

la force accélératrice d'un point indéterminé O dont les coordonnées sont x, y, z; μ désignant, dans le premier cas du paragraphe précédent, la matiere pondérable du premier point ; dans le deuxieme et le troisième cas, la quantité du fluide magnétique ou électrique de ce même point.

Si l'on décompose parallèlement aux axes la force qui agit en O, on trouvera pour les trois composantes les expressions

$$\frac{\varepsilon\mu\,(a-x)}{r^3},\qquad \frac{\varepsilon\mu\,(b-y)}{r^3},\qquad \frac{\varepsilon\mu\,(c-z)}{r^3},$$

dans lesquelles ε est tantôt égal à $+1$, tantôt égal à -1, selon que la force est attractive ou répulsive. Le choix entre ces deux valeurs est toujours clairement indiqué par la nature, et du point qui exerce l'action, et de celui qui la reçoit. Ces composantes peuvent être mises sous la forme des dérivées partielles

$$\frac{d\,\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dx},\qquad \frac{d\,\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dy},\qquad \frac{d\,\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dz}.$$

Donc, si plusieurs points matériels μ_0, μ_1, μ_2, etc., agissent à des distances r_0, r_1, r_2, etc., sur un même point O, et si l'on pose

$$\frac{\mu_0}{r_0}+\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}+\text{etc.}=\sum\frac{\mu}{r}=V,$$

les composantes de la résultante de toutes les forces qui agissent en O seront exprimées par

$$\frac{\varepsilon\,dV}{dx},\qquad \frac{\varepsilon\,dV}{dy},\qquad \frac{\varepsilon\,dV}{dz}.$$

Lorsque les agents, au lieu d'être concentrés dans des points isolés, remplissent sans intervalle une ligne, une surface, ou un espace matériel quelconque, la sommation $\sum$ doit être remplacée par une intégration simple, double ou triple. Ce dernier cas est celui de la nature; mais comme on peut souvent lui substituer, avec certaines modifications, des agents fictifs, concentrés dans des points ou occupant entièrement des lignes, des surfaces, nous traiterons également ces cas. Nous parlerons donc souvent de masses condensées dans des lignes, des surfaces ou même des points; et nous ne pensons pas que ce soient là des expressions impropres, parce que la masse dans ce cas n'est pour nous que tout ce dont émanent des forces attractives ou répulsives.

III.

Nous avons désigné par x, y, z les coordonnées de tout point de l'espace, et par V la somme des molécules agissantes divisées chacune par sa distance au point considéré, chaque particule devant être affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant les circonstances. V est donc une fonction de x, y, z, et les recherches que nous allons faire sur la nature de cette fonction nous donneront la clef de la théorie des forces attractives et répulsives. Pour suivre librement la marche de nos recherches, nous appellerons V le potentiel des masses avec lesquelles il est en rapport. Cette définition paraîtra peut-être trop particulière, mais elle suffira au développement de notre problème. Dans un sens plus étendu, si l'on considérait des lois d'attraction autres que celles de la raison inverse du carré de la distance, on pourrait comprendre sous la dénomination de potentiel la fonction de x, y, z dont les dérivées partielles représenteraient les composantes de la force produite.

En désignant par p la résultante des forces qui agissent sur le point (x, y, z), et par α, β, γ les angles que la direction de cette force fait avec les axes, on aura pour les composantes

$$p\cos\alpha = \varepsilon\frac{dV}{dx}, \qquad p\cos\beta = \varepsilon\frac{dV}{dy}, \qquad p\cos\gamma = \varepsilon\frac{dV}{dz},$$

et

$$p = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}.$$

IV.

Quand ds est l'élément d'une ligne, droite ou courbe, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, sont les cosinus des angles que cet élément fait avec les axes. Donc si θ désigne l'angle compris entre la direction de l'élément et celle de la force résultante, on aura

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma.$$

Par conséquent la composante de la force, parallèle à la direction de ds, sera

$$p \cos \theta = \varepsilon \left(\frac{dV}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = \varepsilon \frac{dV}{ds}.$$

Une surface qui contiendra tous les points où le potentiel V a une valeur constante, séparera d'abord les parties de l'espace où V est plus petit que cette valeur, de celles où V est plus grand que cette même valeur. Si la ligne s est tout entière sur cette surface, ou si au moins elle la touche par l'élément ds, on aura $\frac{dV}{ds} = 0$, ce qui donne $\cos \theta = 0$, à moins que les éléments de la force ne se détruisent mutuellement, ou que l'on ait $p = 0$; mais dans ce cas la direction de la résultante est complétement indéterminée. Il suit de là que la résultante en chaque point de la surface considérée est normale à cette surface, et qu'elle agit du côté de l'espace avoisiné par les valeurs plus grandes de V quand $\varepsilon = +1$, et du côté opposé quand $\varepsilon = -1$. Nous donnerons à cette surface le nom de *surface d'équilibre*. Quand la ligne s ne sera pas tout entière sur la même surface d'équilibre, on pourra par chacun de ses points mener une surface d'équilibre. Si s coupe toutes ces surfaces à angle droit, une tangente menée à cette ligne indiquera en chacun de ses points la direction de la résultante, et $\frac{dV}{ds}$ en exprimera l'intensité.

L'intégrale $\int p \cos \theta \, ds = \int \varepsilon \frac{dV}{ds} ds$, étendue à un segment arbitraire de la ligne s, est évidemment égale à $\varepsilon (V_1 - V_0)$, V_0 et V_1 étant les valeurs du potentiel aux extrémités de la ligne. Donc si s est une ligne fermée, l'intégrale étendue à la ligne entière sera nulle.

V.

Il est évident que le potentiel a une valeur finie et déterminée en tout point situé en dehors des parties attractives et des parties répulsives. Il en est de même de ses dérivées partielles du premier ordre ou d'ordre supérieur, puisque dans cette supposition, elles deviennent des sommes de parties assignables, ou bien des intégrales dans lesquelles les quantités sous le signe $\int$ ne peuvent jamais devenir infinies. On aura donc

$$\frac{dV}{dx} = \sum \frac{(a-x)\mu}{r^3}, \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = \sum \left[\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\mu,$$

$$\frac{dV}{dy} = \sum \frac{(b-y)\mu}{r^3}, \qquad \frac{d^2V}{dy^2} = \sum \left[\frac{3(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\mu,$$

$$\frac{dV}{dz} = \sum \frac{(c-z)\mu}{r^3}, \qquad \frac{d^2V}{dz^2} = \sum \left[\frac{3(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\mu.$$

L'équation connue

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

sera vraie pour tous les points de l'espace qui sont en dehors des masses agissantes.

VI.

Parmi les cas où il s'agit de trouver la valeur du potentiel ou les valeurs de ses dérivées partielles pour un point situé en dedans des masses agissantes, nous examinerons celui que l'on remarque dans la nature, c'est-à-dire que nous traiterons le cas où les masses remplissent un espace matériel déterminé de manière que leur densité soit toujours finie, quoiqu'elle soit tantôt la même pour tout le corps, tantôt variable d'un point à un autre.

Soient t l'espace que les masses remplissent; dt un élément infiniment petit de ce volume, auquel correspondent les coordonnées a, b, c; kdt l'élément de masse; V le potentiel relatif au point O (x, y, z); $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$ la distance de ce point à l'élément dt. On aura

$$V = \int \frac{kdt}{r}:$$

cette intégrale devant s'étendre à tout l'espace t, sera une intégrale triple. On voit facilement que l'intégration sera possible lors même que O se trouvera dans l'intérieur de l'espace t, quoique alors $\frac{1}{r}$ devienne infiniment grand pour les éléments situés à une distance infiniment petite de O. Car si l'on substitue à a, b, c des coordonnées polaires en posant

$$a = x + r\cos u, \quad b = y + r\sin u \cos\lambda, \quad c = z + r\sin u \sin\lambda,$$

on aura

$$dt = r^2 \sin u \, du \, d\lambda \, dr,$$

et

$$\mathrm{V} = \int\int\int kr \sin u \, du \, d\lambda \, dr.$$

Cette intégrale doit être étendue depuis $r = 0$, jusqu'à la valeur que r prend à la limite de t; depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = 2\pi$; depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \pi$. En conséquence, V a nécessairement une valeur finie et déterminée.

Il est facile de voir qu'on pourra aussi poser

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \int k dt \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \int \frac{k(a-x)}{r^3} dt = \mathrm{X},$$

car en employant les coordonnées polaires, on change cette formule dans la suivante

$$\int\int\int k \cos u \sin u \, du \, d\lambda \, dr,$$

où l'intégration est possible, parce que les éléments situés à une distance infiniment petite de O, n'exercent sur cette valeur qu'une influence également infiniment petite. On aura donc une valeur finie et déterminée. Par des raisons analogues, on pourra poser

$$\frac{d\mathrm{V}}{dy} = \int \frac{k(b-y)}{r^3} dt = \mathrm{Y},$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{dz} = \int \frac{k(c-z)}{r^3} dt = \mathrm{Z},$$

et ces fonctions, comme V, acquièrent au dedans de t des valeurs finies et déterminées, qui varient d'une manière continue avec les coordonnées du point O, tant que celui-ci est renfermé dans l'espace t, et même à la surface de t.

VII.

En ce qui concerne les coefficients différentiels des ordres supérieurs, il faut suivre une autre marche pour des points situés en dedans de t; car on ne peut transformer $\frac{dX}{dx}$ en

$$\int k\,dt\,\frac{d\,\frac{a-x}{r^3}}{dx},$$

c'est-à-dire

$$\int k\,\frac{3(a-x)^2 - r^2}{r^5}\,dt,$$

parce que cette formule n'est en réalité qu'un signe sans valeur déterminée. En effet, dans la partie de t qui renferme le point O, on peut étendre l'intégrale à des masses assez rapprochées de ce point pour qu'elle surpasse toute valeur donnée, soit positive, soit négative. Il manque donc ici une condition essentielle sans laquelle l'intégrale entière ne peut avoir de signification réelle, je veux dire la possibilité d'employer la méthode d'exhaustion.

VIII.

Avant d'aborder notre sujet dans toute sa généralité, nous considérerons un cas spécial et très-simple, qui contribuera à rendre notre démonstration plus claire.

Soient t le volume d'une sphère dont le rayon est R et dont le centre est à l'origine des coordonnées; k la densité supposée constante de la masse qui remplit la sphère; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distance du point O au centre. Nous savons que le potentiel a deux expressions, suivant que O est en dedans ou en dehors de la sphère. Dans le premier cas, on a

$$V = 2\pi k R^2 - \tfrac{2}{3}\pi k \rho^2 = 2\pi k R^2 - \tfrac{2}{3}\pi k(x^2 + y^2 + z^2);$$

dans le deuxième,

$$V = \frac{4}{3}\frac{\pi k R^3}{\rho}.$$

A la surface de la sphère, ces deux expressions ont la même valeur $\frac{2}{3}\pi k R^2$, en sorte que le potentiel varie dans tout l'espace d'une manière continue.

Pour les coefficients différentiels, nous obtenons dans l'espace intérieur

$$\frac{dV}{dx} = X = -\frac{4}{3}\pi k x,$$
$$\frac{dV}{dy} = Y = -\frac{4}{3}\pi k y,$$
$$\frac{dV}{dz} = Z = -\frac{4}{3}\pi k z;$$

dans l'espace extérieur,

$$X = -\frac{4}{3}\frac{\pi k R^3 x}{\rho^3},$$
$$Y = -\frac{4}{3}\frac{\pi k R^3 y}{\rho^3},$$
$$Z = -\frac{4}{3}\frac{\pi k R^3 z}{\rho^3}.$$

Ces dernieres formules donnent aussi à la surface les mêmes valeurs que les premières; et X, Y, Z varient dans tout l'espace d'une manière continue.

Il en est autrement avec les coefficients différentiels des quantités X, Y, Z. Nous avons dans l'espace intérieur

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{4}{3}\pi k, \quad \frac{dY}{dy} = -\frac{4}{3}\pi k, \quad \frac{dZ}{dz} = -\frac{4}{3}\pi k;$$

tandis que, pour l'espace extérieur, nous avons

$$\frac{dX}{dx} = \frac{4\pi k R^3 (3x^2 - \rho^2)}{3\rho^5},$$
$$\frac{dY}{dy} = \frac{4\pi k R^3 (3y^2 - \rho^2)}{3\rho^5},$$
$$\frac{dZ}{dz} = \frac{4\pi k R^3 (3z^2 - \rho^2)}{3\rho^5}.$$

A la surface ces dernières expressions ne sont point identiques avec les premières; elles prennent des valeurs différentes, qui sont

$$\frac{4\pi kx^2}{R^2}, \qquad \frac{4\pi ky^2}{R^2}, \qquad \frac{4\pi kz^2}{R^2}.$$

Ainsi quoique les coefficients différentiels ci-dessus varient d'une maniere continue, tant dans l'espace intérieur que dans l'espace extérieur, ils deviennent discontinus en passant de l'un de ces espaces à l'autre, et ils acquièrent chacun deux valeurs sur la surface de séparation, suivant que dx, dy, dz sont considérées comme positives ou négatives.

Les six autres coefficients différentiels

$$\frac{dX}{dy}, \quad \frac{dX}{dz}; \qquad \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dz}; \qquad \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dZ}{dy},$$

sont dans le même cas. Dans l'intérieur de la sphère ils sont tous égaux à o, et en passant par la surface de la sphère, ils varient brusquement en prenant les valeurs

$$\frac{4\pi kxy}{R^2}, \qquad \frac{4\pi kxz}{R^2}, \qquad \text{etc.}$$

La somme

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz},$$

ou

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2},$$

est égale à $-4\pi k$ dans l'intérieur de la sphère, à o à l'extérieur. A la surface elle n'a plus une valeur unique. Si l'on veut mettre de la précision dans le langage, on peut considérer la somme en question comme composée de trois parties ayant chacune deux valeurs différentes. Il y a donc huit combinaisons, dont une correspond à la face intérieure de la sphère, une autre à la face extérieure; les six autres doivent être rejetées comme insignifiantes. Quelques auteurs prétendent que la valeur de cette somme à la surface de la sphère est égale à $-2\pi k$, expression qui représenterait une moyenne entre les valeurs relatives à l'intérieur et celles relatives à l'extérieur; mais il faut rejeter leur analyse, si l'on veut conserver la définition des coefficients différentiels dans toute sa pureté mathématique.

IX.

Le résultat auquel nous sommes parvenus dans l'exemple précédent, n'est qu'un cas particulier d'un théorème général d'après lequel, si le point O est dans l'intérieur de la masse agissante, la valeur de

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

est égale au produit de -4π par la densité au point O. La maniere la plus satisfaisante de démontrer cet important théorème paraît être celle que nous allons exposer.

Nous supposerons que la densité k ne varie pas brusquement dans l'intérieur de t, c'est-à-dire que k est une fonction de a, b, c, savoir $f(a, b, c)$, dont la valeur varie en dedans de t d'une manière continue, tandis qu'au dehors elle est égale à o.

Soit t_1 l'espace qu'occupe t quand l'abscisse de chaque point de la surface de ce corps est diminuée de la quantité e, c'est-à-dire quand la surface a été reculée de e parallelement à l'axe des x. Soient $t = t_0 + \theta$, $t_1 = t_0 + \theta_1$, en sorte que t_0 désigne tout l'espace qui reste commun à t et t_1. Considérons les intégrales

$$(1) \qquad \int \frac{f(a, b, c)(a-x)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} dt,$$

$$(2) \qquad \int \frac{f(a, b, c)(a-x-e)}{[(a-x-e)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} dt,$$

$$(3) \qquad \int \frac{f(a+e, b, c)(a-x)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} dt.$$

L'intégrale (1), étendue à tout l'espace t, sera la valeur de $\frac{dV}{dx}$ ou X, relative au point O. L'intégrale (2), également étendue à t, sera la valeur de $\frac{dV}{dx}$, relative au point dont les coordonnées sont $x-e$, y, z; nous désignons cette valeur par $X+\xi$. Il est évident que cette intégrale est identique avec la troisième étendue à tout l'espace t_1. Soient donc

l l'intégrale (1) étendue à tout l'espace t_0,
λ . . . . θ,
l_1 l'intégrale (3). . . . . t_0,
λ_1 . . . . θ_1;

on aura

$$X = l + \lambda, \qquad X - \xi = l_1 - \lambda_1;$$

et si nous posons

$$f(a+e, b, c) - f(a, b, c) = \Delta k,$$

l'intégrale

$$(4) \qquad \int \frac{\frac{\Delta k}{e}(a-x)}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dt,$$

étendue à t_0, sera égale à $\frac{l_1 - l}{e}$.

Les résultats que nous avons trouvés jusqu'ici sont vrais quelle que soit la position du point O. Mais pour ce qui va suivre, nous excluons le cas où ce point serait sur la surface, c'est-à-dire que nous supposons que ce point est à une distance mesurable de la surface, soit en dedans de t, soit en dehors.

Si maintenant nous prenons e infiniment petit, les espaces θ et θ_1 deviennent deux couches infiniment minces et qui sont contigues à la surface t; décomposons cette surface en éléments ds, et désignons par α l'angle qu'une normale élevée en dehors fait avec l'axe des x. D'après l'hypothèse que e est infiniment petit, on voit que l'angle α sera aigu dans la partie de la surface contiguë à la couche θ, et obtus dans la partie de la surface contigue à la couche θ_1. Les éléments de volume de θ seront donc exprimés par $e\cos\alpha\,ds$, et ceux de θ_1 par $-e\cos\alpha\,ds$; d'où l'on conclut aisément que $\frac{\lambda - \lambda_1}{e}$ se transforme dans l'intégrale

$$\int \frac{f(a, b, c)(a-x)\cos\alpha}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\,ds.$$

que l'on peut écrire plus simplement

$$\int \frac{k\,(a-x)\cos\alpha}{r^3}\,ds\,;$$

cette intégrale, où k désigne la densité de l'élément ds, doit s'étendre à toute la surface de t.

Dans la supposition que e est infiniment petit, $\frac{\Delta k}{e}$ devient la dérivée partielle $\frac{df(a,b,c)}{da}$ ou $\frac{dk}{da}$, et la valeur de $\frac{l_1-l}{e}$ se transforme dans l'intégrale

$$\int \frac{\frac{dk}{da}(a-x)\,dt}{r^3},$$

étendue à tout l'espace t.

Enfin, pour e infiniment petit, $\frac{l_1-l}{e}-\frac{\lambda-\lambda_1}{e}$ ou $\frac{\xi}{e}$ est la valeur de la dérivée partielle $\frac{dX}{dx}$ ou $\frac{d^2V}{dx^2}$. Nous avons donc le résultat très-simple

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{dX}{dx}=\int \frac{\frac{dk}{da}(a-x)\,dt}{r^3}-\int \frac{k\,(a-x)\cos\alpha\,ds}{r^3},$$

où il faut étendre la première intégration à tout l'espace t, la seconde à toute la surface de t.

Ce résultat subsiste, quelque près que O soit de la surface en dedans ou en dehors, pourvu que ce point ne soit pas sur la surface même, car dans ce cas $\frac{dX}{dx}$ a deux valeurs différentes. Il est vrai que la première intégrale ne cesse pas d'être continue quand O traverse la surface; mais, en vertu d'un théorème que nous développerons plus tard, quand O passe d'un point intérieur infiniment rapproché de la surface à un point extérieur, la seconde intégrale $-\int \frac{k\,(a-x)\cos\alpha\,ds}{r^3}$ varie brusquement de la quantité $+4\pi k\cos\alpha$, où k et α se rapportent au point du passage. La différence entre les deux valeurs de $\frac{dX}{dx}$ relatives à ce point est également $+4\pi k\cos\alpha$.

X.

En suivant la même marche, et en désignant par β et γ des angles analogues à α, mais relatifs aux deux autres axes de coordonnées, on trouvera de même

$$\frac{dY}{dy} = \int \frac{\frac{dk}{db}(b-y)}{r^3}\,dt - \int \frac{k(b-y)\cos\beta}{r^3}\,ds;$$

$$\frac{dZ}{dz} = \int \frac{\frac{dk}{dc}(c-z)}{r^3}\,dt - \int \frac{k(c-z)\cos\gamma}{r^3}\,ds.$$

Observons maintenant que l'expression

$$\frac{dk}{da}\,\frac{a-x}{r} + \frac{dk}{db}\,\frac{b-y}{r} + \frac{dk}{dc}\,\frac{c-z}{r}$$

n'est autre chose que la dérivée partielle $\frac{dk}{dr}$, puisque dans cette différentiation la longueur de r varie seule, tandis que sa direction reste constante, et que l'expression

$$\frac{a-x}{r}\cos\alpha + \frac{b-y}{r}\cos\beta + \frac{c-z}{r}\cos\gamma = \cos\psi,$$

en désignant par ψ l'angle que la normale extérieure élevée en ds, fait avec la ligne droite r prolongée. Enfin désignons respectivement par

M et **N**

les valeurs des deux intégrales

$$\int \frac{\frac{dk}{dr}}{r^2}\,dt, \qquad \int \frac{k\cos\psi}{r^2}\,ds,$$

etendues, la premiere à tout l'espace t, la seconde à toute la surface de t. Nous aurons

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \mathrm{M} - \mathrm{N}.$$

Pour effectuer la première intégration, concevons que le point O soit le centre d'une surface sphérique ayant un rayon égal à l'unité et partagée en éléments $d\sigma$. Les droites menées du point O à tous les points du contour de ds, et indéfiniment prolongées, forment une surface conique (dans le sens le plus étendu du mot). Cette surface conique découpe dans l'espace t une tranche (composée de plusieurs pièces suivant les circonstances), dont $r^2 d\sigma dr$ est un élément indéterminé. La partie de M qui se rapporte à cette tranche sera donc

$$d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr,$$

pourvu que dans cette intégration on fasse varier r depuis o jusqu'à la valeur que r atteint au point où une droite, menée du point O à l'élément $d\sigma$, et suffisamment prolongée, rencontre la surface de t. Si cette ligne rencontre la surface de t en plusieurs points, soient

$$O_1, \quad O_2, \quad O_3, \quad O_4, \ldots$$

ces différents points ;

$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4, \ldots$ les valeurs correspondantes de r;

$ds_1, \; ds_2, \; ds_3, \; ds_4, \ldots$ les éléments de la surface de t, découpée par le cône élémentaire ;

$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad k_4, \ldots$ les valeurs de k,

et

$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3, \quad \psi_4, \ldots$ les valeurs de ψ en ces éléments.

Nous distinguerons deux cas :

1°. *Le point* O *est en dedans de t.* Dans ce cas les points sont en nombre impair et l'intégration doit s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = r_1$, depuis $r = r_2$ jusqu'à $r = r_3$, etc. D'où l'on voit que si la densité du point O est désignée par k_0, on aura

$$\int \frac{dk}{dr} dr = -k_0 + k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \text{etc.}$$

Comme les angles $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sont alternativement aigus et obtus, on aura

$$\begin{aligned} ds_1 \cos\psi_1 &= r_1^2 d\sigma, \\ ds_2 \cos\psi_2 &= -r_2^2 d\sigma, \\ ds_3 \cos\psi_3 &= r_3^2 d\sigma, \\ ds_4 \cos\psi_4 &= -r_4^2 d\sigma, \text{ etc.}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr &= -k_0 d\sigma + \frac{k_1 \cos\psi_1}{r_1^2} ds_1 + \frac{k_2 \cos\psi_2}{r_2^2} ds_2 + \text{etc.} \\ &= -k_0 d\sigma + \sum \frac{k \cos\psi}{r^2} ds. \end{aligned}$$

La sommation doit être étendue à tous les éléments ds qui correspondent à l'élément $d\sigma$. En intégrant pour tous les $d\sigma$, on aura

$$\mathrm{M} = -4\pi k_0 + \int \frac{k \cos\psi}{r^2} ds;$$

et dans cette formule l'intégrale du second membre devant être étendue à toute la surface de t, n'est autre chose que N; on aura donc

$$\mathrm{M} - \mathrm{N} = -4\pi k_0,$$

ou

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2} = -4\pi k_0.$$

2°. *Le point* O *est extérieur.* Dans ce cas on n'aura à prendre en considération que ceux des éléments de la surface sphérique, pour lesquels la ligne droite menée par O et un point de $d\sigma$ atteint l'espace t. Le nombre des points O_1, O_2, O_3,... est toujours pair et les angles ψ_1, ψ_2, ψ_3,... sont alternativement obtus et aigus. Donc

$$ds_1 \cos\psi_1 = -r_1^2 d\sigma, \quad ds_2 \cos\psi_2 = r_2^2 d\sigma, \quad ds_3 \cos\psi_3 = -r_3^2 d\sigma, \text{ etc.}$$

Mais comme il faut ici exécuter l'intégration $\int \frac{dk}{dr} dr$, depuis $r = r_1$ jusqu'à $r = r_2$, depuis $r = r_2$ jusqu'à $r = r_3$, etc., il en résulte que

$$\begin{aligned} d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr &= \frac{k_1 \cos\psi_1}{r_1^2} ds_1 + \frac{k_2 \cos\psi_2}{r_2^2} ds_2 + \text{etc.} \\ &= \sum \frac{k \cos\psi}{r^2} ds, \end{aligned}$$

et cette sommation étant effectuée pour tous les éléments $d\sigma$ qui se rapportent à ce cas, nous aurons

$$M = \int \frac{k \cos \psi}{r^2} ds = N,$$

et par conséquent, comme nous le savions déjà,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

XI.

Quoique nous ayons supposé que la densité varie en *tout* l'espace t d'une manière continue, cette condition n'est pas indispensable pour l'exactitude du résultat que nous avons obtenu. Il suffit que la densité varie d'une manière continue tout autour du point O, ou que ce point soit situé dans l'intérieur d'une masse aussi petite que l'on voudra dont on puisse regarder la densité comme continue. Car si nous posons le potentiel de cette dernière masse $= V'$, et le potentiel des autres masses égal à V'', le potentiel entier sera $V = V' + V''$, et comme, d'après l'article précédent,

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + \frac{d^2V'}{dy^2} + \frac{d^2V'}{dz^2} = -4\pi k_0,$$

$$\frac{d^2V''}{dx^2} + \frac{d^2V''}{dy^2} + \frac{d^2V''}{dz^2} = 0,$$

il en résulte

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi k_0.$$

Mais si cette condition n'était pas non plus satisfaite, et que le point O fût situé sur la surface de séparation de deux espaces dans l'intérieur desquels la densité varie d'une manière continue, mais en devenant discontinue quand on passe d'un espace à l'autre; dans ce cas, $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ auraient chacun deux valeurs différentes, et il faudrait répéter pour leur somme ce que nous avons dit à la fin du § VIII.

XII.

Nous allons maintenant, comme nous l'avons promis, examiner le cas idéal où des forces attractives ou répulsives émanent de tous les points d'une surface et où l'on suppose qu'une masse agissante est distribuée sur cette surface. Dans ce cas, nous appellerons densité en un point quelconque de la surface, le quotient de la masse contenue dans l'élément de surface auquel appartient le point, divisée par l'aire de cet élément. Cette densité peut être la même en tous les points, ou différente d'un point à un autre. Dans le dernier cas, elle peut varier sur toute la surface d'une maniere continue (en sorte que les densités de deux points infiniment voisins diffèrent infiniment peu), ou bien la surface peut être partagée en plusieurs parties dans chacune desquelles la densité varie d'une manière continue, quoiqu'en passant de l'une à l'autre la densité varie brusquement. Du reste, la masse peut être tellement distribuée que, sans cesser d'être finie, elle soit infiniment dense en quelques points ou lignes.

Nous supposons que la surface, si elle n'est pas un plan, a en général une courbure continue, sans que cela exclue l'interruption qui pourrait avoir lieu dans quelques points ou lignes (quand la surface présente des coins ou des arêtes).

Ces hypotheses admises, le potentiel aura en chaque point, dont la densité n'est pas infinie, une valeur finie et déterminée, infiniment peu différente de la valeur du potentiel en un point infiniment rapproché du premier, soit sur la surface, soit en dehors [*]. En sorte que le potentiel varie d'une manière continue dans toute ligne située sur la surface ou qui la traverse.

---

[*] On se convaincra sans peine de la valeur finie de l'intégrale qui exprime le potentiel, en décomposant la surface en elements, par la méthode que nous exposerons au § XV. On verra ainsi que les parties de la surface qui sont à une distance infiniment petite n'ont qu'une influence egalement infiniment petite sur la valeur de l'integrale, ce qui démontre la propriété énoncée.

XIII.

Soient k la densité de l'élément de surface ds; a, b, c les coordonnées d'un point de cet élément; r la distance de ce point au point O dont les coordonnées sont x, y, z; et V la valeur au point O du potentiel des masses répandues sur la surface. V sera égal à l'intégrale $\int \frac{k\,ds}{r}$ étendue à la surface entière. Ensuite, si nous désignons respectivement par X, Y, Z les intégrales déjà considérées

$$\int \frac{k(a-x)\,ds}{r^3}, \qquad \int \frac{k(b-y)\,ds}{r^3}, \qquad \int \frac{k(c-z)\,ds}{r^3},$$

nous voyons qu'à la vérité X, Y, Z sont identiques à $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, tant que O est en dehors de la surface, mais qu'il n'en est plus de même quand le point O est sur la surface. Ces expressions se comportent alors d'une manière différente, qui dépend de l'angle formé par la normale et l'axe que l'on considère. Il nous suffira évidemment d'examiner ce qui a lieu pour le premier axe.

1°. Si l'angle de la normale et de l'axe des x est égal à o, l'intégrale X a, au point O, une valeur déterminée; $\frac{dV}{dx}$ y a, au contraire, deux valeurs différentes, suivant que l'on considère dx comme positive ou comme négative;

2°. Si l'angle est droit, l'expression désignée par X n'est pas susceptible d'une véritable intégration (par une raison analogue à celle que nous avons développée dans le § VII), tandis que $\frac{dV}{dx}$ aura une valeur unique et déterminée;

3°. Si l'angle est aigu, on doit dire de X ce que nous en avons dit dans le second cas, et de $\frac{dV}{dx}$ ce que nous en avons dit dans le premier.

Il y aura des modifications à apporter à ce qui précède dans le cas où il existe en O une solution de continuité par rapport à la densité ou à la courbure. Cependant il n'est pas nécessaire, pour le but que nous nous proposons, de nous arrêter à ces exceptions qui, du reste, ne peuvent avoir lieu que dans quelques points ou lignes, et par la suite nous supposerons toujours qu'au point considéré il existe une densité finie et déterminée et un plan tangent déterminé.

XIV.

Avant d'aborder la question générale, il nous paraît utile de considérer un cas particulier. Supposons que la surface donnée soit une portion A de surface sphérique dont la densité k soit constante. V et X désigneront alors les intégrales

$$\int \frac{k\,ds}{r}, \qquad \int \frac{k\,(a-x)\,ds}{r^3},$$

étendues à l'aire A. Si nous désignons les mêmes intégrales par V_1, X_1 lorsqu'on les prend pour le reste B de la surface sphérique, et par V_0, X_0 lorsqu'on les étend à la surface entière, nous aurons

$$V = V_0 - V_1, \quad X = X_0 - X_1.$$

Soit R le rayon de cette sphere; supposons que le centre soit pris pour origine des coordonnées, et posons

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho.$$

en sorte que ρ désigne la distance du point O à l'origine.

Maintenant nous savons que $V_0 = 4\pi k R$, lorsque le point O est dans l'intérieur de la sphere, et que $V_0 = \frac{4\pi k R^2}{\rho}$, lorsque O est à l'extérieur; à la surface, ces deux valeurs sont égales. Il suit de là que la dérivée partielle $\frac{dV_0}{dx}$ est égale à o dans l'intérieur de la sphere, à $-\frac{4\pi k R^2 x}{\rho^3}$ en dehors; à la surface, on devra prendre l'une ou l'autre de ces valeurs suivant le signe de dx; mais ces deux valeurs ne seront égales que pour $x = 0$, ce qui correspond au deuxieme cas du paragraphe précédent.

L'expression désignée par X_0, qui, au dedans et au dehors de la sphere, est identique à $\frac{dV_0}{dx}$, n'a plus à la surface aucune signification. En effet, il ne peut y avoir de véritable intégration qu'autant qu'infiniment près du point O, $a - x$ est un infiniment petit d'un ordre supérieur à r, ce qui aura lieu pour

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm R;$$

mais, dans ce cas, l'intégrale

$$X_0 = - 2\pi k$$

ne correspond à aucune des valeurs de $\frac{dV_0}{dx}$, mais seulement à leur moyenne arithmétique. Ce cas rentre évidemment dans le premier du paragraphe précédent.

Maintenant, quand le point O est situé sur la portion de surface sphérique A, X_1 et $\frac{dV_1}{dx}$ sont identiques et ont des valeurs déterminées et continues. D'où il suit que la relation entre $X_0 - X_1$ et $\frac{dV_0}{dx} - \frac{dV_1}{dx}$, c'est-à-dire entre X et $\frac{dV}{dx}$, est la même que celle qui existe entre X_0 et $\frac{dV_0}{dx}$. De là on conclurait les théorèmes du paragraphe précédent.

XV.

Il importe, pour l'examen général auquel nous allons nous livrer, de prendre pour origine un point P de la surface, et pour axe des x la normale à la surface élevée par le point P. Si ψ est l'angle compris entre la normale à l'élément indéterminé ds et l'axe des x, $ds \cos \psi$ sera la projection de l'élément ds, sur le plan des yz. Si ensuite on pose

$$\sqrt{b^2 + c^2} = \rho, \quad b = \rho \cos \theta, \quad c = \rho \sin \theta,$$

$\rho d\rho d\theta$ sera aussi l'aire de cette projection élémentaire, en sorte que l'élément de surface ds sera égal à $\frac{\rho d\rho d\theta}{\cos \psi}$. L'élément de masse qui y est contenu sera désigné par $h\rho d\rho d\theta$, en posant pour abréger

$$h = \frac{k}{\cos \psi}.$$

Examinons maintenant comment la valeur de X varie brusquement quand le point O, se mouvant sur l'axe des x, passe d'un côté de la surface à l'autre, c'est-à-dire quand x passe du négatif au positif ou *vice versa*. Observons d'abord qu'il est indifférent de considérer la surface entière ou bien seulement une portion de cette surface qui renferme le point P, puisque l'influence du reste de la surface sur la valeur de X varie d'une manière continue. Il est donc permis de ne faire varier ρ que depuis o jusqu'à sa valeur limite ρ' fixée arbitrairement, et de supposer que, dans la surface ainsi limitée, h et $\frac{a}{\rho}$ varient d'une manière continue. Si pour chaque valeur déterminée de θ, nous posons

$$Q = \int_0^{\rho'} \frac{h(a-x)}{r^3}\rho\, d\rho,$$

nous aurons

$$X = \int_0^{\pi} Q\, d\theta.$$

Il s'agit maintenant de comparer les valeurs de X lorsqu'on suppose successivement $x = 0$, x infiniment petit et positif, x infiniment petit et négatif. Désignons ces trois valeurs de X par X_0, X_1, X_2, et les valeurs correspondantes de Q par Q_0, Q_1, Q_2.

Comme $r = \sqrt{(a-x)^2 + \rho^2}$, on obtient, θ étant constant,

$$d.\frac{h(a-x)}{r} = -\frac{h(a-x)\rho\, d\rho}{r^3} + \frac{dh}{d\rho}\cdot\frac{a-x}{r}\, d\rho + \frac{da}{d\rho}\,\frac{h\rho^2}{r^3}\, d\rho,$$

et par conséquent

$$Q = \int_0^{\rho'} \frac{dh}{d\rho}\,\frac{a-x}{r}\, d\rho + \int_0^{\rho'} \frac{da}{d\rho}\cdot\frac{h\rho^2}{r^3}\, d\rho - \frac{h'(a'-x)}{r'} + \text{const}.$$

Dans cette formule, les valeurs de h, a, r pour $\rho = \rho'$ sont désignées par h', a', r'. La constante doit avoir la valeur de $\frac{h(a-x)}{r}$ pour $\rho = 0$, et par conséquent, en désignant par k_0 la densité du point P, cette constante sera égale à $-k_0$ pour une valeur positive de x, et à $+k_0$ pour une valeur négative de x, puisque pour $\rho = 0$ on a

$$a = 0, \quad \rho = 0, \quad h = k_0, \quad x = \pm r.$$

Au contraire, dans le cas où $x = 0$, on doit attribuer à la constante la valeur limite de $\frac{ha}{r}$, quand ρ décroît indéfiniment. La constante sera donc nulle dans ce cas, puisque a est une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à r.

La valeur de l'intégrale $\int \frac{dh}{d\rho}\ \frac{a-x}{r} d\rho$ reste la même, à un infiniment petit près, quand on fait $x = 0$, ou x égal à une quantité infiniment petite $\pm \varepsilon$.

Car si l'on décompose l'intégrale en

$$\int_0^\delta \frac{dh}{d\rho} \cdot \frac{a-x}{r} d\rho + \int_\delta^\rho \frac{dh}{d\rho} \cdot \frac{a-x}{r} d\rho,$$

il est évident que cela a lieu pour la première partie, lorsque δ est infiniment petit; pour la seconde quand $\frac{\delta}{\varepsilon}$ est infiniment grand; pour toute l'expression, quand δ est un infiniment petit d'un ordre supérieur à ε.

Une conclusion analogue aura lieu pour $\int \frac{da}{d\rho} \frac{h\rho^2}{r^3} d\rho$ quand les points de la surface qui correspondent à une valeur déterminée de θ forment une courbe ayant un rayon de courbure fini en P, en sorte que dans l'espace en question, $\frac{a}{\rho^2}$ acquière une valeur finie continue. C'est ce dont on s'assure en désignant cette valeur par A, car alors

$$\frac{da}{d\rho} = 2A\rho + \frac{dA}{d\rho}\rho^2,$$

et l'intégrale dont il s'agit se décompose dans les deux suivantes

$$\int \frac{2\rho^3 A h d\rho}{r^3} + \int \frac{dA}{d\rho} \frac{\rho^4}{r^3} h d\rho,$$

où la justesse de notre conclusion devient évidente.

Enfin il est évident que les valeurs de $\frac{h'(a'-x)}{r}$ correspondantes aux trois valeurs attribuées à x sont égales, en négligeant des infiniment petits du premier ordre.

Il en résulte que $Q_1 + k_0$, Q_0, $Q_2 - k_0$ sont égaux à une différence infiniment petite près, et l'on peut en dire autant de

$$\int_0^{2\pi} (Q_1 + k_0)\,d\theta, \quad \int_0^{2\pi} Q_0\,d\theta, \quad \int_0^{2\pi} (Q_2 - k_0)\,d\theta,$$

ou des quantités

$$X_1 + 2\pi k_0, \quad X_0, \quad X_2 - 2\pi k_0.$$

Cet important théorème peut s'énoncer aussi de la manière suivante : La limite de X, quand x d'abord positif décroît indéfiniment, est égale à $X_0 - 2\pi k_0$; la limite de la même quantité est $X_0 + 2\pi k_0$, quand x d'abord négatif décroît indéfiniment en valeur absolue; c'est-à-dire que X varie deux fois brusquement de la quantité $-2\pi k_0$, quand x passe du négatif au positif, la première fois en atteignant la valeur o, la seconde fois en la dépassant.

XVI.

Dans la démonstration du paragraphe précédent, nous avons supposé que les courbes d'intersection de la surface et des plans menés par l'axe des x, ont en P une courbure finie; mais le résultat auquel nous sommes parvenus n'en subsiste pas moins lorsque la courbure en P est infiniment grande, un seul cas excepté. La supposition que $\frac{a}{\rho}$ devient infiniment petit en même temps que ρ entraîne l'existence d'un plan tangent déterminé au point P; mais ces deux quantités ne sont du même ordre que lorsqu'il y a un rayon de courbure fini, tandis que pour un rayon de courbure infiniment petit, $\frac{a}{\rho}$ est d'un ordre inférieur à ρ. Nous allons néanmoins prouver que notre résultat subsiste dans ce dernier cas, sous la condition que les ordres des deux quantités soient comparables.

A cet effet supposons que $\frac{a}{\rho}$ et ρ^μ soient du même ordre, μ désignant un exposant positif fini, et que, par conséquent, $\frac{a}{\rho^{1+\mu}}$ soit une quantité finie et qui varie d'une manière continue dans l'espace en question.

En désignant $\frac{a}{\rho^{1+\mu}}$ par B, l'intégrale

$$\int \frac{da}{d\rho}\,\frac{h\rho^2}{r^3}\,d\rho$$

se décomposera dans les deux suivantes

$$\int \frac{(1+\mu)\rho^{2+\mu}h\mathrm{B}}{r^3}\,d\rho + \int \frac{\rho^{3+\mu}}{r^3}\cdot\frac{d\mathrm{B}}{d\rho}\,h\,d\rho.$$

Le théorème du paragraphe précédent a lieu immédiatement pour la deuxième intégrale, et avec quelque modification pour la première. Car si l'on pose

$$\frac{1}{\mu} = m, \quad \rho^\mu = \sigma, \quad \text{ou} \quad \rho = \sigma^m,$$

la première intégrale devient

$$= (m+1)\int \frac{\mathrm{B}h\sigma^{3m}d\sigma}{[\sigma^{2m}+(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

elle n'a une valeur infiniment petite que lorsque les limites de l'intégration sont o et une valeur infiniment petite de σ; mais pour chaque valeur finie de σ, le coefficient de $d\sigma$ conserve la même valeur, à un infiniment petit près, soit qu'on fasse $x = 0$, soit qu'on donne à x une valeur infiniment petite. Cette propriété appartient donc à l'intégrale entière, lorsqu'elle est étendue depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = \sqrt[m]{\rho}$.

Il y a cependant un cas auquel nos conclusions ne s'appliquent pas, c'est celui où $\frac{a}{\rho}$ n'est du même ordre avec aucune puissance de ρ, comme si, par exemple, $\frac{a}{\rho}$ était du même ordre que $\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}$. Dans ce cas, pour toute position du point O infiniment rapprochée de la surface, Q croîtrait au delà de toute limite, et il en serait de même de X, si cette circonstance ne se présentait pas seulement pour quelques valeurs de θ, mais pour toutes les valeurs de θ. Il est toutefois inutile de s'arrêter à ce cas exceptionnel, dont le développement ne serait d'aucune utilité pour nos recherches.

XVII.

Nous allons maintenant considérer la quantité Y, dont $\frac{hbdbdc}{r^3}$ est un élément indéterminé, et dans cette analyse nous conserverons les mêmes hypothèses et les mêmes notations que dans le § XV.

Comme

$$r = \sqrt{b^2 + c^2 + (a - x)^2},$$

et que

$$\frac{d.\frac{h}{r}}{db} = -\frac{hb}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{dh}{db} - \frac{h(a-x)}{r^3}\frac{da}{db},$$

puisque c est considérée comme constante, la première intégration donnera

$$\int \frac{hbdb}{r^3} = \frac{h^{(1)}}{r^{(1)}} - \frac{h^{(2)}}{r^{(2)}} + \int \frac{1}{r}\frac{dh}{db}db - \int \frac{h(a-x)}{r^3}\frac{da}{db}db.$$

Dans cette formule les intégrales doivent s'étendre depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de b pour chaque valeur déterminée de c; les valeurs de h et r relatives aux limites, sont désignées par $h^{(1)}$, $r^{(1)}$, $h^{(2)}$, $r^{(2)}$. Si, pour abréger, on pose

$$\frac{h^{(1)}}{r^{(1)}} - \frac{h^{(2)}}{r^{(2)}} = \mathrm{T}, \quad \frac{\rho}{r}\cdot\frac{dh}{db} - \frac{h(a-x)}{r^3}\rho\frac{da}{db} = \mathrm{U},$$

on aura plus simplement

$$\mathrm{Y} = \int \mathrm{T}dc + \int\int \frac{\mathrm{U}}{\rho}dbdc,$$

formule où l'intégration relative à c doit s'étendre depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur que cette coordonnée acquiert sur la surface. Dans l'intégrale double, $dbdc$ est la projection d'un élément indéterminé de la surface sur le plan des yz : or cette projection étant aussi exprimée par $\rho d\rho d\theta$, on pourra écrire

$$\mathrm{Y} = \int \mathrm{T}dc + \int\int \mathrm{U}d\rho d\theta,$$

formule où, dans l'intégrale double, l'intégration relative à ρ a pour limites o et ρ'; celle relative à θ a pour limites o et 2π. Or, en raisonnant comme dans le § XV, on voit que cette expression conserve, à un infiniment petit près, la même valeur, soit qu'on pose $x = 0$, soit qu'on fasse x infiniment petit. En d'autres termes, la limite de Y pour des valeurs positives ou négatives de x indéfiniment décroissantes, reste la même, et sa valeur n'est autre que celle que prend Y pour $x = 0$. Par analogie, nous désignerons cette valeur par Y_0, en remarquant toutefois qu'elle ne représente pas exclusivement la valeur de l'intégrale $\int \frac{kb\,ds}{r^3}$ pour $x = 0$ (parce que cette expression n'admet pas pour $x = 0$ une véritable intégration); elle n'est qu'une des valeurs de l'intégrale, celle que l'on obtient en intégrant dans l'ordre indiqué plus haut.

Mais ce résultat est sujet à quelques restrictions (voir le § XVI) dans le cas particulier où le rayon de courbure de la surface en P est infiniment petit, et aussi quand, dans ce même point, $\frac{dh}{db}$ devient infiniment grand; mais il est inutile, pour le but que nous nous proposons, d'examiner ces cas exceptionnels, qui d'ailleurs ne peuvent se présenter que dans quelques points ou lignes, non pas dans les parties mêmes de la surface, mais à leurs limites.

Enfin ce que nous avons dit de Y s'appliquera évidemment à l'intégrale $Z = \int \frac{kc\,ds}{r^3}$. Cette intégrale aura aussi la même valeur Z_0, quand le point O, situé sur l'axe des x, sera infiniment près du point P, soit du côté des x positives, soit du côté des x négatives, et cette valeur limite Z_0 est celle de l'intégrale $\int\int \frac{kc\,dc\,db}{r^3}$ pour $x = 0$, en supposant qu'on ait commencé à intégrer relativement à c.

XVIII.

Si l'on considère que dans tous les points de l'espace qui ne sont pas sur la surface, les quantités $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ sont identiques avec X, Y, Z, et que V varie partout d'une manière continue, on en conclura, en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent, qu'à une distance infiniment petite de P, ou pour des valeurs infiniment petites de x, y, z, la valeur de V, en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, est toujours exprimée par

$$V_0 + x(X_0 - 2\pi k_0) + yY_0 + zZ_0$$

quand x est positif, et par

$$V_0 + x(X_0 + 2\pi k_0) + yY_0 + zZ_0,$$

quand x est négatif. Dans cette formule, V_0 désigne la valeur de V au point P, c'est-à-dire pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Nous allons maintenant considérer les valeurs de V dans une ligne droite qui traverse P, et qui fait avec les axes les angles A, B, C. Si nous désignons par t une partie indéterminée de cette ligne, et par t_0 la valeur de t en P, nous aurons, en supposant $t - t_0$ infiniment petit et en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$V = V_0 + (t - t_0)(X_0 \cos A + Y_0 \cos B + Z_0 \cos C \mp 2\pi k_0 \cos A).$$

On devra prendre le signe supérieur pour des valeurs positives, et l'inférieur pour des valeurs négatives de $(t - t_0)\cos A$, c'est-à-dire qu'au point P, $\frac{dV}{dt}$ a deux valeurs pour un angle A aigu, savoir,

$$X_0 \cos A + Y_0 \cos B + Z_0 \cos C - 2\pi k_0 \cos A,$$
$$X_0 \cos A + Y_0 \cos B + Z_0 \cos C + 2\pi k_0 \cos A,$$

suivant que dt est positif ou négatif. Quand l'angle A est droit, c'est-à-dire quand la ligne droite est tangente à la surface, ces deux valeurs se réduisent à une seule qui est

$$\frac{dV}{dt} = Y_0 \cos B + Z_0 \cos C.$$

Les théoremes que nous avons développés jusqu'ici ne sont pas essentiellement nouveaux, mais nous avons cru devoir nous y arrêter parce qu'ils servent d'introduction à la série de théorèmes nouveaux que nous allons démontrer dans les paragraphes suivants.

XIX.

Soient V le potentiel d'un système de masses $M_1, M_2, M_3, \ldots$ concentrées dans les points $P_1, P_2, P_3, \ldots$;

v le potentiel d'un système de masses $m_1, m_2, m_3, \ldots$ concentrées dans les points $p_1, p_2, p_3, \ldots$;

$V_1, V_2, V_3, \ldots$ les valeurs de V en ces derniers points;

$v_1, v_2, v_3, \ldots$ les valeurs de v dans les points $P_1, P_2, P_3, \ldots$;

on aura l'équation

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 + \text{etc.} = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \text{etc.},$$

ou bien

$$\sum Mv = \sum mV,$$

en représentant par M une masse quelconque du premier système et par m une masse quelconque du second. Les notations $\sum Mv$ et $\sum mV$ ainsi définies, désignent la somme de toutes les quantités telles que $\frac{Mm}{\rho}$ en appelant ρ la distance des points où sont placées les masses M et m.

Quand les masses de l'un des systèmes ou de tous les deux, au lieu d'occuper des points isolés, sont distribuées sans intervalles sur des lignes, sur des surfaces, ou dans des espaces matériels, l'équation précédente subsiste, en substituant à chaque somme l'intégrale qui en est la limite.

Donc si, par exemple, les masses du second système sont distribuées sur une surface de telle sorte que la masse kds occupe l'élément de surface ds, on aura $\sum M \;\; = \int kVds$, et si l'on fait une hypothèse analogue sur le premier système, en supposant que KdS est la masse contenue dans l'élément dS, on aura $\int KvdS = \int kVds$. Il importe, dans ce dernier cas, de remarquer que l'équation subsisterait quand même les deux surfaces coïncideraient. Mais, afin de ne pas dépasser les bornes que nous nous sommes imposées, nous nous bornerons à donner une idée de la manière dont on démontre rigoureusement l'extension du théorème à ce cas particulier. Il est évident que les deux intégrales, considérées comme s'appliquant à une seule et même surface, sont les limites de deux intégrales relatives à des surfaces distinctes qui se rapprocheraient indéfiniment, surfaces que, pour plus de simplicité, on prendra égales et parallèles. A la vérité cette marche ne paraît applicable qu'au cas où toutes les normales à la surface font des angles aigus avec une même ligne droite. Mais une surface dans laquelle cette condition ne serait pas remplie (ce qui arriverait pour une surface fermée) pouvant toujours être décomposée en parties qui satisfont à cette condition, on voit immédiatement que ce cas se ramène au premier.

XX.

Si nous appliquons le théorème du paragraphe précédent au cas ou le second système des masses est répandu d'une manière uniforme sur la surface d'une sphère de rayon R, où sa densité constante k est prise égale à 1, nous voyons que le potentiel v qui en résulte est dans l'intérieur de la sphère constant et égal à $4\pi R$; dans tout point situé hors de la sphère, à une distance r du centre, on a $v = \frac{4\pi R^2}{r}$, c'est-à-dire que v est alors égal au potentiel d'une masse $4\pi R^2$, réunie au centre de la sphère. A la surface, les deux valeurs de v deviennent égales. Donc, si le premier système des masses est tout entier dans l'intérieur de la sphère, $\sum Mv$ sera égal au produit de $4\pi R$ par toute la masse de ce système. Mais si ce système est tout entier en dehors de la sphère, $\sum Mv$ sera égal au produit de $4\pi R^2$ par la valeur que le potentiel du système possède au centre de la sphère.

Enfin, si le premier système est distribué d'une manière continue sur la surface de la sphère, on trouve pour $\int k_0 ds$ deux expressions équivalentes. De là résulte ce théorème.

Théorème. « Si V désigne le potentiel d'une masse (distribuée d'une » manière quelconque) sur l'élément ds d'une surface sphérique de

» rayon R et qu'on intègre Vds pour toute la surface, on aura

$$\int V ds = 4\pi (RM_0 + R^2 V_0),$$

» désignant par M_0 toute la masse située dans l'intérieur de la
» sphère, par V_0 le potentiel de la masse extérieure pour le centre de
» la sphère, et en regardant à volonté comme masse intérieure ou
» masse extérieure la masse distribuée sur la surface même de la
» sphère. »

XXI.

Théorème. « Le potentiel V de masses situées en dehors d'un espace
» limité, ne peut avoir une valeur constante dans une partie de cet
» espace et une valeur différente dans une autre partie. »

Démonstration. Supposons que dans chaque point de l'espace A, le potentiel ait une valeur constante a, et que, dans un espace B contigu à A, il puisse avoir une valeur plus grande que a (dans le sens algébrique). Construisons une sphère dont une partie soit en B, et l'autre partie avec le centre soit en A, ce qui est toujours possible. Si R désigne le rayon de cette sphère et ds un élément quelconque de sa surface, on aura, d'après le théorème précédent,

$$\int V ds = 4\pi R^2 a,$$

et par conséquent

$$\int (V - a) ds = 0.$$

Or cela est impossible, puisque, pour la partie de la surface située en A, $V - a = 0$, tandis que pour l'autre partie $V - a$ n'est pas nul, mais a une valeur positive, d'après ce que nous avons supposé plus haut.

On verrait, d'une manière analogue, qu'il est impossible que V soit plus petit que a, dans un espace contigu à A.

Cependant l'un ou l'autre de ces cas devrait arriver, si notre théorème était faux.

De ce théorème on déduit les corollaires suivants :

1°. Si l'espace qui contient les masses renferme un espace vide, et que le potentiel, dans une partie de cet espace, ait une valeur constante, cette valeur conviendra à tout l'espace vide;

2°. Si le potentiel de masses contenues dans un espace fini a une valeur constante dans une partie quelconque de l'espace extérieur, cette valeur conviendra à tout l'espace extérieur.

On voit en même temps que, dans le second cas, la valeur constante du potentiel ne peut être que 0; car si m désigne la somme des masses dans le cas où elles ont toutes le même signe, et dans tout autre cas si m désigne la somme des masses positives ou des masses négatives, suivant que l'action des unes l'emporte sur l'action des autres le potentiel, en un point dont la plus courte distance au système est r, sera toujours en valeur absolue moindre que $\frac{m}{r}$. Or cette fraction peut devenir dans l'espace extérieur moindre que toute quantité donnée.

XXII.

Théorème. « Soient ds l'élément d'une surface enveloppant un es-
» pace fini, et P l'action exercée dans une direction normale à ds par
» des masses distribuées d'une manière quelconque. Regardons comme
» positive toute force dirigée suivant cette normale en dehors ou en de-
» dans, suivant que l'on donne le signe + aux masses attractives ou aux
» masses répulsives. Cela posé, l'intégrale $\int \mathrm{P}ds$, étendue à la surface
» entière, sera égale à $4\pi\mathrm{M} + 2\pi\mathrm{M}_1$, M désignant la somme des masses
» placées dans l'intérieur de l'espace et M_1 la somme de celles qui sont
» distribuées sur la surface même. »

Démonstration. Si l'on désigne par $\mathrm{U}d\mu$ la partie de P qui provient de l'élément de masse $d\mu$; par r la distance qui sépare les éléments $d\mu$, ds; par u l'angle qu'une normale intérieure, menée en ds, fait avec r, on aura

$$\mathrm{U} = \frac{\cos u}{r^2}.$$

Mais, d'après un théorème démontré au § VI de l'ouvrage intitulé *Theoria attractionis corporum spheroidicorum ellipticorum*, on doit avoir, pour chaque valeur déterminée de $d\mu$,

$$\int \frac{\cos u}{r^2}\, ds = 0, \quad 2\pi, \quad \text{ou} \quad 4\pi,$$

suivant que $d\mu$ est placé en dehors de l'espace enveloppé par la surface, sur la surface même, ou au dedans de l'espace. Or, comme $\int \mathrm{P}\,ds$ est égal à la somme de toutes les valeurs de $d\mu \int \mathrm{U}\,ds$, notre théoreme se trouve ainsi démontré.

Le théorème auxiliaire que nous venons d'employer doit être modifié dans un cas particulier. Nous savons que r désignait la distance d'un *point donné* à l'élément ds. Or, quand ce point est donné sur la surface, la formule

$$\int \frac{\cos u}{r^2}\, ds = 2\pi$$

n'est rigoureuse qu'autant que la continuité de la courbure de la surface n'est pas interrompue en ce point. Cette interruption a lieu lorsque le point est situé sur une arête ou dans un coin. Il faut alors remplacer 2π par l'aire d'une portion de surface sphérique, ayant pour rayon l'unité, pour centre le point en question, portion découpée par le cône formé de toutes les tangentes à la surface en ce point. Mais, ces exceptions n'ayant lieu que dans des lignes ou des points, jamais dans une portion finie de surface, on voit qu'elles restent sans influence sur l'usage que nous avons fait du théorème auxiliaire.

XXIII.

Élevons une normale par un point quelconque de la surface, et désignons par p la distance de ce point à un point quelconque de la normale, en considérant cette distance comme positive quand le point est du côté interne de la surface. On peut considérer le potentiel des masses comme une fonction de p et de deux autres variables servant à déterminer la position du second point considéré. On peut en dire autant de $\frac{dV}{dp}$, dont, au reste, nous ne considérerons la valeur que pour un point situé sur la surface, c'est-à-dire pour $p=0$. Cette valeur est identique avec P quand les masses se trouvent toutes à l'extérieur ou toutes a l'intérieur, ou bien les unes à l'intérieur et les autres à l'extérieur, ou encore dans l'un et l'autre espace, pourvu qu'il n'y ait aucune masse à la surface même. On aura donc, dans cette hypothèse,

$$\int \frac{dV}{dp}\, ds = 4\pi M.$$

Au contraire, dans le cas où la masse est exclusivement distribuée à la surface, et de telle manière que l'élément ds contienne la masse kds, les valeurs de $\frac{dV}{dp}$ et de P ne sont plus identiques. La derniere de ces quantités est, par rapport à p, ce que X_0, dans le § XV, était par rapport à x; mais $\frac{dV}{dp}$ a deux valeurs différentes, $P - 2\pi k$, et $P + 2\pi k$, suivant que dp est positif ou négatif. Or, comme il est évident que l'intégrale $\int kds$, étendue à la surface entière, a pour valeur toute la masse M_1 distribuée sur cette surface, et que, d'après le théorème du paragraphe précédent, $\int Pds = 2\pi M_1$, on aura

$$\int \frac{dV}{dp}\, ds = 0, \quad \text{ou} \quad \int \frac{dV}{dp}\, ds = 4\pi M_1,$$

suivant que l'on prend partout pour $\frac{dV}{dp}$ la valeur relative à la face intérieure, ou la valeur relative à la face extérieure; l'intégrale $\int \frac{dV}{dp}\, ds$ doit être calculée, dans le premier cas, en considérant la masse M_1 comme appartenant à l'espace extérieur, et dans le second à l'espace intérieur.

Il résulte de là que l'équation $\int \frac{dV}{dp}\, ds = 4\pi M$ convient à des masses distribuées d'une maniere quelconque, pourvu que M désigne l'ensemble des masses de l'intérieur. Cependant il faut bien se rappeler que, s'il y a des masses distribuées d'une manière continue à la surface, il faudra les considérer comme intérieures ou en faire abstraction, suivant qu'on aura pris pour $\frac{dV}{dp}$ sa valeur à la surface externe, ou sa valeur à la surface interne.

S'il n'y a pas de masses dans l'intérieur de l'espace, on aura

$$\int \frac{dV}{dp} ds = 0,$$

pourvu que l'on prenne les valeurs de $\frac{dV}{dp}$ relatives à la surface interne.

XXIV.

Théorème. « En admettant l'existence des conditions exigées à la fin » du dernier paragraphe, en désignant par T l'espace considéré, par » q la force totale avec laquelle agissent sur l'élément dT les masses » situées en dehors de l'espace ou distribuées d'une manière continue à » la surface, on a l'équation importante

$$\int V \frac{dV}{dp} ds = -\int q^2 dT,$$

» la première intégrale s'étendant à toute la surface, et la seconde à » tout l'espace T. »

Démonstration. Prenons des coordonnées rectangulaires, et considérons dans l'espace T une droite parallèle à l'axe des x, et pour laquelle, par conséquent, y et z sont constants; il résulte de l'équation identique

$$\frac{d\left(V\frac{dV}{dx}\right)}{dx} = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V\frac{d^2V}{dx^2},$$

que l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V\frac{d^2V}{dx^2}\right] dx,$$

étendue à la partie de la ligne comprise dans l'intérieur de l'espace T, est égale à la différence des valeurs de $V\frac{dV}{dx}$ aux extrémités de la ligne.

39..

quand la ligne coupe la surface en deux points seulement, et que dans tout autre cas, cette intégrale est égale à

$$\sum \varepsilon V \frac{dV}{dx},$$

en prenant dans cette somme les valeurs de $V\frac{dV}{dx}$ aux points d'intersection de la droite et de la surface, et en donnant à ε la valeur -1 pour les intersections d'ordre impair (la première, la troisième, etc.), la valeur $+1$ pour les intersections d'ordre pair. Si maintenant on considère cette ligne droite comme l'arête d'un prisme infiniment petit ayant pour section normale $dydz$, et par conséquent pour élément de volume $dxdydz$, l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V\frac{d^2V}{dx^2}\right] dT,$$

étendue à toutes les parties de T qui font partie de cet espace prismatique, sera égale à $\sum \varepsilon V \frac{dV}{dx}\, dydz$. Ce prisme coupe la surface en deux ou plus généralement en un nombre pair de parties. L'une de ces sections étant désignée par ds, et φ étant l'angle que fait avec l'axe des x une normale intérieure élevée en ds, on aura

$$dydz = \pm \cos\varphi\, ds,$$

le signe supérieur étant pour les intersections d'ordre impair, et le signe inférieur pour les autres. Il suit de là que l'intégrale précédente est égale à

$$-\sum V\frac{dV}{dx}\cos\varphi\, ds,$$

expression dans laquelle le signe sommatoire se rapporte aux éléments de surfaces que nous avons considérés. Il est visible qu'en décomposant tout l'espace en de semblables éléments prismatiques, on ne laissera échapper aucun point de la surface, et que l'on aura

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 - V\frac{d^2V}{dx^2}\right] dT = -\int V\frac{dV}{dx}\cos\varphi\, ds.$$

la première intégration devant s'étendre à tout l'espace T, la deuxième à toute la surface s. Maintenant il est évident que $\cos \rho = \frac{dx}{dp}$, en conservant à p la signification qu'il a dans le § XXIII et en considérant x comme fonction de p et des deux autres variables qui servent à distinguer les points de la surface les uns des autres. Donc

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + V \frac{d^2V}{dx^2} \right] dT = - \int V \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dp} ds.$$

Bien entendu que, dans le cas où la surface même contient des masses, et où par conséquent $\frac{dV}{dx}$ a deux valeurs différentes, il s'agit de la valeur relative à l'espace intérieur.

On arrivera, par des considérations analogues, aux équations

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + V \frac{d^2V}{dy^2} \right] dT = - \int V \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dp} ds,$$
$$\int \left[\left(\frac{dV}{dz} \right)^2 + V \frac{d^2V}{dz^2} \right] dT = - \int V \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dp} ds,$$

en ajoutant ces trois équations membre à membre, et en observant que dans l'espace T on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$
$$\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 = q^2,$$

et qu'à la surface

$$\frac{dV}{dx} \frac{dx}{dp} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dp} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dp} = \frac{dV}{dp},$$

on aura

$$\int q^2 dT = - \int V \frac{dV}{dp} ds,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème, en ayant égard au dernier corollaire du paragraphe précédent, peut être exprimé d'une manière plus générale par l'équation

$$\int q^2 dT = \int (A - V) \frac{dV}{dp} ds,$$

A étant une constante arbitraire.

XXV.

Théorème. « Les mêmes choses étant admises que dans le paragraphe précédent, si le potentiel V a une valeur constante en tout » point de la surface qui limite l'espace T, cette valeur convient à tous » les points de l'espace lui-même; d'où résulte une destruction totale » des forces dans tout l'espace. »

Démonstration. Si dans l'équation la plus générale du paragraphe précédent, on met pour A la valeur constante que le potentiel possède à la surface, on a

$$\int q^2 dT = 0:$$

d'où résulte $q = 0$ pour tous les points de l'espace T; ensuite

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0,$$

d'où l'on conclut que V est constant dans tout l'espace T.

XXVI.

Théorème. « Lorsque des masses sont situées dans l'intérieur d'un » espace limité T, ou répandues d'une manière continue sur quelques » parties ou sur la totalité de la surface s de T, si le potentiel a, en » chaque point de cette surface, une valeur constante A, le potentiel » aura, en tout point O de l'espace infini extérieur T',

» 1°. Une valeur nulle, si $A = 0$;

» 2°. Une valeur plus petite que A et de même signe, quand A est » différent de 0. »

Démonstration. 1°. Il faut d'abord prouver que le potentiel ne peut pas avoir en O une valeur qui soit hors des limites 0 et A. En effet supposons que le potentiel puisse avoir en O une telle valeur B, et désignons par C une quantité arbitraire comprise à la fois entre B et 0, et entre B et A. Menons par le point O des lignes droites dans toutes les directions; il y aura sur chacune de ces droites un point O' pour lequel la valeur du potentiel sera égale à C, et de plus toute la ligne

OO′ doit appartenir à l'espace T′. Cela résulte de la continuité des valeurs du potentiel qui doit, si la droite est suffisamment prolongée, varier de B à A ou devenir infiniment petit, suivant que la ligne droite perce ou ne perce pas la surface s (*voir* les observations de la fin du § XXI). L'ensemble de tous les points O′ formera une surface terminée de toutes parts, et comme le potentiel est constamment égal à C sur cette surface, il faudrait, d'après le théorème du paragraphe précédent, qu'il eût, en tous les points de l'espace limité par la surface dont il s'agit, la même valeur C. Mais nous savons, au contraire, que nous avons au point O une valeur B différente de C. L'hypothese que nous avons admise sur le potentiel conduit donc à une contradiction.

Ceci prouve le théorème énoncé dans le cas où $A = 0$, et fait voir, dans le cas où A est différent de 0, que la valeur du potentiel en O ne peut être plus grande que A ni être de signe contraire.

2°. Pour compléter la démonstration dans le second cas, décrivons du point O comme centre, et avec un rayon R plus petit que la plus courte distance entre O et s, une surface sphérique que nous décomposerons en ses éléments ds. Soit V le potentiel en chaque élément ds, et désignons encore par B la valeur du potentiel au point O. D'après le théorème du § XX, l'intégrale $\int V ds$, étendue à toute la surface sphérique, est égale à $4\pi R^2 B$, et par suite

$$\int (V - B)\, ds = 0.$$

Or cette équation ne peut subsister qu'autant que V a la même valeur B dans tous les points de la surface sphérique, ou bien a en certains points une valeur plus grande que B, et en d'autres une valeur plus petite. Dans la première supposition on conclurait du § XXV que le potentiel est constant dans tout l'espace intérieur de la sphère, et du § XXI qu'il aurait cette même valeur (et par suite une valeur nulle) dans tout l'espace infini extérieur à T. Mais cela est en contradiction avec l'hypothèse que le potentiel est différent de 0 à la surface s, par l'impossibilité où est le potentiel de varier brusquement. Quant à la seconde supposition, elle est en contradiction manifeste avec ce qu'on a déjà vu (1°), lorsqu'on suppose $B = 0$ ou $= A$; B doit donc être compris entre 0 et A.

XXVII.

Théorème. « Dans le théorème du paragraphe précédent, le premier » cas, celui où la valeur constante du potentiel est nulle, ne peut avoir » lieu que lorsque la somme algébrique des masses est nulle ; le second » cas ne peut se présenter que lorsque cette somme est différente de o. »

Démonstration. Soit ds l'élément d'une surface sphérique, de rayon R, et qui renferme l'espace T. Désignons par M la somme de toutes les masses, et par V leur potentiel en ds. D'après le théorème du § XX, l'intégrale $\int V ds = 4\pi RM$; d'après le précédent théorème, le potentiel V est nul pour tout point de la surface sphérique quand $A = 0$, plus petit que A et de même signe quand $A \gtrless 0$. Il en résulte, dans le premier cas, que $4\pi RM = 0$, d'où $M = 0$; dans le deuxième, que $4\pi RM$, et par suite M est de même signe que A. On en conclut aussi que dans le second cas, $4\pi RM$ est plus petit que $\int A ds = 4\pi RA$, M plus petit que RA, et A plus grand que $\frac{M}{R}$.

La seconde partie de ce théorème, dans son rapport avec le théorème du paragraphe précédent, peut être énoncée de la manière suivante :

« Lorsque des masses dont la somme algébrique est nulle sont si» tuées dans l'intérieur d'un espace limité par une surface fermée, ou » distribuées en partie d'une manière continue sur la surface, et que le » potentiel a une valeur constante en chaque point de cette surface, » cette valeur ne peut être différente de o, et s'étend à tout l'espace in» fini extérieur ; d'où suit que, dans tout l'espace extérieur, les ac» tions de ces masses se neutralisent complétement. »

XXVIII.

On se convaincra facilement que toutes les conclusions du paragraphe précédent subsistent quand s est une surface non fermée, et qu'il n'existe des masses que sur cette surface. Dans ce cas il n'y a plus d'espace T, et tout point qui n'appartient pas à la surface appartient à l'espace infini extérieur. Si le potentiel a en tout point de la surface une valeur constante A différente de o, il aura en dehors une valeur plus petite et de même signe.

Ce qui se rapporte au cas de $A = 0$ est encore vrai ici, mais sans utilité. En effet, le potentiel aura dans ce cas une valeur nulle en tout point de l'espace; donc, t étant la longueur d'une ligne droite, on aura partout $\frac{dV}{dt} = 0$. De là et du § XVIII on conclura que la densité est nulle en tout point de la surface, c'est-à-dire que la surface ne peut contenir aucune masse.

Au reste, cette dernière observation convient aussi au cas de masses exclusivement distribuées sur une surface fermée; car, d'après le § XXV, on voit que la valeur du potentiel est o dans tout l'espace intérieur.

XXIX.

Avant de passer à de nouvelles recherches concernant des masses distribuées d'une manière continue sur une surface, il importe de distinguer deux modes différents de distribution, correspondants au cas où nous considérons des masses toutes de même signe (que nous regarderons comme positives) et au cas où nous considérons des masses de signes différents. Quand une masse M sera distribuée sur une surface de manière que l'élément ds en contienne une portion mds, nous dirons que la distribution est *homogène* si m est partout positif, ou du moins n'est jamais négatif. Si m désigne la densité, comme cela a lieu ordinairement, l'intégrale $\int mds$, étendue à la surface entière, donnera la masse M. Dans le cas contraire, où m est positif en certains points et négatif dans d'autres, nous dirons que la distribution est *hétérogène*, et M ne désignera plus alors la somme des masses, mais la valeur absolue de la différence entre la somme des masses positives et la somme des masses négatives. Un cas remarquable de la distribution hétérogène est celui où $M = 0$; il peut paraître étrange que l'on dise alors qu'une masse nulle est distribuée sur la surface.

XXX.

Il est évident que, dans le cas de la distribution *homogène* d'une masse M sur une surface, la valeur positive du potentiel en chaque point de la surface est plus grande que $\frac{M}{r}$, r étant la plus grande distance de deux points de la surface. Le potentiel ne pourrait avoir la valeur $\frac{M}{r}$ qu'à une extrémité de la ligne r, et lorsqu'on supposerait toute la masse M concentrée à l'autre extrémité. Mais nous écarterons ce cas particulier, et nous supposerons seulement que la masse totale est distribuée d'une manière continue, chaque élément ds en possédant une quantité infiniment petite mds. L'intégrale $\int V mds$, étendue à toute la surface, sera donc plus grande que $\int \frac{M}{r} mds$ ou que $\frac{M^2}{r}$, et il est évident qu'il existera un certain mode de distribution pour lequel cette intégrale aura une valeur minimum. Nous allons démontrer que, dans le mode de distribution correspondant à la valeur minimum de $\int V mds$, le potentiel V a une valeur constante en tout point de la surface, qu'aucun élément de cette surface ne reste vide, enfin qu'il n'y a qu'une seule distribution de ce genre. Dans ce but, nous commencerons par traiter une question beaucoup plus générale.

XXXI.

Soit U une grandeur ayant en chaque point de la surface une valeur déterminée, finie et continue.

L'intégrale

$$\Omega = \int (V - 2U)\, mds,$$

étendue à la surface entière, pourra avoir des valeurs très-différentes, suivant les différentes manières dont la masse sera distribuée sur la surface; mais il est évident qu'il y a tel mode de distribution pour lequel l'intégrale a la plus petite valeur possible. Cela posé, on aura ce théorème.

Théorème. « Dans le cas où le dernier mode de distribution est sup-
» posé avoir lieu,

» 1°. La différence $V - U = W$ a une valeur constante dans toutes
» les parties de la surface qui contiennent quelques portions de la
» masse M;

» 2°. Partout où la surface ne possède pas de parties de masses, W est
» plus grand, ou du moins n'est pas plus petit que la valeur constante
» en question. »

1. Nous allons d'abord démontrer que si à un mode de distribution on en substitue un autre qui en diffère infiniment peu, en changeant m en $m + \mu$, la variation correspondante de Ω sera exprimée par $2\int W\mu ds$.

En effet, les variations de Ω et de V étant désignées respectivement par $\delta\Omega$ et δV, on aura

$$\delta\Omega = \int \delta V m ds + \int (V - 2U)\mu ds.$$

Mais on a

$$\int \delta V m ds = \int V\mu ds,$$

d'apres le § XIX, puisque δV n'est autre chose que le potentiel des masses dans le mode de distribution où chaque élément de surface contient la masse μ, et qu'en conséquence V, m, δV, μ sont les analogues des quantités désignées par les lettres V, K, v, k, tandis que ds remplace à la fois dS et ds. On aura donc

$$\delta\Omega = \int (2V - 2U)\mu ds = 2\int W\mu ds.$$

2. Il est évident que la variation de μ doit être assujettie à la condition $\int \mu ds = 0$, et à cette autre que μ ne soit négatif en aucune partie vide de la surface; autrement la distribution cesserait d'etre homogene.

3. Supposons maintenant que, dans un mode déterminé de distribution, la quantité W ait des valeurs différentes en divers points de la surface. Soit A une valeur moyenne entre la plus grande et la plus petite valeur de W, soit P la partie de la surface où l'on a $W > A$, et Q la partie de la surface où l'on a $W < A$; soient p, q deux portions égales de la surface donnée, l'une prise en P, l'autre en Q. Supposons que, dans toute l'étendue de p, la variation de m soit constante et ait la valeur négative $\mu = -\nu$, et que dans q, au contraire, elle ait la valeur constante positive $\mu = \nu$; partout ailleurs supposons cette variation nulle. Il est évident que la première condition de l'art. 2 est remplie; quant à la seconde, qui exige qu'aucune partie de p ne soit vide de matière, il sera toujours possible d'y satisfaire toutes les fois que P ne sera pas entièrement vide.

Il suit de là que la variation $\delta\Omega$ est négative, ce que l'on voit facilement en mettant cette variation sous la forme $2\int(W - A)\mu ds$.

On voit aussi que, dans tout mode de distribution où la quantité W a des valeurs différentes dans les parties pleines de la surface, ou bien où W, ayant la même valeur dans les parties pleines, a une valeur plus petite dans les parties vides, par un changement dans la distribution Ω diminue. Il est donc nécessaire que, dans le cas du minimum, les conditions énoncées au théorème soient remplies.

XXXII.

Quand on applique les résultats précédents au cas particulier considéré plus haut (§ XXX), où $U = 0$, W désigne simplement le potentiel des masses de la surface, Ω l'intégrale $\int Vmds$. En rapprochant le théorème du dernier paragraphe de celui du § XXVIII, on voit que, dans la distribution correspondante au minimum de $\int Vmds$, aucune partie de la surface ne peut être vide; car, lors même que la surface serait fermée, si elle présentait des parties pleines et des parties vides, les premières ne formeraient pas une surface fermée, et les secondes relativement aux premières appartiendraient à l'espace infini extérieur. Donc (§ XXVIII) le potentiel aurait une valeur moindre dans ces parties de la surface, ce que nous venons de voir être impossible.

Il est donc démontré qu'il existe une distribution homogène d'une masse donnée, où aucune partie de surface ne reste vide et où tous ses points ont le même potentiel. Afin de démontrer d'une maniere complete le théoreme du § XXX, il reste à prouver que ce mode de distribution est unique. C'est ce que nous ferons plus bas, en traitant d'un théorème plus général.

La proposition que, dans le cas du minimum de $\int \mathrm{V}mds$, aucune partie de la surface ne peut rester vide, peut s'énoncer de la manière suivante :

« Dans tout mode de distribution où des parties de la surface restent » vides, l'intégrale $\int \mathrm{V}mds$ surpasse sa valeur minimum d'une quantité » finie. »

XXXIII.

La démonstration du § XXXI repose principalement sur l'existence d'un minimum de Ω, laquelle est tant qu'on se borne à la distribution homogene d'une masse donnée. Si la même évidence avait lieu dans un cas quelconque et lorsque la deuxième condition (§ XXX, 2) n'est pas remplie, on pourrait dès à présent établir ce théorème : *il existe un mode de distribution homogène ou hétérogène, dans lequel* $\mathrm{W} = \mathrm{V} - \mathrm{U}$ *a une valeur constante dans tous les points de la surface*. Mais, comme l'existence d'un minimum n'est plus évidente dès qu'on ne se borne plus à une distribution homogene, nous sommes obligé d'employer une démonstration un peu plus compliquée pour parvenir au but important que nous nous sommes proposé.

Nous supposerons d'abord trois distributions différentes, et, au lieu des expressions indéterminées m, V, qui désignaient la densité et le potentiel, nous emploierons les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&1^{\circ}. \quad m = m_0, \quad \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 ; \\
&2^{\circ}. \quad m = m_1, \quad \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 ; \\
&3^{\circ}. \quad m = \mu, \quad \mathrm{V} = v.
\end{aligned}
$$

La première distribution est une distribution homogene de la masse M, et correspond au minimum de $\int \mathrm{V}mds$;

La deuxième est également homogène, et se rapporte à la même masse M; mais elle correspond au minimum de l'intégrale

$$\int (V - 2\varepsilon U)\, m\, ds,$$

ε étant un coefficient constant arbitraire;

La troisième dépend des deux premières, par la relation $\mu = \frac{m_1 - m_0}{\varepsilon}$: c'est donc une distribution hétérogène dans laquelle la somme des masses est nulle.

D'après ce qui a été démontré (§ XXXI), V_0 est constant dans toute l'étendue de la surface; $V_1 - \varepsilon U$ est constant dans la partie où a lieu la seconde distribution, et dans cette même partie $v - U$ est nécessairement constant, puisque $v = \frac{V_1 - V_0}{\varepsilon}$.

Suivant la valeur de ε, la seconde distribution couvrira la surface entière, ou en laissera une partie vide. Mais cette seconde distribution devenant identique à la première quand $\varepsilon = 0$, il en résulte que les parties qui, pour une valeur de ε, restent vides, diminuent de plus en plus quand ε décroît; en sorte qu'elles se remplissent entièrement quand ε atteint la valeur 0. Il peut arriver néanmoins que des parties de surface restent vides quelque petit que soit ε, quand cette quantité conserve le même signe; mais, dans tous les cas, il suffit de remarquer que, pour ε infiniment petit, aucune partie *finie* de la surface ne peut rester vide; car, si le contraire avait lieu, il en résulterait (§ XXXII, à la fin) que l'intégrale $\int V_1 m_1 ds$ surpasserait d'une quantité finie l'intégrale $\int V_0 m_0 ds$; or, si l'on désignait la différence par e, on aurait

$$\int (V_1 - 2\varepsilon U)\, m_1 ds - \int (V_0 - 2\varepsilon U)\, m_0 ds = e - 2\varepsilon \int U\,(m_1 - m_0)\, ds.$$

La différence de ces deux intégrales deviendrait donc positive pour une valeur infiniment petite de ε, ce qui est en contradiction avec la supposition que, dans le second mode de distribution, l'intégrale $\int (V - 2\varepsilon U)\, m ds$ soit un minimum.

De là résulte que si, dans le troisième mode de distribution, nous prenons μ égal à la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{m_1 - m_0}{\varepsilon}$, quand ε décroît indéfiniment, v — U aura en tous les points de la surface une valeur constante.

Imaginons maintenant un quatrième mode de distribution dans lequel on ait $m = m_0 + \mu$; la masse distribuée sera M, et le potentiel (savoir $V_0 + v$) aura aussi avec U une différence constante sur la surface; ce qui démontre le théorème énoncé.

XXXIV.

Il nous reste à prouver qu'il n'existe pour la masse M qu'un seul mode de distribution, pour lequel V — U soit une constante dans toute l'étendue de la surface. En effet, si deux distributions donnaient ce résultat, m et V étant désignés dans la première par m_1 et V_1, et dans la seconde par m_2 et V_2, le potentiel d'une troisieme distribution dans laquelle on aurait $m = m_1 - m_2$ serait $V_1 - V_2$. Il serait donc constant et la masse entière serait nulle. Donc (§ XXVIII) on aurait

$$m_1 - m_2 = 0;$$

d'où l'on voit que les deux distributions seraient identiques.

Enfin il y a toujours une distribution pour laquelle la différence V — U a une valeur constante donnée; car, si α est une constante arbitraire, les notations restant les mêmes, le potentiel de la distribution où $m = \alpha m_0 + \mu$ sera égal à $\alpha V_0 + U$, et la différence constante $\alpha V_0 + v - U$ sera déterminée pour chaque valeur de α. La masse distribuée ne sera plus arbitraire, elle devra être égale à αM. Mais il n'y aura qu'une seule manière de satisfaire à cette condition.

XXXV.

La détermination rigoureuse d'un pareil mode de distribution d'une masse sur une surface donnée et pour une forme donnée de la fonction U, est, dans la plupart des cas, au-dessus des forces de l'analyse telle qu'elle existe aujourd'hui. Le cas le plus simple où l'on puisse résoudre le problème est celui où la surface donnée est sphérique; mais nous préférons examiner un cas plus général, celui où la surface donnée diffère très-peu d'une sphère, et où l'on peut négliger les infiniment petits d'un ordre supérieur à la différence infiniment petite entre le rayon du sphéroïde et le rayon de la sphère.

Soient R le rayon de la sphère, r la distance d'un point quelconque de l'espace au centre de la sphère, u l'angle compris entre r et une droite fixe, λ l'angle compris entre un plan mené par la droite fixe et par r, et un plan fixe; $R(1+\gamma z)$ la distance d'un point indéterminé du sphéroïde au centre de la sphère, γ étant un facteur constant très-petit dont on peut négliger la seconde puissance, et z étant une fonction de u et de λ; enfin soit U une fonction donnée de u et de λ.

Le potentiel V de la masse distribuée dans toute l'étendue de la surface sphérique peut être exprimé, en chaque point extérieur, par une série ordonnée suivant les puissances descendantes de r et à laquelle nous donnerons la forme

$$A_0 \frac{R}{r} + A_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + A_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \text{etc.}$$

Dans chaque point de l'espace intérieur, le potentiel sera exprimé par la série ascendante

$$B_0 + B_1 \left(\frac{r}{R}\right) + B_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + B_3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \text{etc.}$$

Les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$, sont des fonctions de u et de λ assujetties à satisfaire à certaines équations aux différences partielles (voir *Résultats*, etc., 1838, p. 22), et il en est de même des fonctions B_0, B_1, B_2, etc. Sur la surface en question, le potentiel doit être égal à une fonction donnée U de u et de λ; on aura donc

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} V = (1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} U.$$

Si nous supposons que $(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} U$ soit développé par la série

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \text{etc.},$$

dont tous les termes satisfont aux équations différentielles déjà citées ; et si nous considérons que les développements en série du potentiel doivent être admis à la surface même, nous aurons

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 + \text{etc.} \\
= {} & \mathrm{A}_0(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{A}_1(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}} + \mathrm{A}_2(1+\gamma z)^{-\frac{5}{2}} + \text{etc.}, \\
= {} & \mathrm{B}_0(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{B}_1(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{B}_2(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Donc, si l'on néglige les quantités du même ordre que γ, on aura

$$\mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 + \text{etc.} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \text{etc.}$$

Mais une fonction de u et λ ne peut être développée que d'une seule manière en une série dont les différents termes satisfassent aux mêmes équations différentielles. L'égalité précédente entraîne donc celles-ci :

$$\mathrm{P}_0 = \mathrm{A}_0, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{A}_2, \text{ etc.}$$

On verra de la même manière, et en négligeant les quantités du même ordre que γ, que $\mathrm{P}_0 = \mathrm{B}_0$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{B}_1$, etc.

Donc si l'on pose

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{A}_0 = \mathrm{P}_0 + \gamma a_0, \quad && \mathrm{B}_0 = \mathrm{P}_0 - \gamma b_0, \\
& \mathrm{A}_1 = \mathrm{P}_1 + \gamma a_1, && \mathrm{B}_1 = \mathrm{P}_1 - \gamma b_1, \\
& \mathrm{A}_2 = \mathrm{P}_2 + \gamma a_2, && \mathrm{B}_2 = \mathrm{P}_2 - \gamma b_2, \\
& \mathrm{A}_3 = \mathrm{P}_3 + \gamma a_3, && \mathrm{B}_3 = \mathrm{P}_3 - \gamma b_3, \\
& \text{etc.}, && \text{etc.},
\end{aligned}
\right.
$$

on voit que $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ satisfont aux équations différentielles dont nous avons parlé ; ensuite, si l'on substitue ces valeurs dans les équations écrites plus haut, on aura, en négligeant les quantités du même ordre que γ^2, et divisant par γ,

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.} &= \tfrac{1}{2} z\,(\mathrm{P}_0 + 3\mathrm{P}_1 + 5\mathrm{P}_2 + \text{etc.}), \\
b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \text{etc.} &= \tfrac{1}{2} z\,(\mathrm{P}_0 + 3\mathrm{P}_1 + 5\mathrm{P}_2 + \text{etc.})
\end{aligned}
$$

Donc, en négligeant des infiniment petits du même ordre que γ, on a

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \text{ etc.},$$

et sauf des quantités du même ordre que γ^2,

$$(2)\quad B_0 = P_0 - \gamma a_0, \quad B_1 = P_1 - \gamma a_1, \quad B_2 = P_2 - \gamma a_2, \text{ etc.}$$

Le coefficient différentiel $\frac{dV}{dr}$ a deux valeurs différentes à la surface. Celle qui correspond au cas où dr est négatif, c'est-à-dire à la face intérieure, est plus grande que celle qui correspond à la face extérieure. La différence entre ces deux valeurs est $4\pi m \cos\theta$, m désignant la densité, et θ l'angle de la normale et du rayon vecteur, au point considéré de la surface. [Voir § XIII, où t, A, k_0 ont la même signification que r, θ, m, dans ce moment.] On trouve ces deux valeurs en différentiant les formules qui donnent V pour l'espace intérieur et pour l'espace extérieur, et posant dans le résultat $r = R(1+\gamma z)$. On aura ainsi pour la première

$$\frac{1}{R}\left[B_1 + 2B_2(1+\gamma z) + 3B_3(1+\gamma z)^2 + \text{etc.}\right]$$

et pour la seconde

$$-\frac{1}{R}\left[A_0(1+\gamma z)^{-2} + A_1(1+\gamma z)^{-3} + A_2(1+\gamma z)^{-4} + \text{etc.}\right]$$

Nous aurons donc, en multipliant la différence par $R(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}}$,

$$\begin{aligned}4\pi m R\cos\theta(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} = {} & A_0(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}} + A_1(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}} + A_2(1+\gamma z)^{-\frac{5}{2}} + \text{etc.}\\ & + B_1(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} + 2B_2(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}\end{aligned}$$

En substituant dans ce résultat, pour A_0, A_1, etc., leurs valeurs tirées des équations (1), pour B_0, B_1, ..., leurs valeurs tirées des équations (2), et en négligeant tous les termes du même ordre que γ^2, nous aurons

$$\begin{aligned}4\pi m R\cos\theta(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} = {} & P_0 + 3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + \text{etc.}\\ & + \gamma(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.})\\ & - \tfrac{1}{2}\gamma z(P_0 + 5P_1 + 3P_2 + 7P_3 + \text{etc.});\end{aligned}$$

mais, les deux dernières séries se détruisant quand on néglige les quantités du même ordre que γ^2, on aura

$$m = \frac{(1-\gamma z)^{-\frac{3}{2}}}{4\pi R\cos\theta}(P_0 + 3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + \text{etc.}),$$

ce qui résout le problème. Au lieu de $(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}}$, on peut écrire $1-\frac{3}{2}\gamma z$ et supprimer le diviseur $\cos\vartheta$; car, en général, ϑ est du même ordre que γ, et $\cos\vartheta$ ne diffère de 1 que d'une quantité du même ordre que γ^2.

Quand il s'agit d'une sphère, on a $\gamma = 0$; on obtient alors, et le résultat est rigoureux,

$$m = \frac{1}{4\pi R}(P_0 + 3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + \text{etc.}),$$

P_0, P_1, P_2,... étant les divers termes du développement de U.

XXXVI.

Dans les recherches précédentes, la quantité U a été laissée indéterminée. Si l'on suppose que U est le potentiel d'un système de masses donné, on arrive à un résultat de la plus haute importance.

Théorème. « Si à un mode D de distribution du système donné, que » l'on prend soit exclusivement dans l'intérieur de la surface fermée s, » soit exclusivement dans l'espace extérieur, on substitue un mode de » distribution E dans lequel la masse donnée est exclusivement distri- » buée sur la surface même : dans le premier cas, l'effet de E sera égal à » l'effet de D dans tout l'espace extérieur ; dans le second cas, les deux » effets seront égaux dans tous les points de l'espace intérieur. »

Pour démontrer ce théorème, considérons le potentiel U de D dans tous les points de s, et le potentiel V de E. A la surface, $V - U$ devient égal à 0 dans le premier cas, tandis que dans le second cette différence est seulement constante; car $-U$ sera le potentiel relatif à une distribution D′ qui serait le contraire de celle désignée par D, en sorte que chaque molécule serait remplacée par une molécule opposée. Donc $V - U$ est le potentiel des deux distributions coexistantes D′ et E; donc, dans le premier cas, les effets de ces deux distributions se détruisent dans tout l'espace extérieur, tandis que, dans le second cas, ils se détruisent dans l'espace intérieur (voir §§ XXVII et XXV); c'est-à-dire que les effets de D et E seront les mêmes dans les espaces correspondants. D'ailleurs, dans le premier cas, la masse entière de E sera égale à celle de D; dans le second, elle restera arbitraire.

Le théorème qui a été énoncé dans les ouvrages intitulés : *Intensitas* *vis magneticæ*, page 10, et *Théorie générale du magnétisme terrestre*, n'est plus qu'un cas particulier du théorème que nous venons de démontrer.

XXXVII.

Nous avons dit au § XXXV que le calcul de la distribution E rencontre, dans la plupart des cas, des obstacles insurmontables. Cependant il existe un cas qui ne présente aucune difficulté et dont nous allons parler : c'est celui où U est constant, et où par conséquent la surface s est une surface d'équilibre pour le système des masses de la distribution D. On voit facilement qu'il ne s'agit ici que du cas où la distribution D est exclusivement intérieure, et que la masse entière n'est pas o. Autrement, il n'y aurait pas d'effet qu'il serait nécessaire de remplacer par une distribution de masses sur s.

Soit O un point de la surface s; soit r la longueur d'une droite qui coupe la surface à angle droit en ce point, et regardons-la comme croissante dans la direction du dedans au dehors. Soit $-$ C la valeur constante de la dérivée $\frac{dU}{dr}$ en O, et représentons par m la densité du point O dans le mode de distribution E. La dérivée $\frac{dV}{dr}$ a deux valeurs différentes en O. Celle qui se rapporte à l'espace intérieur est égale à la dérivée $\frac{dU}{dr}$, c'est-à-dire à $-$ C, par la raison que V $=$ U dans tout l'espace extérieur; celle qui se rapporte à l'espace extérieur sera égale à o, parce que V est constant à la surface et dans tout l'espace intérieur. Mais la seconde valeur devant surpasser de $4\pi m$ la première, on aura

$$4\pi m = C, \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{C}{4\pi}.$$

Il est évident que C n'est autre chose, et pour la grandeur absolue et pour le signe, que la résultante des masses de la distribution D.

DE LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS

DE L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $ax^2 + b = y^2$.

DES SÉRIES RÉCURRENTES QUI EN RÉSULTENT,

ET DE L'ORDRE A SUIVRE DANS LA SOLUTION DE L'ÉQUATION $x^2 + y^2 = z^2$;

PAR M. DU HAŸS.

Euler, dans le Traité de l'analyse indéterminée qui forme la seconde partie de ses *Éléments d'Algèbre* [*], et Lagrange, dans des Additions à cet ouvrage [**], ainsi que Legendre, dans son *Essai sur la théorie des nombres* [***], et d'autres géomètres, se sont occupés avec beaucoup de détails de la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$ax^2 + b = y^2,$$

qui est d'un fréquent usage dans la résolution des équations indéterminées du second degré.

Le premier de ces géometres démontre que, lorsque l'équation est possible, si f et g sont des valeurs correspondantes connues de x et de y, et que m et r soient des nombres entiers quelconques donnés par l'équation

$$ar^2 + 1 = m^2,$$

$mf + rg$ et $mg + arf$ sont d'autres valeurs correspondantes des mêmes

---

[*] Chap. VI et VII, page 96, de la traduction française de 1774.

[**] §§ VII et VIII, page 595.

[***] Première partie, page 58.

inconnues x et y. On peut donc avoir ainsi successivement un nombre infini de valeurs de x et de y, et toutes ces nouvelles valeurs seront évidemment des nombres entiers, premiers entre eux, si les nombres primitifs f et g, m et r sont également entiers et premiers entre eux.

On voit que les nombres m et r résultent uniquement du seul coefficient a, et qu'ils sont indépendants du terme b. Plus les nombres m et r seront petits, plus les valeurs qu'ils donneront de x et de y seront rapprochées. Il en résulte qu'en faisant usage des plus petites valeurs que ces nombres puissent avoir, on en déduira toutes les valeurs possibles de x et de y. C'est ce qui a déterminé Euler et Legendre à donner des tables qui contiennent les premières valeurs de m et de r, pour diverses valeurs de a. Si, au contraire, on voulait parvenir avec promptitude à des valeurs élevées de x et de y, on emploierait des valeurs de m et r exprimées par de grands nombres. Les nombres x et y peuvent d'ailleurs être pris indifféremment en sens positif ou en sens négatif.

Les valeurs successives de x et de y ne dépendant que de deux valeurs précédentes, on a lieu de présumer que la suite de ces valeurs forme des séries récurrentes. C'est en effet ce qui arrive, comme nous allons le démontrer.

Soient E, F et G trois valeurs successives quelconques de x, et E′, F′ et G′ les trois valeurs correspondantes de y, obtenues par le secours des mêmes valeurs de m et de r. On a

$$\mathrm{E} = f,\quad \mathrm{F} = mf + rg,\quad \text{et}\quad \mathrm{G} = (m^2 + ar^2)f + 2mrg;$$
$$\mathrm{E}' = g,\quad \mathrm{F}' = mg + arf,\quad \text{et}\quad \mathrm{G}' = (m^2 + ar^2)g + 2amrf.$$

D'où l'on tire, en substituant $m^2 - 1$ à ar^2, et réduisant,

$$\mathrm{G} = 2m\,\mathrm{F} - \mathrm{E},\quad \text{et}\quad \mathrm{G}' = 2m\mathrm{F}' - \mathrm{E}';$$

ou bien

$$\mathrm{E} = 2m\mathrm{F} - \mathrm{G},\quad \text{et}\quad \mathrm{E}' = 2m\mathrm{F}' - \mathrm{G}'.$$

On conclut de là qu'un terme quelconque, tant dans la suite croissante que dans la suite décroissante, soit des valeurs de x, soit des valeurs de y, est toujours égal à celui qui le précède immédiatement multiplié par $2m$, moins le terme qui est avant ce dernier, caractere d'une série récurrente de l'une des espèces les plus simples. L'échelle de relation de cette série est

$$-1 + 2m - 1\,.$$

ou plus généralement

$$-1 + 2mz - z^2\,;$$

z étant une quantité auxiliaire indéterminée qui peut être égale à l'unité [*].

Si A et B sont les deux premiers termes, et K et L les deux derniers termes d'une série des valeurs de x; que A′ et B′, K′ et L′ soient les mêmes termes de la série des valeurs correspondantes de y; que T et T′ soient les termes généraux ou $n^{\text{ièmes}}$ de chacune de ces séries; que S et S′ soient les sommes des séries entières, ou, ce qui revient au même, les fractions dont chacune d'elles dérive; enfin δ et δ' les sommes des n premiers termes de chacune de ces séries; on sait qu'alors on a

$$\delta = \frac{-(\mathrm{K}+\mathrm{L}) + 2m(\mathrm{A}+\mathrm{L}) - (\mathrm{A}+\mathrm{B})}{-1+2m-1} = \frac{m(\mathrm{A}+\mathrm{L})}{m-1} - \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{K}+\mathrm{L})}{2(m-1)}\,,$$

et

$$\delta' = \frac{m(\mathrm{A}'+\mathrm{L}')}{m-1} - \frac{(\mathrm{A}'+\mathrm{B}'+\mathrm{K}'+\mathrm{L}')}{2(m-1)}\,;$$

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A} - (2m\mathrm{A} - \mathrm{B})z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{(2m-1)\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2(m-1)}\,,$$

et

$$\mathrm{S}' = \frac{\mathrm{A}' - (2m\mathrm{A}' - \mathrm{B}')z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{(2m-1)\mathrm{A}' - \mathrm{B}'}{2(m-1)}\,.$$

Mais on a

$$\mathrm{B} = m\mathrm{A} + r\mathrm{A}', \quad \text{et} \quad \mathrm{B}' = m\mathrm{A}' + ar\mathrm{A}\,;$$

---

[*] *Voyez* EULER, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, traduction de Labbey, in-4°, tome I, pages 47 et 168. — LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et intégral*, in-4°, tome II.

on a donc aussi

$$S = \frac{A - (mA - rA')z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{A}{2} - \frac{rA'}{2(m-1)},$$

et

$$S' = \frac{A' - (mA' - arA)z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{A'}{2} - \frac{arA}{2(m-1)}.$$

Représentant par p et q les deux racines de l'équation

$$z^2 - 2mz + 1 = 0,$$

et par P et Q, P′ et Q′ des nombres tels qu'on ait

$$S = \frac{P}{p-z} + \frac{Q}{q-z}, \quad \text{et} \quad S' = \frac{P'}{p-z} + \frac{Q'}{q-z};$$

et faisant, pour abréger,

$$2mA - B = mA - rA' = l, \quad \text{et} \quad 2mA' - B' = -mA'arA = l',$$

on a

$$p = m + \sqrt{m^2 - 1} = m + r\sqrt{a},$$

et

$$q = m - \sqrt{m^2 - 1} = m - r\sqrt{a}, \quad pq = 1;$$

et de plus

$$P = \frac{-A + lp}{p-q} = \frac{l}{2} + \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}},$$

et

$$Q = \frac{A - lq}{p-q} = \frac{l}{2} - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}};$$

$$P' = \frac{-A' + l'p}{p-q} = \frac{l'}{2} + \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}},$$

et

$$Q' = \frac{A' - l'q}{p-q} = \frac{l'}{2} - \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}}.$$

Mais on sait encore que

$$T = \left(\frac{P}{p^n} + \frac{Q}{q^n}\right) z^{n-1} = (Pq^n + Qp^n) z^{n-1} = \left[\frac{l}{2}(p^n + q^n) - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}}(p^n - q^n)\right] z^{n-1}.$$

ou

$$T = \left[\frac{l}{2}\left(\overline{m + r\sqrt{a}}^{\,n} + \overline{m - r\sqrt{a}}^{\,n}\right) - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}}\left(\overline{m + r\sqrt{a}}^{\,n} - \overline{m - r\sqrt{a}}^{\,n}\right)\right]z^{n-1}.$$

et que de même

$$T' = \left[\frac{l'}{2}\left(\overline{m + r\sqrt{a}}^{\,n} + \overline{m - r\sqrt{a}}^{\,n}\right) + \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}}\left(\overline{m + r\sqrt{a}}^{\,n} - \overline{m - r\sqrt{a}}^{\,n}\right)\right]z^{n-1}.$$

Maintenant, si l'on développait les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de $m + r\sqrt{a}$ et de $m - r\sqrt{a}$ suivant la formule du binôme, et que M, N, R, U, V, Y, etc., représentassent les coefficients de ce développement, on verrait que, dans le premier terme des valeurs de T et de T', toutes les puissances impaires de $r\sqrt{a}$ disparaissent, tandis que, dans le second terme, ce sont au contraire toutes les puissances paires qui s'évanouissent. Mais, comme ce second terme se trouve divisé par $r\sqrt{a}$, il en résulte qu'en effectuant la division, il ne se trouve non plus composé que des puissances paires de $r\sqrt{a}$: par conséquent le facteur $\sqrt{a}$ en a disparu, et les valeurs précédentes deviennent

$$T = \left[\begin{array}{l} l\,(m^n + N m^{n-2} r^2 a + U m^{n-4} r^4 a^2 + Y m^{n-6} r^6 a^3 + \text{etc.}) \\ -(lm - A)(M m^{n-1} + R m^{n-3} r^2 a + V m^{n-5} r^4 a^2 + \text{etc.}) \end{array}\right] z^{n-1},$$

$$T' = \left[\begin{array}{l} l'\,(m^n + N m^{n-2} r^2 a + U m^{n-4} r^4 a^2 + Y m^{n-6} r^6 a^3 + \text{etc.}) \\ -(l'm - A')(M m^{n-1} + R m^{n-3} r^2 a + V m^{n-5} r^4 a^2 + \text{etc.}) \end{array}\right] z^{n-1},$$

dans lesquelles on n'aperçoit plus aucune trace de quantité irrationnelle, ainsi que cela devait être.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple, on proposera le problème suivant :

« Trouver la suite des triangles rectangles en nombres entiers premiers entre eux, dont la différence des côtés est un nombre constant h. »

Soient x le plus petit côté, y le plus grand côté, et z l'hypoténuse; on a

$$y = x + h, \quad \text{et} \quad z^2 = 2x^2 + 2xh + h^2,$$

ou en faisant

$$x = u - \frac{h}{2},$$

afin de faire évanouir le second terme,

$$z^2 = 2n^2 + \tfrac{1}{2} h^2;$$

équation de la forme dont il s'agit ici, et dans laquelle

$$a = 2n^2 \quad \text{et} \quad b = \tfrac{1}{2} h^2.$$

Or, pour cette valeur de a,

$$\begin{array}{llllll} r = 2, & 12, & 70, & 408, & 2378, \ldots\ldots\ldots & \text{etc.}, \\ m = 3, & 17, & 99, & 577, & 3363, \ldots\ldots\ldots & \text{etc.}, \end{array}$$

et l'échelle de relation des séries récurrentes que forment les valeurs successives de u et de z, s'obtient en substituant, dans l'expression

$$- 1 + 2m - 1,$$

celle des valeurs de m dont on se propose de faire usage.

Si l'on veut maintenant donner une valeur numérique à h, on rappellera d'abord que dans tous triangles rectangles en nombres entiers, α et β étant des nombres entiers quelconques, les côtés sont exprimés par $\alpha^2 - \beta^2$ et $2\alpha\beta$, et l'hypoténuse par $\alpha^2 + \beta^2$ [*], et par conséquent que h ne peut être que de la forme

$$\alpha^2 - \beta(2\alpha + \beta), \quad \text{ou} \quad \beta(2\alpha + \beta) - \alpha^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha(\alpha - \beta) - \beta(\alpha + \beta), \quad \text{et} \quad \beta(\alpha + \beta) - \alpha(\alpha - \beta).$$

Il en résulte que cette valeur n'est pas arbitraire, et qu'on ne peut avoir que

$$\begin{array}{l} h = 1, \ 7, \ 17, \ 23, \ 31, \ 41, \ 47, \ 49, \ 71, \ 73, \ 79, \\ \quad 89, \ 97, \ 113, \ 119, \ 127, \ \text{etc.}; \end{array}$$

---

[*] Euler, *Analyse indéterminée*, chapitre IV, art. 44, page 55.

tout autre nombre attribué à h rendrait le problème impossible. Il est d'ailleurs évident que, pour que les nombres composant le triangle soient premiers entre eux, il faut que α et β n'aient aucun diviseur commun, et que l'un soit un nombre pair et l'autre un nombre impair; en outre, h étant toujours un nombre impair, u sera une fraction ayant 2 pour dénominateur.

Si donc on désire que la différence des côtés soit un *minimum*, on aura pour ce cas

$$h = 1, \quad z^2 = 2u^2 + \tfrac{1}{2}, \quad \text{et} \quad x = u - \tfrac{1}{2}, \quad \text{et} \quad y = u + \tfrac{1}{2}.$$

et pour avoir tous les triangles dont les côtés diffèrent d'une unité, on prendra

$$r = 2 \quad \text{et} \quad m = 3.$$

Or on aperçoit facilement que, si l'on fait $u = \frac{1}{2}$ [*],

$$z = 1;$$

et on a alors

$$F = mE + rE' = 3E + 2E', \quad \text{et} \quad F' = mE' + raE = 3E' + 4E;$$

$$G = 2mF - E = 6F - E, \quad \text{et} \quad G' = 2mF' - E' = 6F' - E';$$

d'où l'on déduit les séries récurrentes

$$u = \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{41}{2},\ \frac{239}{2},\ \frac{1393}{2},\ \frac{8119}{2},\ \frac{47321}{2},\ \text{etc.},$$

$$z = 1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ 5741,\ 33461,\ \text{etc.},$$

de la première desquelles on tire

$$y = 1,\ 4,\ 21,\ 120,\ 697,\ 4060,\ 23661,\ \text{etc.},$$

$$x = 0,\ 3,\ 20,\ 119,\ 696,\ 4059,\ 23660,\ \text{etc.}$$

[*] Si, dans ce cas, on faisait $u = -\frac{1}{2}$, on obtiendrait les mêmes séries qu'en faisant $u = \frac{1}{2}$; mais on verra ci-après qu'il n'en est pas toujours de même.

Il est à remarquer que l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \tfrac{1}{2}$$

fournit un moyen expéditif d'avoir la racine carrée approchée de 2 en fractions ordinaires. En effet, on en tire

$$\frac{z}{u} = \sqrt{2 + \frac{1}{2u^2}},$$

et plus u devient grand, plus la fraction $\frac{1}{2u^2}$ est petite, et plus $\frac{z}{u}$ approche d'être égal à $\sqrt{2}$, sans cependant cesser de lui être supérieur. Ainsi $\frac{66922}{47321}$ est plus grand, mais presque égal à $\sqrt{2}$. On obtient de la même manière la racine carrée approchée, en fractions ordinaires, de tous les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, car l'équation

$$z^2 = au^2 + 1$$

donne en général

$$\frac{z}{u} = \sqrt{a + \frac{1}{u^2}},$$

et $\frac{z}{u}$ approche beaucoup de $\sqrt{a}$ lorsque u représente un grand nombre. Si l'on voulait avoir, par exemple, la valeur de plus en plus approchée de $\sqrt{3}$, on ferait $a = 3$; alors on aurait

$$r = 1,\quad 4,\quad 15,\quad 56,\quad 209,\quad 780,\quad 2911,\quad \text{etc.},$$
$$m = 2,\quad 7,\quad 26,\quad 97,\quad 362,\quad 1351,\quad 5042,\quad \text{etc.}$$

On voit que si, dans l'équation

$$z^2 = 3u^2 + 1,$$

on fait $u = 1$, on aura $z = 2$, et que si l'on prend pour r et m les nombres 2911 et 5042, on aura les séries

$$u = 1,\quad 10864,\quad 109552615,\quad \text{etc.},$$
$$z = 2,\quad 18817,\quad 189750626,\quad \text{etc.},$$

qui donnent pour valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{3}$.

$$\frac{2}{1},\quad \frac{18817}{10864},\quad \frac{189750626}{109552615},\quad \text{etc.}$$

Enfin, si l'on voulait avoir la suite des triangles rectangles irréductibles en nombres entiers dont la différence des côtés est 7, l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{h^2}{2}$$

deviendrait

$$z^2 = 2u^2 + \frac{49}{2},$$

et l'on a

$$y = u + \frac{7}{2},\quad \text{et}\quad x = u - \frac{7}{2};\quad r = 2,\quad \text{et}\quad m = 3.$$

Faisant $u = -\frac{1}{2}$, on trouve que $z = 5$, et l'on a

$$\left.\begin{array}{llllllll} u = & -\frac{1}{2}, & \frac{17}{2}, & \frac{103}{2}, & \frac{601}{2}, & \frac{3503}{2}, & \frac{20417}{2}, & \text{etc.}, \\ z = & 5, & 13, & 73, & 425, & 2477, & 14437, & \text{etc.}, \end{array}\right\} \text{séries récurrentes.}$$

$$\begin{array}{llllllll} y = & 3, & 12, & 55, & 304, & 1755, & 10212, & \text{etc.} \\ x = & -4, & 5, & 48, & 297, & 1748, & 10205, & \text{etc.} \end{array}$$

Mais si l'on avait fait $u = \frac{1}{2}$, on aurait trouvé que $z = 5$, et l'on aurait eu

$$\left.\begin{array}{llllllll} u = & \frac{1}{2}, & \frac{23}{2}, & \frac{137}{2}, & \frac{799}{2}, & \frac{4657}{2}, & \frac{27143}{2}, & \text{etc.}, \\ z = & 5, & 17, & 97, & 565, & 3293, & 19193, & \text{etc.}, \end{array}\right\} \text{séries récurrentes.}$$

$$\begin{array}{llllllll} y = & 4, & 15, & 72, & 403, & 2332, & 13575, & \text{etc.}, \\ x = & -3, & 8, & 65, & 396, & 2325, & 13568, & \text{etc.} \end{array}$$

En sorte que voilà une seconde suite de triangles, satisfaisant à la question, que la première suite trouvée n'aurait pas fait soupçonner; ce qui montre que plusieurs séries récurrentes indépendantes les unes des autres peuvent satisfaire aux questions de ce genre. Cet exemple montre encore que toutes les valeurs de u qui, prises positivement ou négativement, satisfont également à l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{h^2}{2},$$

produisent cependant le plus souvent des séries différentes.

On ajoutera ici quelques mots sur l'ordre à suivre dans la recherche des diverses solutions en nombres entiers, premiers entre eux, de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

qui donne tous les triangles rectangles possibles. On a vu plus haut que les nombres α et β, dont se composent x, y et z, doivent être l'un pair et l'autre impair, premiers entre eux, et tels qu'on ait toujours $\alpha > \beta$. Le côté impair est exprimé par

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta);$$

le côté pair par $2\alpha\beta$, et il est toujours divisible par 4; l'hypoténuse est exprimée par $\alpha^2 + \beta^2$, nombre toujours impair, et qui, étant divisé par 4, laisse constamment 1 pour reste. Ainsi, 1° si l'on prend successivement pour α la suite des nombres naturels en commençant par 2, et qu'on donne, pour chacun, à β toutes les valeurs possibles, on obtiendra de cette manière une première suite de tous les triangles rectangles; 2° si l'on prend successivement pour côté impair la suite des nombres impairs, on observera que ce côté, en y comprenant l'unité, est toujours divisible en deux facteurs au moins, et que, s'il contient un plus grand nombre de facteurs premiers, on pourra en former plus ou moins de diviseurs différents qui, pris deux à deux, donneront autant de valeurs différentes pour α et β : on obtiendra de cette manière une seconde suite de tous les triangles rectangles, rangés dans un autre ordre que dans la première; 3° si l'on prend successivement pour côté pair le double de chaque nombre pair, et qu'on recherche tous les facteurs premiers de chacun de ces nombres, on aura encore, en les combinant entre eux, les différentes valeurs de α et β, et avec leur secours, une troisieme suite des mêmes triangles, rangés encore dans un autre ordre; 4° enfin si dans la progression arithmétique

$$1,\quad 5,\quad 9,\quad 13,\quad 17,\quad \text{etc.},$$

dont le premier terme est l'unité et la différence des termes 4, on prend les termes qui sont la somme de deux carrés, ces termes sont les hypoténuses des triangles cherchés, ils donnent les valeurs de α et β, et fournissent encore une quatrième suite des mêmes triangles, mais dans un ordre différent de ceux que présentent les trois premières suites. Cette dernière suite s'obtient avec un peu moins de facilité que les précédentes; cependant, si l'on retranche des termes de la progression ci-dessus les plus grands carrés contenus dans chacun d'eux, on découvre assez promptement ceux qui satisfont à la question.

Si un nombre x est le produit de plusieurs facteurs premiers

$$1,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \mathrm{E},\ \text{etc.},$$

on aura généralement

$$x = 1 \times \mathrm{A}^p \times \mathrm{B}^q \times \mathrm{C}^r \times \mathrm{D}^s \times \text{etc.};$$

et si n est le nombre de ces facteurs, non compris l'unité, le nombre de diviseurs différents qu'aura le nombre x s'obtiendra en prenant ces facteurs seuls, puis en les combinant 2 à 2, puis 3 à 3, puis 4 à 4, et ainsi de suite, et le nombre de ses diviseurs sera

$$\frac{1}{2}\left[n + 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots2.1}{1.2\ldots(n-1)n}\right].$$

Ainsi lorsque n sera

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \text{etc.},$$

le nombre des diviseurs de x, et par conséquent des valeurs différentes de α et β, sera

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\quad \text{etc.}$$

Il en résulte que pour les côtés pairs au-dessous de

$$2 \times 2.3 = 12,$$

et pour les côtés impairs au-dessous de

$$3.5 = 15,$$

un même nombre ne saurait appartenir à plus d'un triangle; qu'au-dessous de

$$2 \times 2.3.5 = 60$$

pour les premiers, et de

$$3.5.7 = 105$$

pour les seconds, un même nombre ne saurait appartenir à plus de deux triangles; qu'au-dessous de

$$2 \times 2.3.5.7 = 420$$

pour les côtés pairs, et de

$$3.5.7.11 = 1155$$

pour les côtés impairs, un même nombre ne saurait appartenir à plus de quatre triangles différents; etc.

Si l'on cherchait, par exemple, les huit triangles rectangles qui peuvent avoir pour côté pair

$$2 \times 2.3.5.7 = 420,$$

on trouverait que ces triangles sont les suivants; $n = 4$:

α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$
3.5 = 15	2.7 = 14	29	420	421
3.7 = 21	2.5 = 10	341	420	541
2.3.5 = 30	7	851	420	949
5.7 = 35	2.3 = 6	1189	420	1261
2.3.7 = 42	5	1739	420	1789
2.5.7 = 70	3	4891	420	4909
3.5.7 = 105	2	11021	420	11029
2.3.5.7 = 210	1	44099	420	44101

Tels sont les principes sur lesquels ont été formées les quatre séries de triangles suivantes :

PREMIÈRE SÉRIE.				
α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
10	7	51	140	149
10	9	19	180	181
11	2	117	44	125
11	4	105	88	137
11	6	85	132	157
11	8	57	176	185
11	10	21	220	221
12	1	143	24	145
12	5	119	120	169
12	7	95	168	193
12	11	23	264	265
13	2	165	52	173
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

DEUXIÈME SÉRIE.				
α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
7	6	13	84	85
8	7	15	112	113
4	1	15	8	17
9	8	17	144	145
10	9	19	180	181
11	10	21	220	221
5	2	21	20	29
12	11	23	264	265
13	12	25	312	313
14	13	27	364	365
15	14	29	420	421
16	15	31	480	481
17	16	33	544	545
7	4	33	56	65
18	17	35	612	613
6	1	35	12	37
19	18	37	684	685
20	19	39	760	761
8	5	39	80	89
21	20	41	840	841
22	21	43	924	925
23	22	45	1012	1013
7	2	45	28	53
24	23	47	1104	1105
25	24	49	1200	1201
26	25	51	1300	1301
10	7	51	140	149
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

TROISIÈME SÉRIE.				
α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
3	2	5	12	13
6	1	35	12	37
8	1	63	16	65
5	2	21	20	29
10	1	99	20	101
4	3	7	24	25
12	1	143	24	145
7	2	45	28	53
14	1	195	28	197
16	1	255	32	257
9	2	77	36	85
18	1	323	36	325
5	4	9	40	41
20	1	399	40	401
11	2	117	44	125
22	1	483	44	485
8	3	55	48	73
24	1	575	48	577
13	2	165	52	173
26	1	675	52	677
7	4	33	56	65
28	1	783	56	785
6	5	11	60	61
10	3	91	60	109
15	2	221	60	229
30	1	899	60	901
32	1	1023	64	1025
17	2	285	68	293
34	1	1155	68	1157
9	4	65	72	97
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

QUATRIÈME ET DERNIÈRE SÉRIE.				
α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
6	1	35	12	37
5	4	9	40	41
7	2	45	28	53
6	5	11	60	61
7	4	33	56	65
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
7	6	13	84	85
9	2	77	36	85
8	5	39	80	89
9	4	65	72	97
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
8	7	15	112	113
11	2	117	44	125
11	4	105	88	137
9	8	17	144	145
12	1	143	24	145
10	7	51	140	149
11	6	85	132	157
12	5	119	120	169
13	2	165	52	173
10	9	19	180	181
11	8	57	176	185
13	4	153	104	185
12	7	95	168	193
14	1	195	28	197
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

NOTE

SUR LA RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE A LA SURFACE DES MÉTAUX;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

M. Mac-Cullagh a lu à l'Académie de Dublin, le 9 janvier 1837, un Mémoire sur les lois de la réflexion et la réfraction cristalline. A ce Mémoire, dont une traduction française a paru dans la livraison de juin 1842 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est jointe une Note dans laquelle l'auteur cite des formules qu'il a publiées dans les *Irish. Acad. Transactions*, et qui sont relatives à la réflexion opérée par les surfaces métalliques. Mais, dans des observations que renferme le tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, page 961, et que M Liouville a bien voulu mentionner à la page 217 de son Journal, j'ai déjà rappelé que j'avais traité moi-même, avant les publications faites par M. Mac-Cullagh, le sujet auquel se rapportent les formules dont il s'agit. Il y a plus: M. Mac-Cullagh m'ayant fait l'honneur de venir me voir dans ces derniers temps, je n'ai pas hésité à mettre sous ses yeux les preuves de mes assertions et les nombreux calculs que j'avais faits sur la réflexion métallique dès les premiers mois de l'année 1836. Les détails dans lesquels je suis entré ont dû, je l'espère, éclaircir tous les doutes qui pouvaient subsister encore dans l'esprit de M. Mac-Cullagh sur la question envisagée au point de vue historique. Au reste, comme je l'ai déjà dit dans le tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. Mac-Cullagh ayant produit ses recherches sur la réflexion à la surface des métaux avant que mes travaux sur le même objet fussent suffisamment connus, et n'ayant pas eu sous les yeux à cette époque des formules qui se trouvaient comprises seulement d'une manière implicite dans celles que j'avais alors publiées, il est clair que ces recherches offraient tout le mérite d'une difficulté vaincue, et devaient être, par cette raison, favorablement accueillies des savants.

Dans la présente Note je me bornerai à rappeler succinctement les formules générales desquelles j'avais déduit, dès les premiers mois de l'année 1836, les lois de la réflexion de la lumière à la surface des corps opaques, ainsi que les Lettres et les Mémoires dans lesquels ces formules se trouvaient écrites ou indiquées.

Dans une lettre adressée de Prague à M. Ampère, sous la date du 1er avril 1836, et insérée vers cette époque dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, je disais :

« Les formules générales auxquelles je suis parvenu dans mes nou-
» velles recherches sur la théorie de la lumière ne fournissent pas seu-
» lement les lois de la propagation de la lumière dans le vide, comme
» je vous le disais dans mes lettres du 12 avril et du 19 février, ou les
» lois de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps trans-
» parents, telles qu'elles se trouvent énoncées dans mes deux lettres
» du 19 et du 28 mars; elles s'appliquent aussi à la propagation de la
» lumière dans la partie d'un corps *opaque* voisine de la surface, et à
» la réflexion de la lumière par un corps de cette espèce. On sait d'ail-
» leurs que, si la lumière passe d'un milieu plus réfringent dans un
» autre qui le soit moins, ce dernier deviendra opaque à l'égard des
» rayons qui rencontreront sa surface sous un angle tel que son com-
» plément τ, c'est-à-dire l'angle d'incidence, devienne supérieur à une
» certaine limite qu'on nomme l'*angle de réflexion totale*... Or, sup-
» posons qu'un rayon polarisé tombe sur la surface de séparation de
» deux milieux dont le premier soit le plus réfringent, et que l'angle
» d'incidence devienne supérieur à l'angle de réflexion totale. Si l'on
» nomme τ l'angle d'incidence, $\frac{1}{\theta}$ le rapport qui existait entre le sinus
» d'incidence et le sinus de réfraction avant que le rayon réfracté dis-
» parût, enfin $l = \frac{2\pi}{k}$ et $l' = \frac{2\pi}{k'}$ les épaisseurs qu'une onde lumi-
» neuse acquiert dans le premier et dans le second milieu, on aura
» $\theta = \frac{k}{k'} = \frac{l'}{l}$; et, si l'on pose d'ailleurs

$$b = \theta \sin \tau, \qquad a = \sqrt{b^2 - 1},$$

» l'intensité de la lumière dans le second milieu, à la distance x de la
» surface de séparation, sera proportionnelle à l'exponentielle négative

$$e^{-ak'x}.$$

» Si τ se réduit à l'angle de réflexion totale, on aura

$$\sin\tau = \frac{1}{\theta}, \quad b = 1, \quad a = 0, \quad e^{-ak'x} = 1,$$

» et la lumière réfractée aura une grande intensité; mais, si l'angle τ
» croît à partir de la limite qu'on vient de rappeler, la lumière ré-
» fractée s'éteindra à une distance comparable à l'épaisseur des ondes
» que peut transmettre le second milieu, et d'autant moindre que a
» sera plus grand. Si l'on suppose $\tau = \frac{\pi}{2}$, a atteindra sa limite supé-
» rieure $\sqrt{\theta^2 - 1}$. Ajoutons que la quantité b remplace ici le sinus
» de réflexion avec lequel elle coïncide lorsqu'on a $\sin\tau = \frac{1}{\theta}$. »

Cette lettre du 1er avril 1836, dans laquelle je donnais d'ailleurs, pour déterminer l'intensité de la lumière réfléchie dans le cas de la réflexion totale, des formules qui se trouvent d'accord avec les expériences et les formules de Fresnel, prouve suffisamment qu'en développant la théorie de la lumière, j'étais parvenu, dès cette époque, à l'interprétation physique de la forme imaginaire sous laquelle peuvent se présenter les coefficients des coordonnées dans les expressions des déplacements moléculaires.

Une autre lettre, écrite le 16 avril 1836, et insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* le 2 mai de la même année, contient ce qui suit :

« Dans ma dernière lettre, j'ai indiqué les résultats que fournissent
» les formules générales auxquelles je suis parvenu quand on les
» applique au phénomène connu sous le nom de réflexion totale, c'est-
» à-dire, au cas où le second milieu, quoique transparent, remplit la
» fonction d'un corps opaque. Je vais aujourd'hui vous entretenir de
» ce qui arrive lorsque le second milieu est constamment opaque sous
» toutes les incidences, et en particulier lorsque la lumière se trouve
» réfléchie par un métal.

» Si l'on fait tomber sur la surface d'un métal un rayon simple doué
» de la polarisation rectiligne ou circulaire, ou même elliptique, ce
» rayon pourra toujours être décomposé en deux autres polarisés en
» ligne droite, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre
» parallèlement à ce plan. Or je trouve que, dans chaque rayon com-

» posant, la réflexion fait varier l'intensité de la lumière suivant un rap-
» port qui dépend de l'angle d'incidence et qui généralement n'est pas
» le même pour les deux rayons. De plus, la réflexion transporte les
» ondulations en avant ou en arrière à une certaine distance qui dé-
» pend encore de l'angle d'incidence. Si l'on représente cette distance
» pour le premier rayon par $\frac{\mu}{k}$, et pour le second par $\frac{\nu}{k}$,

$$l = \frac{2\pi}{k}$$

» étant l'épaisseur d'une onde lumineuse; la différence de marche
» entre les deux rayons composants, après une première réflexion,
» sera représentée par

$$\frac{\mu - \nu}{k}.$$

» Après n réflexions opérées sous le même angle, elle deviendra

$$n\left(\frac{\mu - \nu}{k}\right).$$

» Je trouve d'ailleurs qu'après une seule réflexion sous l'angle d'inci-
» dence τ, la différence de marche des deux rayons composants est
» d'une demi-ondulation si $\tau = 0$, et d'une ondulation entière si
» $\tau = \frac{\pi}{2}$. Donc, en ne tenant pas compte des multiples de la circonfé-
» rence dans la valeur de l'angle $\mu - \nu$, on peut considérer la valeur
» numérique de ce dernier angle comme variant entre les limites π et
» zéro. Lorsque $\mu - \nu$ atteint la moyenne entre ces deux limites, ou $\frac{\pi}{2}$,
» on obtient ce que M. Brewster appelle la polarisation elliptique, et

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots,\ 2n$$

» réflexions semblables ramènent le rayon polarisé à son état pri-
» mitif. Alors, si le rayon incident était polarisé en ligne droite, le
» dernier rayon réfléchi sera lui-même polarisé rectilignement. Mais
» son plan de polarisation formera avec le plan de réflexion un angle
» δ, dont la tangente sera égale, au signe près, à la $(2n)^{\text{ième}}$ puissance
» du quotient qu'on obtient en divisant l'un par l'autre les rapports
» suivant lesquels la première réflexion fait varier dans chaque rayon

» composant les plus grandes vitesses des molécules. Donc, tandis
» que le nombre des réflexions croîtra en progression arithmétique,
» les valeurs de tang δ varieront en progression géométrique; et,
» comme pour les différents métaux on trouve généralement $\delta < 45°$,
» la lumière, pour de grandes valeurs de n, finira par être complétement polarisée dans le plan d'incidence. On déduit encore de mes
» formules générales un grand nombre de conséquences que je développerai plus en détail dans une seconde lettre, et qui s'accordent,
» comme les précédentes, avec les résultats obtenus par M. Brewster. »

Les formules générales desquelles j'avais déduit les lois de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps transparents ou opaques sont celles que renferme la 7ᵉ livraison de mes *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, reçue par l'Académie des Sciences dans le mois d'août 1836, et mentionnée dans le *Compte rendu* de la séance du 16 de ce même mois (voir le *Bulletin bibliographique*, tome III des *Comptes rendus*). Dans cette livraison, page 203, se trouve le passage suivant :

« Des recherches approfondies m'ont conduit à un nouveau principe de Mécanique propre à fournir, dans plusieurs questions de
» Physique mathématique, les conditions relatives aux limites des
» corps et aux surfaces qui terminent des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Ce
» principe, que je développerai dans un autre Mémoire, étant appliqué à la théorie de la lumière, on en conclut que, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, les déplacements
» ξ, η, ζ des molécules d'éther, relatifs soit au premier milieu, soit
» au second, devront fournir les mêmes valeurs de $\mathrm{8}$, si l'on prend
» pour $\mathrm{8}$ l'une quelconque des trois fonctions

$$(1)\qquad \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx},$$

» ou bien encore si l'on suppose

$$(2)\qquad \mathrm{8} =$$
$$a^2\frac{d\xi}{dx} + b^2\frac{d\eta}{dy} + c^2\frac{d\zeta}{dz} + bc\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + ca\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + ab\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right),$$

» a, b, c désignant les cosinus des angles formés par la normale à la

» surface de séparation des deux milieux avec les demi-axes des coor-
» données positives. Il est bon d'observer que la valeur de $\varkappa$, déter-
» minée par l'équation (2), représente la dilatation de l'éther suivant
» cette même normale.

» Lorsque, les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par le plan
» des y, z, on suppose l'axe des z parallèle aux plans des ondes lumi-
» neuses, et par conséquent perpendiculaire au plan d'incidence, on
» a dans la formule (2)

$$a = \pm 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

» et de plus ξ, η, ζ deviennent indépendants de z. Donc alors, en chan-
» geant, ce qui est permis, le signe de la première des différences (1)
» on trouvera que les fonctions (1) et (2) peuvent être réduites à

$$(3) \qquad \frac{d\zeta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dx}.$$

» Donc, si l'on nomme ξ', η', ζ' ce que deviennent les déplace-
» ments ξ, η, ζ tandis que l'on passe du premier milieu au second,
» on aura, pour les points situés sur la surface de séparation, c'est-
» à-dire pour $x = 0$,

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi'}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi'}{dy} - \frac{d\eta'}{dx},$$

et

$$(5) \qquad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta'}{dx}, \quad \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\zeta'}{dy}.$$

» Lorsque dans les équations (4) et (5) on substitue à ξ, η, ζ les se-
» conds membres des formules (1) du § V, et à ξ', η', ζ' les seconds
» membres des formules (2) du même paragraphe (*voir* les *Nouveaux*
» *Exercices*, pages 57 et 58), on obtient les lois de la réflexion et de la
» réfraction qui ont lieu à la surface des corps transparents, avec les
» diverses formules que contiennent les deux lettres adressées à
» M. Libri, les 19 et 27 mars (1836), et imprimées dans les *Comptes*
» *rendus des séances de l'Académie des Sciences* (tome II, pages 427
» et 341). On déduit aussi des conditions (4) et (5) les lois de la réflexion
» opérée par la surface extérieure d'un corps opaque, ou par la sur-
» face intérieure d'un corps transparent dans le cas où l'angle d'inci-

» dence devient assez considérable pour qu'il n'y ait plus de lumière
» transmise, c'est-à-dire dans le cas où la réflexion devient totale.
» (Voir à ce sujet les deux lettres que j'ai adressées à M. Ampère les
» 1er et 16 avril.) Comme je l'ai montré dans ces différentes lettres, les
» formules auxquelles conduisent les conditions (4) et (5), non-seule-
» ment déterminent l'intensité de la lumière polarisée rectilignement
» par réflexion ou par réfraction, et les plans de polarisation des rayons
» réfléchis et réfractés, mais encore elles font connaître les diverses
» circonstances de la polarisation circulaire ou elliptique produite
» par la réflexion totale, ou par la réflexion opérée à la surface d'un
» corps opaque, et en particulier d'un métal. D'ailleurs les divers ré-
» sultats de notre analyse se trouvent d'accord avec les lois déjà con-
» nues, particulièrement avec les formules proposées par MM. Fres-
» nel et Brewster, ainsi qu'avec les observations de tous les physiciens.
» Au reste, je reviendrai sur ces résultats dans de nouveaux Mémoires,
» où je déduirai directement, des équations (15) du § Ier, les lois des
» divers phénomènes lumineux, y compris les phénomènes de l'ombre
» et de la diffraction. »

Le nouveau principe de mécanique dont il est question dans ce passage, et duquel j'avais déduit à Prague, dans les premiers mois de 1836, les formules (4), (5), est celui qui se trouve exposé dans le § IV de la première partie du Mémoire sur la lumière, lithographié à Budweiss dans le mois d'août 1836, et annoncé dans le *Compte rendu* de la séance du 29 de ce même mois. (Voir le tome III des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, page 235.) D'ailleurs, les formules (4), (5) étant une fois établies, soit à l'aide du principe que je viens de rappeler, soit par la méthode que j'ai développée dans les séances de l'Académie des Sciences des 18 mars, 25 mars et 1er avril 1839, l'application de ces formules aux corps isophanes, transparents, ou opaques, fournit immédiatement les lois de la réflexion opérée par la surface extérieure ou intérieure de l'un de ces corps, et l'on retrouve ainsi les diverses formules que j'avais déjà obtenues à Prague en 1836. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.

NOTE

Sur un Mémoire de M. Chasles ;

Par M. STURM.

M. Chasles vient de publier, dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1845, de beaux théorèmes généraux sur l'attraction des corps, parmi lesquels se trouve celui qu'il avait communiqué à l'Académie des Sciences le 11 février 1839. Le Mémoire de M. Chasles repose en grande partie sur le principe suivant, qu'il avait fait connaître antérieurement (dans le 25e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) : « Si l'on conçoit un canal infiniment étroit dont les arêtes » curvilignes soient des trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau » veau relatives à un corps quelconque, les attractions que ce corps » exercera sur les éléments des surfaces de niveau interceptés par ce » canal auront toutes la même valeur. »

La démonstration de cette proposition n'étant pas aussi simple et immédiate qu'on pourrait le désirer, il ne sera peut-être pas inutile de ramener la théorie de M. Chasles à des principes plus élémentaires. C'est l'objet que je me propose dans cette Note.

I

J'adopte les hypothèses et les notations de l'auteur, en supposant toutefois que, pour un point quelconque m pris sur une surface de niveau A, on représente par dn la portion de la normale à la surface A, menée par le point m *intérieurement* à cette surface et comprise entre ce point m et la surface de niveau A_1 infiniment voisine de A et *intérieure* à A. Alors, en passant de la surface A à l'autre A_1, la fonction V (somme des molécules du corps attirant M divisées respectivement par leurs distances au point m) prend un accroissement positif dV, et le rapport $\frac{dV}{dn}$ est positif (du moins en supposant toutes les molécules du corps M douées du pouvoir attractif . On prend aussi, intérieurement à la surface A, sur la direction de la normale dn, une longueur infiniment petite ε égale à $\frac{k}{dn}$, c'est-à-dire réciproquement proportionnelle à dn ; son extrémité a pour lieu géométrique une certaine surface. Cette derniere surface et la surface primitive A comprennent entre elles un volume qu'on peut regarder comme une couche infiniment mince de matiere homogène, dont *l'épaisseur*, variable d'un point à un autre, est ε, ou $\frac{k}{dn}$.

En désignant par $d\omega$ l'élément superficiel de la surface A au point m, ou même encore d'une autre surface fermée arbitraire B dont m est un point quelconque, pourvu qu'elle soit extérieure au corps attirant dont la masse est M, M. Chasles établit d'abord la formule

$$\int\int \frac{dV}{dn}\,d\omega = 4\pi M,$$

dans laquelle l'intégrale double s'étend à tous les éléments de la surface A ou B que l'on considère. Cette formule se trouve aussi dans le Mémoire de M. Gauss (pages 304 et suivantes de ce Journal), démontrée à peu près de la même manière. On peut la déduire de l'équation connue

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

qui a lieu pour tout point x, y, z compris dans la masse M, ρ étant la densité du corps en ce point, et qu'on peut étendre aux points extérieurs, pourvu qu'à l'égard de ceux-ci on considère la densité ρ du corps comme nulle. On n'a pas besoin de s'occuper ici des points situés sur la surface même du corps M. Multiplions cette équation par l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, puis intégrons par rapport aux variables x, y, z, en étendant l'intégration à tous les points de l'espace limité par une surface fermée quelconque B, extérieure au corps M. Quoique dans l'intégration la valeur des deux membres de l'équation (1) change brusquement en passant de l'intérieur à l'extérieur du corps M, il est aisé de voir que l'intégration se fera comme s'il n'y avait pas de discontinuité à la surface de ce corps. (Il suffit, par exemple, d'ajouter au corps M une couche matérielle aussi mince qu'on voudra et telle que la densité ρ, pour l'espace extérieur au corps M, soit une fonction qui décroisse très-rapidement, mais d'une manière continue, de manière à devenir nulle un peu au-delà de la surface du corps M, ce qui n'altérera qu'infiniment peu les valeurs de V et de ses dérivées premières $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, ainsi que les résultats de l'intégration.)

On a donc pour un espace quelconque

$$(2) \quad \int\int\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz = -4\pi\int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz.$$

L'intégrale $\int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz$, étendue à tout l'espace que renferme une surface fermée B extérieure au corps attirant, n'est autre chose que la masse M de ce corps, puisque ρ est nulle hors de cette masse. Quant à l'intégrale triple qui forme le premier membre, elle est la somme de trois autres, qui se réduisent à des intégrales doubles relatives à tous les éléments de la surface limite B. En effet, l'intégration indéfinie par rapport à x donne

$$\int\int\int\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz = \int\int\frac{dV}{dx}\,dy\,dz.$$

Observons que $dydz$ est la projection sur le plan des yz d'un élément $d\omega$ de la surface B jusqu'à laquelle s'étend l'intégration, et désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes des x, y, z la normale à la surface B menée par un point m de cet élément extérieurement à cette surface. Nous aurons

$$dy\,dz = d\omega\cos\alpha,$$

et l'intégrale définie triple

$$\int\int\int\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz$$

sera égale à l'intégrale double

$$\int\int\frac{dV}{dx}\cos\alpha\,d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface B. Par de semblables transformations, l'équation (2) deviendra

$$\int\int\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{dV}{dy}\cos 6 + \frac{dV}{dz}\cos\gamma\right)d\omega = -4\pi M.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par dn la distance du point m de la surface B à un point infiniment voisin pris sur la partie intérieure de la normale en m à cette surface, l'accroissement de V en passant du point m, qui a pour coordonnées x, y, z à ce point infiniment voisin qui a pour coordonnées $x - dn\cos\alpha$, etc., sera évidemment

$$dV = -\frac{dV}{dx}dn\cos\alpha - \frac{dV}{dy}dn\cos 6 - \frac{dV}{dz}dn\cos\gamma \text{ [*]}.$$

La formule précédente devient par là

$$(3)\qquad \int\int\frac{dV}{dn}d\omega = 4\pi M,$$

l'intégrale double s'étendant à tous les éléments de la surface arbitraire B.

Si, au lieu d'une surface quelconque B, on considère la surface de niveau A, cette même équation aura lieu pour la surface A. En observant que $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$ sont alors proportionnels à $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, on a

$$\frac{dV}{dn} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}:$$

c'est la valeur même de l'attraction du corps M sur le point m; et l'équation (3) qui précède peut s'écrire ainsi

$$\int\int\sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}\,d\omega = 4\pi M.$$

---

[*] On voit que $\frac{dV}{dn}$ exprime la composante normale à la surface B de l'attraction que le corps M exerce sur le point m rapportée à l'unité de masse, les composantes de cette attraction parallèles aux axes étant $-\frac{dV}{dx}$, etc.

Si dn représente, comme on l'a supposé en commençant, la portion de la normale à la surface de niveau A comprise entre cette surface et la surface de niveau infiniment voisine intérieure à A, alors dV est constante dans le rapport $\frac{dV}{dn}$, et l'équation précédente (3) devient

$$dV \int\int \frac{d\omega}{dn} = 4\pi M.$$

Et comme on a supposé l'épaisseur ε de la couche formée intérieurement sur la surface de niveau A, égale à $\frac{k}{dn}$, cette formule devient

$$\frac{dV}{k} \int\int \varepsilon d\omega = 4\pi M,$$

ou bien encore

(4) $$\frac{dV}{k} = 4\pi \frac{M}{\mu},$$

en nommant μ le volume $\int\int \varepsilon d\omega$ ou la masse de la couche infiniment mince.

II.

Considérons maintenant un point S ayant pour coordonnées a, b, c, et que nous supposerons d'abord extérieur à la surface de niveau A, et par conséquent au corps M que cette surface environne.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m intérieur à cette surface A, et soit $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ la distance du point variable m au point fixe S. On a les deux équations

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 0.$$

Dans la première, ρ exprime, comme on l'a dit plus haut, la densité du corps M au point m, si ce point fait partie de la masse M, et

ρ est censée nulle pour tout point (x, y, z) qui n'appartient pas à cette masse M.

En multipliant la première équation par $\frac{1}{r}$, la seconde par V, et retranchant, on obtient la suivante :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dy^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dz^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right) = -\frac{4\pi\rho}{r}. \tag{5}$$

Multiplions celle-ci par $dx\,dy\,dz$, puis intégrons-la par rapport aux variables x, y, z, en étendant l'intégration à tous les points de l'espace que renferme la surface A.

Dans le second membre on aura

$$-4\pi\int\int\int\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r}, \quad \text{ou} \quad -4\pi U,$$

en appelant U la valeur de V relative au point S (a, b, c), c'est-à-dire la somme des molécules du corps M divisées par leurs distances respectives à ce point S.

Quant au premier membre, en observant qu'on a

$$\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right),$$

et que

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{x-a}{r},$$

on voit que l'intégrale triple indéfinie

$$\int\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right)dx\,dy\,dz$$

se réduit à l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\right)dy\,dz.$$

De là il est aisé de conclure que cette intégrale triple, prise dans tout l'espace limité par la surface A, est égale à la valeur de l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right) d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface A.

Les autres termes de l'équation (5) donneront par l'intégration des résultats analogues.

Ainsi, en multipliant cette équation (5) par $dx\,dy\,dz$, puis intégrant pour tout l'espace intérieur à la surface A, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\iint \frac{1}{r}\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{dV}{dy}\cos\beta + \frac{dV}{dz}\cos\gamma\right) d\omega \\ \displaystyle + \iint \frac{V}{r^2}\left(\frac{x-a}{r}\cos\alpha + \frac{y-b}{r}\cos\beta + \frac{z-c}{r}\cos\gamma\right) d\omega \end{array}\right\} = -4\pi U.$$

les intégrales doubles s'étendant à toute la surface A.

Mais on a, sur la surface A,

$$V = \text{constante},$$

$$\frac{dV}{dn} = -\frac{dV}{dx}\cos\alpha - \frac{dV}{dy}\cos\beta - \frac{dV}{dz}\cos\gamma.$$

D'ailleurs

$$\frac{x-a}{r}\cos\alpha + \frac{y-b}{r}\cos\beta + \frac{z-c}{r}\cos\gamma$$

est le cosinus de l'angle i que la droite menée du point S (a, b, c) au point m (x, y, z) de la surface A, fait avec la normale en m à cette surface. L'équation qui précède devient donc

$$\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}d\omega - V\iint \frac{\cos i\, d\omega}{r^2} = 4\pi U.$$

Le point S étant extérieur à la surface A, on sait que l'intégrale $\iint \frac{\cos i\, d\omega}{r^2}$, prise dans toute l'étendue de cette surface, est nulle, ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci

$$\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\,d\omega = 4\pi U;$$

et comme on a, d'après la formule (4),

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{h}\,\varepsilon = 4\pi\frac{M}{\mu}\,\varepsilon,$$

elle devient

$$\frac{M}{\mu}\iint\frac{\varepsilon\,d\omega}{r} = U.$$

Mais $\iint\frac{\varepsilon\,d\omega}{r}$ est la somme des molécules de la couche formée sur la surface A, divisées respectivement par leurs distances au point S. En désignant par v cette somme, on a donc enfin la formule

$$(6)\qquad \frac{v}{\mu} = \frac{U}{M},$$

qui exprime ce théorème :

« Si l'on considère une surface de niveau quelconque A d'un corps » M et un point quelconque S extérieur à cette surface, la somme des » molécules de la couche infiniment mince qui répond à cette surface, » divisées respectivement par leurs distances au point extérieur S, est à » la somme des molécules du corps M divisées par leurs distances » au même point S, comme la masse de la couche est à la masse du » corps. »

Il suit de là que *la somme des molécules d'une couche divisées par leurs distances à un point extérieur est à la masse de la couche dans un rapport constant, quelle que soit la couche;* ce qu'on pourrait encore trouver directement en intégrant l'équation (5) multipliée par $dx\,dy\,dz$ et où ρ serait nulle, dans tout l'espace compris entre deux surfaces de niveau quelconques auxquelles le point S est extérieur.

III.

Considérons à présent un point S (a, b, c) situé dans l'intérieur de la surface de niveau A, soit au-dedans, soit au-dehors du corps M. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m de l'espace extérieur à la surface A, et par conséquent au corps M, et soit r la distance Sm. On a les deux équations

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 0,$$

qui donnent

$$(7) \quad \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dy^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dz^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right) = 0.$$

Multiplions celle-ci par $dx\,dy\,dz$, puis intégrons-la par rapport aux variables x, y, z, en étendant l'intégration à tout l'espace extérieur à la surface A. L'intégrale triple indéfinie

$$\iiint\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right) dx\,dy\,dz$$

se réduit, comme plus haut, à l'intégrale double

$$\iint\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\right) dy\,dz.$$

Si l'on veut intégrer pour tout l'espace compris entre la surface A et une autre surface fermée quelconque A′ extérieure à A, il est aisé de voir qu'on aura à retrancher l'intégrale double

$$\iint\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right) d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface A d'une intégrale double analogue relative à l'autre surface A′. Or cette dernière intégrale aura une valeur infiniment petite ou nulle, si l'on suppose que tous les points de cette surface A′ s'éloignent à l'infini de l'origine des coordonnées [*].

[*] Car, en désignant par h la droite la plus courte qu'on puisse mener entre les deux surfaces A et A′, on a $r > h$ et $V < \frac{M}{h}$, V étant la somme des molécules de M divi-

L'intégrale triple

$$\iiint\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2}-V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

étendue à tout l'espace extérieur à la surface A, est donc égale à

$$-\iint\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right)d\omega,$$

cette intégrale double s'étendant à tous les éléments $d\omega$ de la surface A.

Ainsi, en intégrant l'équation (7) multipliée par $dx\,dy\,dz$ pour tout l'espace extérieur à A, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\iint\frac{1}{r}\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos 6+\frac{dV}{dz}\cos\gamma\right)d\omega\\ \displaystyle-\iint\frac{V}{r^2}\left(\frac{x-a}{r}\cos\alpha+\frac{y-b}{r}\cos 6+\frac{z-c}{r}\cos\gamma\right)d\omega\end{array}\right\}=0,$$

équation qui peut, d'apres ce qui a été expliqué plus haut, se trans-

---

sees par leurs distances au point m de la surface A′, lesquelles surpassent h; d'ailleurs $\frac{dV}{dx}$ composante de l'attraction que M exerce sur m est $<\frac{M}{h^2}$, attraction qu'exercerait un point de masse égale à M à la distance h. D'ailleurs $\cos\alpha$ et $\frac{x-a}{r}$ sont <1. On a donc, pour tout point de la surface A′, en ne considérant que les valeurs absolues,

$$\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha<\frac{1}{h}\frac{M}{h^2},\quad\text{et}\quad\frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha<\frac{M}{h}.$$

Ainsi l'intégrale double

$$\iint\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right)d\omega,$$

étendue à toute la surface A′, est $<\iint\frac{2M}{h^3}d\omega$ ou $<\frac{2M}{h^3}\times$ surface A′. Mais la surface A′ (supposee convexe) est plus petite que celle d'un parallelipipède qui l'envelopperait de toutes parts, et dont les côtes seraient proportionnels à h, de sorte qu'on peut poser la surface $A'<nh^2$, n étant un nombre fini indépendant de h. L'intégrale dont il s'agit est donc $<\frac{2M}{h^3}\times nh^2$ ou $<\frac{2Mn}{h}$; elle devient donc nulle si la surface A′ s'éloigne à l'infini, puisque h devient infinie.

former dans la suivante

$$\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\,d\omega = V\iint \frac{\cos i\,d\omega}{r^2},$$

en observant que V, étant constante sur la surface A, peut être mise hors des signes $\iint$.

Le point S étant ici intérieur à la surface A, on sait que

$$\iint \frac{\cos i\,d\omega}{r^2} = 4\pi:$$

on a aussi

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{k}\,\varepsilon = 4\pi\frac{M}{\mu}\,\varepsilon.$$

La formule qui précède devient donc

$$\frac{M}{\mu}\iint \frac{\varepsilon\,d\omega}{r} = V,$$

ou

$$\frac{c}{\mu} = \frac{V}{M};$$

c'est-à-dire que *si l'on considère un point quelconque* S *intérieur à une surface de niveau quelconque* A *du corps* M, *la somme des molécules de la couche qui répond à cette surface* A, *divisées par leurs distances au point intérieur* S, *est à la somme des molécules du corps* M *divisées par leurs distances à un point quelconque de la surface externe* A *de la couche comme la masse de la couche est à la masse du corps.*

Par conséquent *la somme des molécules d'une couche divisées par leurs distances à un point pris dans son intérieur, est constante, quel que soit ce point.*

Après avoir donné les théorèmes qui précèdent, M. Chasles en déduit sans peine les autres propositions exposées dans les §§ III et IV de son Mémoire, auquel nous renvoyons le lecteur.

Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester;

Par M. STURM.

I.

M. Sylvester a donné sans démonstration, dans le numéro de décembre 1839 du *Philosophical Magazine*, le théorème suivant :

Soit $V = 0$ une équation quelconque du degré m à une inconnue x dont les racines supposées inégales soient désignées par $a, b, c, d, \ldots, h$: d'où résulte

$$V = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - h).$$

Soit V_1 la fonction dérivée de V. Concevons qu'on cherche par le procédé ordinaire le plus grand commun diviseur de V et V_1, en ayant soin, dans les divisions successives, de n'introduire et de ne supprimer aucun facteur indépendant de x, et en changeant toujours les signes des restes avant de les prendre pour diviseurs. Désignons par $V_2, V_3, \ldots, V_m$ ces restes pris ainsi avec des signes contraires, dont les degrés par rapport à x sont respectivement $m - 2$, $m - 3, \ldots$, jusqu'à 0. Les polynômes $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_m$ s'exprimeront en fonction de x et des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V = 0$ de la manière suivante :

La dérivée V_1 est, comme on sait, la somme des produits $m - 1$ à $m - 1$ des facteurs $x - a, x - b, \ldots, x - h$, ce que nous écrirons ainsi

$$V_1 = \sum (x - b)(x - c)\ldots(x - h).$$

Pour former V_2, on multipliera chacun des produits $m - 2$ à $m - 2$ des facteurs $x - a, x - b, x - c, \ldots, x - h$ par le carré de la différence des deux racines qui n'entrent pas dans le produit que l'on considère; la somme des résultats, divisée par m^2 donnera V_2, c'est-à-dire qu'on a

$$V_2 = \frac{1}{m^2} \sum (a - b)^2 (x - c)(x - d)\ldots(x - h).$$

On a de même

$$(1)\begin{cases} V_3 = \frac{1}{\lambda_3} \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 (x-d)(x-e)\ldots(x-h), \\ V_4 = \frac{1}{\lambda_4} \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-e)\ldots(x-h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_m = \frac{1}{\lambda_m} (a-b)^2 (a-c)^2 \ldots (a-h)^2 (b-c)^2 \ldots (g-h)^2, \end{cases}$$

en désignant par $\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}, \ldots, \frac{1}{\lambda_m}$ certaines quantités indépendantes de x et fonctions symétriques des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V = 0$. Ces quantités sont toutes positives, quand l'équation $V = 0$ a tous ses coefficients réels [*].

II.

Soient q_1, q_2, q_3, etc. les quotients que fournit le calcul du plus grand commun diviseur de V et V_1 ; ils sont du premier degré par rapport à x, et l'on a les équations

$$V = V_1 q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3, \quad V_2 = V_3 q_3 - V_4, \text{ etc.}$$

La première donne

$$V_2 = V_1 q_1 - V.$$

En mettant cette expression de V_2 dans la seconde, on en tire

$$V_3 = V_1 (q_1 q_2 - 1) - V q_2.$$

En substituant dans la troisième ces valeurs de V_2 et V_3, on trouve

$$V_4 = V_1 [(q_1 q_2 - 1) q_3 - q_1] - V (q_2 q_3 - 1).$$

En continuant ainsi, on voit que chacun des polynômes V_2, V_3, V_4, etc. est de la forme $V_1 N - VP$, N et P étant deux polynômes dont les degrés diffèrent d'une unité. On voit d'ailleurs que N et P sont toujours les deux termes de l'une *des réduites* qui proviennent de la fraction continue $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \text{etc.}}}$ égale à $\frac{V}{V_1}$.

[*] M. Sylvester n'a pas donné explicitement, dans le Journal cité, les expressions de ces facteurs $\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}, \ldots$ en fonction des racines $a, b, c, \ldots$ On les trouvera plus loin, au § V.

Ainsi, pour V_k qui est du degré $m-k$, on a

$$(2)\qquad V_k = V_1 N - VP.$$

N est le numérateur et P le dénominateur de la réduite équivalente à $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ldots - \cfrac{1}{q_{k-1}}}$; N est du degré $k-1$ et P du degré $k-2$.

L'équation (2) fait voir qu'étant donnés les deux polynômes V et V_1 des degrés m et $m-1$, on pourra toujours trouver trois autres polynômes T, Y et Z des degrés $m-k$, $k-1$ et $k-2$ respectivement, tels qu'on ait

$$(3)\qquad T = V_1 Y - VZ.$$

D'après l'équation (2), il suffira, en effet, de prendre

$$T = \lambda V_k,\quad Y = \lambda N,\quad Z = \lambda P,$$

λ étant une quantité arbitraire indépendante de x.

Je dis en outre qu'il n'y a pas d'autre manière de satisfaire à cette équation (3), en supposant toujours que T, Y et Z soient des degrés $m-k$, $k-1$ et $k-2$. En effet, en éliminant V_1 entre les équations (2) et (3), on trouve

$$NT - V_k Y = V(PY - NZ),$$

d'où il résulte que les deux expressions $NT - V_k Y$ et $PY - NZ$ doivent être nulles identiquement. Car autrement, d'après les degrés de nos polynômes, le premier membre de cette équation serait du degré $m-1$ au plus, tandis que le second serait au moins du degré m, ce qui est absurde. On a donc à la fois

$$NT - V_k Y = 0,\quad PY - NZ = 0,$$

d'où

$$\frac{T}{V_k} = \frac{Y}{N} = \frac{Z}{P} = \lambda,$$

λ étant une quantité indépendante de x (puisque T et V_k sont du même degré $m-k$).

Si l'on prend pour Y et Z des polynômes à coefficients indéterminés, Y, étant du degré $k-1$, renfermera k de ces coefficients; Z en contiendra $k-1$; leur nombre total est $2k-1$. L'expression $V_1 Y - VZ$ est en général du degré $m+k-2$; mais on peut la réduire à un degré moindre en égalant à zéro quelques-uns des coefficients des plus hautes puissances de x. Si l'on veut réduire $V_1 Y - VZ$ à un polynôme T du degré $m-k$, il faudra égaler à zéro les coefficients de toutes les puissances de x, depuis la plus haute x^{m+k-2} jusqu'à x^{m-k+1} inclusivement; on aura ainsi $2k-2$ équations de condition linéaires entre les $2k-1$ coefficients des polynômes Y et Z, lesquelles détermineront les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux, qui restera seul arbitraire, et se trouvera comme facteur commun dans les valeurs de Y, Z et T. Ces équations linéaires ne peuvent être ni incompatibles ni indéterminées, puisqu'on a vu que l'équation (3) a pour solution unique

$$Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P, \quad T = \lambda V_k,$$

λ étant indépendant de x, et les polynômes N, P, V_k étant complétement déterminés.

On voit bien par là que le degré de $V_1 Y - VZ$ ne peut pas, en général, devenir moindre que $m-k$, en prenant toujours des polynômes Y et Z des degrés $k-1$ et $k-2$; mais on pourra d'une infinité de manières réduire $V_1 Y - VZ$ à un degré plus petit que $m+k-2$ et plus grand que $m-k$.

Pour avoir $V_1 Y - VZ =$ une constante C, il faudra nécessairement prendre pour Y et Z le numérateur et le dénominateur de l'avant-dernière *réduite* provenant de $q_1 - \frac{1}{q_2 - \text{etc.}}$, multipliés par $\frac{C}{V_m}$; Y est alors du degré $m-1$ et Z du degré $m-2$. Cela résulte de la formule $V_m = V_1 N - VP$, ou bien encore de ce que les termes de deux réduites consécutives $\frac{N}{P}$, $\frac{N'}{P'}$, sont toujours liés par la relation $NP' - PN' = \pm 1$, et que les deux termes de la dernière réduite sont égaux à $\frac{V}{V_m}$ et $\frac{V_1}{V_r}$ identiquement.

Ce qu'on vient d'établir ne suppose point que V_1 soit la fonction dérivée de V. Il suffit que V_1 soit du degré $m-1$, V étant du degré m, et que V et V_1 n'aient pas de diviseur commun.

On voit aussi comment il faudrait modifier ce qui précède, si V et V_1 représentaient deux polynômes quelconques.

III.

Il s'agit maintenant d'exprimer *les restes* V_2, V_3, etc. en fonction de x et des racines $a, b, c, \ldots, h$ de l'équation $V = 0$.

Pour fixer les idées, considérons V_4, qui est du degré $m-4$ par rapport à x. La méthode serait la même pour toute autre fonction V_k.

Multiplions la fonction V_1, dérivée de V, par le polynôme suivant :

$$(4)\quad (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-a)(x-b)(x-c)+\ldots+(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-b)(x-c)(x-d)+\text{etc.},$$

que nous désignerons par Y et qui est une fonction symétrique des racines de $V=0$, du troisième degré par rapport à x.

Le produit $V_1 Y$ sera du degré $m+2$. Si l'on divise ce produit par V, qui est du degré m, on aura un quotient Z du deuxième degré, et un reste T qu'on pourra présenter sous une forme particulière et qui ne différera de V_4 que par un facteur indépendant de x, comme nous allons le montrer.

La division indiquée donne

$$(5)\qquad \frac{V_1 Y}{V} = Z + \frac{T}{V}.$$

La fraction rationnelle $\frac{T}{V}$ peut se décomposer en fractions simples ayant pour dénominateurs les facteurs du premier degré $x-a, x-b, \ldots, x-h$ du polynôme V. D'après la règle connue pour la formation des fractions partielles, celle qui a pour dénominateur $x-a$ doit avoir pour numérateur ce que devient pour $x=a$ le quotient de $V_1 Y$ divisé par la dérivée de V qui est V_1, c'est-à-dire la valeur même de Y pour $x=a$, qu'on peut désigner par $Y(a)$. On aura donc

$$\frac{T}{V} = \frac{Y(a)}{x-a} + \frac{Y(b)}{x-b} + \cdots + \frac{Y(h)}{x-h} = \sum \frac{Y(a)}{x-a},$$

ou, d'après l'expression (4) de Y,

$$\frac{T}{V} = \sum \frac{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(a-b)(a-c)(a-d)+(b-c)^2(b-e)^2(c-e)^2(a-b)(a-c)(a-e)+\text{etc.}}{x-a}.$$

Or cette valeur de $\frac{T}{V}$ n'est autre chose que la somme des fractions partielles qu'on trouve en décomposant la fraction rationnelle suivante

$$\frac{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)(x-f)\ldots(x-h)+\text{etc.}}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-h)},$$

dont le dénominateur est égal à V [*].

En conséquence, T est égal au numérateur de cette fraction, lequel est du degré $m-4$ par rapport à x.

[*] Il faut observer dans cette decomposition que $V_1(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-h)$.

D'ailleurs l'équation (5) donne $T = V_1 Y - VZ$; et comme T, Y et Z sont respectivement des degrés $m - 4$, 3 et 2, il faut, d'après ce qu'on a vu précédemment au § II, qu'on ait $T = \lambda V_4$, λ étant un facteur indépendant de x. On a donc

$$V_4 = \frac{1}{\lambda} \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-e)(x-f) \ldots (x-h),$$

conformément au théorème de M. Sylvester.

On a en même temps, Y désignant toujours le polynôme (4),

$$Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P, \quad \text{en supposant } \frac{N}{P} = q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q}}.$$

On trouverait de même les expressions de V_2, V_3,... en prenant successivement

$$Y = (x-a) + (x-b) + \ldots + (x-h) \quad (\text{d'où } Z = m^2, \quad \lambda = m^2 \quad \text{et} \quad Y = \lambda q_1 = m^2 q_1),$$
$$Y = (a-b)^2 (x-a)(x-b) + (a-c)^2 (x-a)(x-c) + \text{etc.},$$
. . . .

IV.

M. Liouville m'a fait voir que les résultats précédents se déduisent aussi d'une formule que M. Cauchy a donnée dans son *Cours d'Analyse algébrique*, note 5, page 528, et par laquelle on détermine une fraction rationnelle, dont on connaît un certain nombre de valeurs particulières.

Supposons qu'on cherche l'expression de V_4. Comme on l'a expliqué au § II, on aura

$$V_4 = \frac{1}{\lambda} T,$$

si l'on trouve un polynôme T du degré $m-4$ et deux autres Y et Z du troisième et du deuxième degré qui satisfassent à l'équation

$$T = V_1 Y - VZ.$$

Il faut et il suffit évidemment que $V_1 Y - T$ soit divisible par V, ou, ce qui revient au même, s'annule pour les m valeurs a, b, c,..., h attribuées à x. Donc, pour chacune de ces valeurs, la fraction $\frac{T}{Y}$ doit être égale à V_1, de sorte que, pour $x = a$, par exemple, on aura

$$\frac{T}{Y} = V_1(a) = (a-b)(a-c) \ldots (a-h).$$

On connaît ainsi m valeurs particulières de la fraction $\frac{T}{Y}$, ce qui la détermine complétement, puisque, d'après les degrés des polynômes T et Y, les coefficients indéterminés qui doivent entrer dans $\frac{T}{Y}$ sont au nombre de $m+1$, et que l'un d'eux peut être remplacé par l'unité. En introduisant ces m valeurs de $\frac{T}{Y}$ pour $x=a$, $x=b$, etc., dans la formule mentionnée de M. Cauchy, on retrouve précisément les expressions de T et de Y données plus haut, et par suite celle de V_4.

V.

Posons, pour abréger,

$$T_2 = \sum (a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h),$$

$$T_3 = \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)(x-e)\ldots(x-h),$$

$$T_4 = \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(a-d)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)\ldots(x-h),$$

etc.

Nous avons trouvé

$$V_2 = \frac{1}{m^2}T_2, \quad V_3 = \frac{1}{\lambda_3}T_3, \quad V_4 = \frac{1}{\lambda_4}T_4,\ldots, \quad V_k = \frac{1}{\lambda_k}T_k, \text{ etc.},$$

les quantités $\frac{1}{\lambda_3}$, $\frac{1}{\lambda_4}$,... devant être indépendantes de x, mais fonctions symétriques des racines $a, b, c,\ldots$ de l'équation $V=0$ (car elles dépendent des coefficients de cette équation). Il nous reste à déterminer ces facteurs $\frac{1}{\lambda_k}$.

On a vu, au § III, qu'au polynôme T du degré $m-4$ qui est maintenant représenté par T_4, correspondaient deux autres polynômes Y et Z des degrés 3 et 2 liés avec T par la relation $T = V_1Y - VZ$.

De même, à tout autre polynôme T_k du degré $m-k$ correspondent deux polynômes des degrés $k-1$ et $k-2$ que nous désignerons par Y_k et Z_k, et tels qu'on a

$$T_k = V_1Y_k - VZ_k.$$

Les polynômes Y sont ainsi exprimés :

$$Y_2 = (x-a) + (x-b) + \ldots + (x-h) = \sum (x-a),$$

$$Y_3 = \sum (a-b)^2 (x-a)(x-b),$$

$$Y_4 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 (x-a)(x-b)(x-c),$$

$$Y_5 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

etc.

Je désigne encore par p_2, p_3, p_4, etc. le coefficient de la plus haute puissance de x dans T_2, T_3, T_4,... respectivement, de sorte que

$$p_2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + \ldots + (g-h)^2 = \sum (a-b)^2,$$

$$p_3 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2,$$

$$p_4 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2,$$

etc.

On voit qu'en général, p_k, qui est le coefficient de la plus haute puissance de x dans T_k, est aussi le coefficient de la plus haute puissance de x dans Y_{k+1}.

Cela posé, on a les deux équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} T_k = V_1 Y_k - V Z_k, \\ T_{k+1} = V_1 Y_{k+1} - V Z_{k+1}, \end{array} \right.$$

qui donnent, par l'élimination de V_1,

$$T_k Y_{k+1} - T_{k+1} Y_k = V (Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k).$$

Mais, en désignant par $\frac{N_k}{P_k}$ la réduite égale à $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cdots - \cfrac{1}{q_{k-1}}}$, et par $\frac{N_{k+1}}{P_{k+1}}$ la réduite suivante, on a

$$Y_k = \lambda_k N_k, \qquad Z_k = \lambda_k P_k, \qquad \text{avec} \qquad V_k = \frac{1}{\lambda_k} T_k,$$

et
$$Y_{k+1} = \lambda_{k+1} N_{k+1}, \quad Z_{k+1} = \lambda_{k+1} P_{k+1};$$

donc $\quad Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k = \lambda_k \lambda_{k+1} (N_k P_{k+1} - P_k N_{k+1}) = \lambda_k \lambda_{k+1},$

à cause de la relation connue $\quad N_k P_{k+1} - P_k N_{k+1} = -1.$

En conséquence, l'équation précédente devient

$$(7)\qquad T_k Y_{k+1} - T_{k+1} Y_k = V.\lambda_k \lambda_{k+1}.$$

Le premier terme du produit effectué $T_k Y_{k+1}$ est $p_k x^{m-k} . p_k x^k$ ou $p_k^2 x^m$; la plus haute puissance de x dans $T_{k+1} Y_k$ est x^{m-2}, et le premier terme de V est x^m. Donc, en égalant les coefficients de la plus haute puissance de x, qui est x^m, dans les deux membres, on aura

$$(8)\qquad p_k^2 = \lambda_k \lambda_{k+1};$$

ce qui donne successivement (en observant que $p_1 = m$ et $\lambda_1 = 1$),

$$m^2 = \lambda_2, \quad p_2^2 = \lambda_2 \lambda_3, \quad p_3^2 = \lambda_3 \lambda_4, \quad p_4^2 = \lambda_4 \lambda_5, \quad \text{etc.}$$

On déduit de là les valeurs de $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$, etc., et par suite

$$(9)\quad \begin{cases} V_2 = \dfrac{1}{m^2} T_2, \quad V_3 = \dfrac{1}{\lambda_3} T_3 = \left(\dfrac{m}{p_2}\right)^2 T_3, \quad V_4 = \left(\dfrac{p_2}{m p_3}\right)^2 T_4, \\ V_5 = \left(\dfrac{m p_3}{p_2 p_4}\right)^2 T_5, \quad V_6 = \left(\dfrac{p_2 p_4}{m p_3 p_5}\right)^2 T_6, \quad V_7 = \left(\dfrac{m p_3 p_5}{p_2 p_4 p_6}\right)^2 T_7, \quad \text{etc.}, \\ \text{et enfin, selon que } m \text{ est pair ou impair,} \\ V_m = \left(\dfrac{p_2 p_4 p_6 \ldots p_{m-2}}{m p_3 p_5 \ldots p_{m-1}}\right)^2 p_m \text{ [*]}, \quad \text{ou} \quad V_m = \left(\dfrac{m p_3 p_5 \ldots p_{m-2}}{p_2 p_4 p_6 \ldots p_{m-1}}\right)^2 p_m. \end{cases}$$

C'est là le théorème complet de M. Sylvester.

Quand l'équation $V = 0$ a tous ses coefficients réels, les quantités $p_2, p_3, \ldots p_m$ sont aussi toutes réelles, puisqu'elles sont des fonctions symétriques et entières des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V = 0$, et par conséquent des fonctions entières de ses coefficients. Les polynômes V_2, V_3, etc., ne diffèrent alors de T_2, T_3, etc. que par des facteurs indépendants de x essentiellement positifs, comme le montrent les formules (9).

VI.

Je dois dire encore comment, étant donnée une équation $V = 0$ numérique ou littérale dont on ne connaît pas les racines, on trouvera les polynômes $T_2, T_3, T_4, \ldots$ sans aucun facteur étranger.

---

[*] p_m représente, comme T_m, le produit des carrés des différences de toutes les racines $a, b, c, \ldots, h$.

Pour cela, je substitue les expressions précédentes de V_2, V_3, V_4, etc., dans les équations primitives

$$V = V_1 q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3, \quad V_2 = V_3 q_3 - V_4, \ldots,$$

et je trouve

$$(10) \quad \begin{cases} m^2 V = V_1 q_1 m^2 - T_2, \\ p_2^2 V_1 = T_2 q_2 \dfrac{p_2^2}{m^2} - m^2 T_3, \\ p_3^2 T_2 = T_3 q_3 \dfrac{m^4 p_3^2}{p_2^4} - p_2^2 T_4, \\ p_4^2 T_3 = T_4 q_4 \dfrac{p_2^4 p_4^2}{m^4 p_3^2} - p_3^2 T_5, \\ p_5^2 T_4 = T_5 q_5 \dfrac{m^4 p_3^4 p_5^2}{p_2^4 p_4^2} - p_4^2 T_6, \\ p_6^2 T_5 = T_6 q_6 \dfrac{p_2^4 p_4^4 p_6^2}{m^4 p_3^4 p_5^2} - p_5^2 T_7, \\ \text{etc. [*].} \end{cases}$$

En considérant que m est le premier coefficient de V_1 ordonné suivant les puissances décroissantes de x, que p_2 est le premier coefficient de T_2, p_3 celui de T_3, etc., on tire de ces formules les conclusions suivantes.

On voit d'abord que si l'on multiplie V par m^2 et qu'on divise le produit $m^2 V$ par V_1, on obtient un quotient Q_1 du premier degré par rapport à x, égal à $q_1 m^2$, et entier par rapport à toutes les lettres qui y entrent, puis un reste qui, pris en signe contraire, est précisément T_2. On connaît donc p_2, qui est le premier coefficient de T_2. Multipliant V_1 par p_2^2, et divisant le produit $p_2^2 V_1$ par T_2, on a encore un quotient Q_2, entier par rapport à toutes les lettres, et égal à $q_2 \dfrac{p_2^2}{m^2}$ (quoique cette quantité paraisse fractionnaire), puis un reste qui, pris en signe contraire, est égal à $m^2 T_3$; en le divisant par m^2 on a T_3, et par conséquent

---

[*] On aperçoit mieux la loi de ces formules en observant que l'équation

$$V_{k-1} = V_k q_k - V_{k+1}$$

donne

$$\frac{1}{\lambda_{k-1}} T_{k-1} = \frac{1}{\lambda_k} T_k q_k - \frac{1}{\lambda_{k+1}} T_{k+1} \quad \text{ou} \quad \lambda_k \lambda_{k+1} T_{k-1} = T_k q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} - \lambda_{k-1} \lambda_k T_{k+1},$$

ou enfin, d'après l'équation (8),

$$p_k^2 T_{k-1} = T_k . q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} - p_{k-1}^2 T_{k+1}.$$

on connaît p_3, coefficient de la plus haute puissance de x dans T_3. Divisant ensuite le produit $p_3^2\, T_2$ par T_3, on aura encore un quotient entier Q_3, égal à $q_3 \frac{m^2 p_3^2}{p_2^2}$, et un nouveau reste qui sera divisible par p_2^2 : en le divisant par ce facteur, puis changeant les signes, on aura T_4, et par suite on connaîtra p_4, qui est le premier coefficient de T_4. De même, la division de $p_4^2\, T_3$ par T_4 donnera un quotient entier Q_4 et un reste divisible par p_3^2 ; en supprimant ce facteur et changeant les signes, on connaîtra T_5 et aussi p_5. On forme ainsi successivement tous les polynômes T_2, T_3, T_4, etc. On peut les substituer à $V_2, V_3, V_4, \ldots$ dans la recherche des racines réelles de l'équation $V = 0$, en conservant V et V_1 pour les deux premières fonctions.

Connaissant $T_2, T_3, T_4, \ldots$, on pourra obtenir aussi les polynômes $Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$

D'abord on a $Y_2 = x - a + x - b + \text{etc.} = mx + p$, p étant le coefficient de x^{m-1} dans V.

Ensuite, l'équation (7) donnera successivement

$$Y_3 = \frac{V p_2^2 + T_3 Y_2}{T_2}, \quad Y_4 = \frac{V p_3^2 - T_4 Y_3}{T_3}, \text{ etc.}$$

On peut aussi, connaissant $T_2, T_3, \ldots$, former les polynômes Z_2, Z_3, etc.

En comparant les formules

$$T_2 = V_1 Y_2 - V Z_2, \quad \text{et} \quad T_2 = V_1 Q_1 - m^2 V,$$

on a d'abord

$$Z_2 = m^2.$$

Ensuite les équations (6) donnent, en éliminant V,

$$T_k Z_{k+1} - T_{k+1} Z_k = V_1 (Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k) = V_1 \lambda_k \lambda_{k+1} = V_1 p_k^2,$$

d'où l'on tire

$$Z_3 = \frac{p_2^2 V_1 + m^2 T_3}{T_2}, \quad Z_4 = \frac{p_3^2 V_1 + T_4 Z_3}{T_3}, \text{ etc.}$$

Si l'on connaissait déjà Y_k, on trouverait immédiatement Z_k en divisant le produit $V_1 Y_k$ par V, car Z_k est la partie entière du quotient de cette division, d'après le § III.

On peut encore déterminer successivement $Y_2, Y_3, Y_4, \ldots, Z_2, Z_3$, etc., si l'on connaît seulement tous les quotients entiers Q_1, Q_2, etc. On partira des valeurs $Y_1 = 1$, $Z_1 = 0$, $Y_2 = Q_1$, $Z_2 = m^2$, qui résultent de la comparaison des formules $T_1 = V_1$, $T_2 = V_1 Q_1 - m^2 V$, avec la formule générale $T_k = V_1 Y_k - V Z_k$. Et l'on formera de proche en proche Y_3, Z_3, Y_4, etc. au moyen des relations

$$p_{k-1}^2 Y_{k+1} = Y_k Q_k - p_k^2 Y_{k-1}, \quad p_{k-1}^2 Z_{k+1} = Z_k Q_k - p_k^2 Z_{k-1},$$

qu'on déduit de celles-ci

$$N_{k+1} = N_k q_k - N_{k-1} \text{ [*]}, \quad P_{k+1} = P_k q_k - P_{k-1},$$

en y remplaçant N_k, P_k, N_{k-1}, etc. par leurs valeurs $\frac{1}{\lambda_k} Y_k$, $\frac{1}{\lambda_k} Z_k$, $\frac{1}{\lambda_{k-1}} Y_{k-1}$, etc., multipliant par $\lambda_{k-1}\lambda_k\lambda_{k+1}$, et ayant égard à la formule (8), et à ce que $Q_k = q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1}$.

Nous avons appelé $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ les quotients que fournit le calcul du plus grand commun diviseur de V et de V_1, effectué, comme l'indiquent les formules (10), de manière à éviter les coefficients fractionnaires. Ces quotients peuvent aussi s'exprimer en fonctions entières et symétriques des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V = 0$.

Par exemple, en effectuant la division de $p_4^2 T_3$ par T_4, on voit que le quotient Q_4 ne dépend que du premier et du second terme du divi-

---

[*] On peut remarquer ici une propriété des fonctions N ou Y. On a les relations

(11) $$N_3 = N_2 q_2 - N_1, \quad N_4 = N_3 q_3 - N_2, \ldots, \quad N_{m+1} = N_m q_m - N_{m-1},$$

dans lesquelles $N_1 = 1$, $N_2 = q_1$, et, comme on l'a déjà dit § II, $N_{m+1} = \frac{V}{V_m}$, ce que donne aussi l'élimination de V_m entre les formules

$$V_m = V_1 N_m - V P_m, \quad 0 = V_1 N_{m+1} - V P_{m+1}.$$

L'équation $N_{m+1} = 0$ a donc les mêmes racines que $V = 0$.

D'après les relations (11), lorsqu'en faisant croître x, une fonction N_k autre que N_{m+1} s'évanouira, la suite des signes des fonctions $N_1, N_2, \ldots, N_m, N_{m+1}$ conservera le même nombre de variations. Mais elle en perdra une chaque fois que N_{m+1} deviendra nulle. En effet, on a

$$\frac{V}{V_1} = \frac{N_{m+1}}{P_{m+1}} = \frac{N_m N_{m+1}}{N_m P_{m+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{N_m N_{m+1}}{1 - P_m N_{m+1}}.$$

Pour les valeurs réelles de x un peu plus grandes que celles qui annulent V, ou N_{m+1}, [illegible] que V et V_1 sont de même signe, et cette expression de $\frac{V}{V_1}$ montre que N_m et N_{m+1} sont aussi de même signe (le dénominateur étant alors peu différent de $+1$). Pour les valeurs de x un peu moindres que celles qui annulent V, V et V_1 ayant des signes contraires, N_m et N_{m+1} auront aussi des signes contraires.

On conclut de là que l'équation $V = 0$ ou $N_{m+1} = 0$ a autant de racines comprises entre deux nombres quelconques A et B qu'il y a de variations perdues dans la suite des signes des fonctions $N_1, N_2, \ldots, N_{m+1}$ en passant de A à B. On dira la même chose des polynômes Y, qui ne diffèrent [illegible] fonctions N que par des facteurs positifs.

On peut observer encore que, pour chaque valeur de x qui annule V, les fonctions $N_1, N_2, \ldots, N_m$, d'après les formules (11), comparées à $V_{i-1} = V_i q_i - V_{i+1}$, prennent des valeurs égales à $\frac{V_1}{V_1}$, $\frac{V_2}{V_1}, \ldots, \frac{V_m}{V_1}$, et ce fait fournit une autre démonstration de la propriété précédente.

dende et du diviseur, et l'on trouve,

$$Q = \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 \times \sum (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-a+x-b+x-c+x-d)$$

$$-\sum (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2 \times \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-a+x-b+x-c).$$

On aurait des valeurs analogues pour les autres quotients. On y arrive encore de la manière suivante.

Les équations $T_3 = V_4 Y_3 - VZ_3$, $T_5 = V_4 Y_5 - VZ_5$, donnent

$$T_3 Y_5 - T_5 Y_3 = V(Y_3 Z_5 - Y_5 Z_3) = V\lambda_3\lambda_5(N_3 P_5 - N_5 P_3).$$

Mais on a

$$N_3 P_5 - N_5 P_3 = N_3(P_4 q_4 - P_3) - P_3(N_4 q_4 - N_3) = q_4.$$

et
$$\lambda_3\lambda_5 q_4 = Q_4;$$

donc
$$T_3 Y_5 - T_5 Y_3 = VQ_4.$$

Cette équation montre que si l'on divise $T_3 Y_5$ par V, la partie entiere du quotient sera Q_4, et le reste $T_5 Y_3$; car le degré de T_3 surpasse celui de T_5 de deux unités, le degré de Y_5 surpasse aussi celui de Y_3 de deux unités; $T_3 Y_5$ est du degré $m+1$ et V du degré m. La division effectuée de $T_3 Y_5$ par le polynôme V, mis sous la forme

$$x^m - (a + b + \ldots + h)x^{m-1} + \text{etc.},$$

donnera la valeur de Q_4 trouvée plus haut.

J'observerai, en terminant, que la quantité p_2 ou $\sum (a-b)^2$, prise avec un signe contraire, est le coefficient du second terme de l'équation qui a pour racines les carrés des différences des racines a, b, c,... de $V = 0$, et que le dernier terme de cette équation est p_m ou $-p_m$, selon que son degré $\frac{m(m-1)}{2}$ est pair ou impair. Mais les autres quantités p_3, p_4,... n'entrent pas comme coefficients dans l'équation aux carrés des différences. Ainsi p_3, qui représente $\sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, n'est pas la somme de tous les produits trois à trois des carrés des différences des racines a, b, c, ..., h, puisque, par exemple, le produit $(a-b)^2(a-c)^2(c-d)^2$ ne fait pas partie de p_3.

RECHERCHE THÉORIQUE

DES LOIS D'APRÈS LESQUELLES LA LUMIÈRE EST RÉFLÉCHIE ET RÉFRACTÉE

A LA LIMITE COMMUNE DE DEUX MILIEUX COMPLÉTEMENT TRANSPARENTS

PAR M. F.-E. NEUMANN [*].

(Traduction de M. CABART.

La théorie de la réflexion et de la réfraction comprend deux questions bien distinctes : la question de direction, la question d'intensité. Elle s'est en conséquence partagée en deux parties, dont l'une a atteint une haute perfection par les travaux de Newton, de Laplace, d'Huyghens et de Fresnel. Dans la plupart des cas, la théorie newtonienne a donné les lois que suivent les directions des rayons après leur réflexion ou leur réfraction. La doctrine des ondulations a appliqué ses principes à tous les faits que l'observation a jusqu'ici rencontrés ; elle ne serait amenée à les modifier que s'il existait des milieux dans lesquels les mouvements lumineux se transmettraient d'après des lois nouvelles et encore inobservées, circonstance qui ne paraît pas vraisemblable.

Quant à la seconde partie, celle qui recherche les intensités des rayons réfléchis et réfractés, elle est d'une origine bien plus récente. Avant Lambert, on ne s'en était pas pas occupé, et l'étude expérimentale des phénomènes qu'elle présente avait paru, dit ce géomètre, si difficile, qu'aucun physicien n'avait osé l'aborder. Les essais que Lambert lui-même publia sur ce sujet, dans sa Photométrie, ne pouvaient guère avancer une question dont la clef manquait encore : je veux parler de la découverte de la polarisation par réflexion. La science avait à s'enrichir en outre de la découverte de MM. Arago et Fresnel relative à l'interférence de deux rayons polarisés, avant que Fresnel pût attaquer le problème jusque-là inabordable des intensités de la lumière ; ses efforts luttèrent heureusement contre les obstacles, et les résultats qu'ils obtinrent ne sont pas le témoignage le moins éclatant du talent ingénieux et élevé de celui qui fonda pour l'optique une ère nouvelle.

Fresnel résolut le problème de l'intensité de la lumière après sa réflexion et sa réfraction à la surface d'un milieu transparent non cristallisé. Comme conséquences de la solution à laquelle il parvint, se développèrent à lui les déterminations théoriques d'une grande classe de phénomènes qui avaient depuis longtemps excité l'attention

[*] Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 7 décembre 1835.

des physiciens, et qui étaient en partie expérimentalement appréciés, sans que rien eût fait entrevoir le lien qui les unissait. A cette classe de phénomènes se rattachaient la polarisation complète par reflexion sous l'angle de polarisation, la polarisation partielle par reflexion sous des angles quelconques et son accroissement par des réflexions répétées, la polarisation partielle par réfraction et son accroissement par des réfractions successives, la rotation du plan de polarisation quand la lumière incidente est polarisée, etc.

Le point le plus remarquable des travaux de Fresnel est sans contredit l'heureuse interprétation de ses formules pour le cas de la réflexion totale, interprétation qui le mena à la découverte des lois d'une classe de phénomènes qui étaient encore pour bien longtemps abandonnés aux tâtonnements de l'expérience, des lois d'après lesquelles la lumière réfléchie se polarise circulairement ou elliptiquement.

Lorsque les travaux de Fresnel furent publiés, le cercle des expériences avait déjà depassé les limites que ce grand physicien avait atteintes dans sa théorie de la réfraction et de la réflexion; depuis lors il a continué à s'étendre. Seebeck a poursuivi avec succès les recherches commencées par Brewster sur l'influence des surfaces cristallines sur la lumière réfléchie. Brewster a fait connaître plus exactement une classe de phénomènes qui dépendent de l'action des surfaces metalliques sur la lumière polarisée, phenomènes qui ont une liaison intime avec les faits observés par M. Arago, et plus tard étendus par les observations de Nobili et d'Airy. Ces modifications qu'exercent les surfaces métalliques sur la lumière réfléchie se rattacheraient, d'après la remarque d'Airy touchant la réflexion de la lumière à la surface du diamant, aux propriétés que présente la lumière réfléchie à la surface des corps transparents.

J'ai déduit des observations de Brewster (*Pogg. Ann.,* Bd. XXVI) la loi mathématique de ces phénomènes; mais on ne peut pas en espérer une théorie rigoureuse avant qu'on soit arrivé à une définition optique exacte de la transparence des corps et des causes qui la modifient à des degrés si différents : ce qui, nonobstant les travaux préparatoires sur l'absorption de la lumière, notamment ceux d'Herschel et de Brewster, semble devoir manquer encore longtemps.

De l'autre côté, la voie se présente tout ouverte, et l'on peut espérer compléter la théorie de Fresnel en l'étendant aux cas où la réflexion et la réfraction sont produites par des corps transparents cristallisés. Dans cette vue un essai a déjà été tenté. Seebeck a cherché à déduire, pour des angles observés par lui, la loi de la polarisation complète par la réflexion à la surface des cristaux. Il s'est appuyé sur des principes théoriques semblables à ceux que Fresnel avait adoptés comme base de ses travaux. Cette extension des formules de Fresnel souffre néanmoins encore quelques difficultés, et ne s'applique pas à l'explication de tous les phénomènes jusqu'ici connus.

Les questions posées par le progrès des recherches expérimentales sont à peu près les suivantes :

La loi générale de l'angle de polarisation, quelle que soit la position de la surface réflechissante par rapport aux axes optiques, et dans quelque azimut qu'ait lieu la réflexion ;

La loi pour la rotation du plan de polarisation dans le rayon réfléchi, rotation qui résulte de la réflexion par les corps cristallisés quand le rayon incident est polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan de réflexion;

La loi pour la déviation du plan de polarisation quand la lumière naturelle est réfléchie sous l'angle de polarisation;

La loi d'après laquelle la lumière réfractée se divise en deux rayons, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire: cette loi doit faire connaître à la fois la position du plan de polarisation de la lumière incidente pour laquelle l'un ou l'autre des rayons disparaît;

La loi d'après laquelle, à la réflexion intérieure dans un cristal, un faisceau de lumière produit deux faisceaux réfléchis et un faisceau réfracté. La connaissance des deux dernières lois rendra possible une théorie des couleurs que présentent les cristaux à la lumière polarisée.

On voit que le nombre des phénomènes et des faits qui attendent leur explication du développement de la théorie de la réflexion et de la réfraction est assez grand pour rendre ce développement désirable. Tel est le but spécial de ce Mémoire; il aura encore pour objet d'expliquer tous les phénomènes de lumière qui dépendent de la différence des vitesses de propagation des ondes lumineuses.

Quand on examine avec soin toutes les circonstances qui rapprochent la réflexion par des corps transparents non cristallisés de la réflexion produite par des milieux cristallins, on ne peut douter qu'une même théorie puisse les comprendre toutes deux; car on ne voit pas entre elles de ces différences caractéristiques qui séparent la réflexion sur les corps transparents de la réflexion sur les métaux. S'il en est ainsi, les principes sur lesquels on s'appuie pour calculer l'intensité de la lumière réfléchie et l'intensité de la lumière réfractée à la surface des milieux non cristallisés doivent se prêter à une généralisation qui leur permette de s'adapter avec la même rigueur à la théorie des quantités de lumière réfléchies et réfractées par les surfaces transparentes cristallisées. Les principes admis par Fresnel ne sont pas susceptibles d'une pareille généralisation, car ils supposent que dans tous les milieux cristallisés l'éther possède une égale élasticité. Les doutes que j'avais conçus autrefois sur l'exactitude de ces principes se sont encore fortifiés par cette circonstance. Ils m'étaient venus à l'occasion de la définition du plan de polarisation que Fresnel définit . le plan conduit par la direction du rayon perpendiculairement à la direction du mouvement des molécules éthérées. Cette définition est le fondement sur lequel il a appuyé sa théorie des intensités réfléchies et réfractées. Mais la théorie de la double réfraction (*Pogg. Ann.*, Bd. XXV), que j'ai déduite d'une manière rationnelle des principes sur lesquels Fresnel fondait la sienne, conduit à une définition tout autre du plan de polarisation. Ce plan serait celui qui passe par la direction du rayon, et par la direction du mouvement vibratoire.

La théorie que je vais développer dans les pages suivantes sera fondée sur des principes d'une généralité telle, qu'ils sont non-seulement applicables aux corps transparents non cristallisés, mais encore aux milieux cristallisés à un axe ou à deux axes, et même à des milieux dont l'action sur la lumière serait d'une nature toute nouvelle et encore inconnue. La même théorie comprendra comme corollaire la définition du plan de polarisation qu'exige la théorie de la double réfraction.

§ Ier.

Avant d'exposer les principes sur lesquels je m'appuie, je présenterai sommairement les résultats du travail de Fresnel sur les intensités des rayons réfléchis et réfractés à la surface des corps transparents non cristallisés. Ces résultats ont reçu la sanction d'expériences exactes, et peuvent ainsi servir à confirmer la justesse des vues théoriques qui m'ont conduit, malgré le désaccord entre ces vues et les principes qui les ont d'abord produits.

Représentons-nous un faisceau de lumière, polarisée dans un azimut quelconque, tombant à la surface d'un milieu transparent. Soient S^2 l'intensité de la composante de ce faisceau suivant le plan d'incidence, P^2 l'intensité de la composante perpendiculaire à ce plan. Décomposons pareillement la lumière réfléchie (R^2) en deux parties R_s^2, R_p^2, et la lumière réfractée (T^2) en deux parties T_s^2, T_p^2. R_s^2, T_s^2 sont polarisées suivant le plan d'incidence; R_p^2, T_p^2 perpendiculairement au même plan. Ces composantes satisfont aux égalités

$$R^2 = R_s^2 + R_p^2, \qquad T^2 = T_s^2 + T_p^2,$$

et, en appelant 1 l'intensité de la lumière incidente,

$$S^2 + P^2 = 1.$$

Les formules principales de la théorie de Fresnel sont les suivantes :

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
&(1)\quad R_s^2 = \left[\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}\right]^2 S^2,\\
&(2)\quad R_p^2 = \left[\frac{\operatorname{tang}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tang}(\varphi + \varphi')}\right]^2 P^2,\\
&(3)\quad T_s^2 = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')} S^2,\\
&(4)\quad T_p^2 = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')\cos^2(\varphi - \varphi')} P^2.
\end{aligned}\right.$$

φ désigne l'angle d'incidence, φ' l'angle de réfraction.

On a vérifié la justesse de ces expressions de plusieurs manières.

1. Par des expériences très-précises sur l'angle de polarisation, Seebeck a mis hors de doute la loi de Brewster, qui elle-même est une conséquence de la formule (2). En posant $R_p = 0$, on déduit $\operatorname{tang} \varphi = n$, n étant l'indice de réfraction de la substance.

2. De très-nombreuses expériences sur la rotation du plan de polarisation par réflexion ont été faites par Fresnel (*Pogg. Ann.*, Bd. XXII), et surtout par Brewster

Pogg. Ann., Bd. XIX). La tangente de l'azimut du plan de polarisation dévié par réflexion est

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\frac{P}{S};$$

$\frac{P}{S}$ désigne la tangente de l'azimut du plan de polarisation du rayon incident.

3. Brewster a fait pareillement des observations sur l'azimut du plan de polarisation dans le rayon réfracté (*Pogg. Ann.*, Bd. XIX).

Elles ont donné pour cet azimut

$$\frac{T_p}{T_s} = \frac{1}{\cos(\varphi-\varphi')}\frac{P}{S}.$$

4. M. Arago a fait deux observations directes sur l'intensité de la lumière réfléchie non polarisée. Elles sont relatives aux angles d'incidence pour lesquels la réflexion donne le *tiers* et le *quart* de la lumière incidente.

Dans le cas de la lumière non polarisée, quand

$$S^2 + P^2 = 1,$$

on doit poser

$$S^2 = P^2 = \tfrac{1}{2},$$

et l'intensité que présente la lumière naturelle réfléchie est

$$R_s^2 + R_p^2 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\varphi-\varphi')}{\sin^2(\varphi+\varphi')} + \frac{\text{tang}^2(\varphi-\varphi')}{\text{tang}^2(\varphi+\varphi')}\right].$$

Toutes ces observations s'accordent si complétement avec les formules ci-dessus rapportées, qu'on ne peut douter que ces formules n'en expriment les véritables lois, autant du moins que la conception d'un milieu transparent peut se trouver réalisée dans la nature.

On doit surtout attacher une grande importance aux observations de Fresnel et de Brewster, citées n^os^ **2** et **3**, non pas tant à cause de leur étendue, qu'à cause de la preuve directe qu'elles apportent de l'exactitude des formules (A). Chacune de ces séries d'observations vérifie seulement, il est vrai, l'exactitude des rapports $\frac{R_s}{R_p}$, $\frac{T_s}{T_p}$; mais, prises ensemble, elles prouvent l'exactitude des valeurs absolues R_s, R_p, T_s, T_p.

L'observation a donné les angles que les plans de polarisation de la lumière réfléchie et de la lumière réfractée font avec le plan d'incidence. On peut déduire de leurs valeurs l'intensité de la lumière réfléchie aussi bien que celle de la lumière réfractée pour le cas où le rayon incident déjà polarisé tombe à la surface d'un milieu transparent non cristallisé. L'hypothèse d'un corps transparent non cristallisé donne, en effet,

$$T_s^2 = S^2 - R_s^2, \quad \text{et} \quad T_p^2 = P^2 - R_p^2,$$

d'où l'on tire, en désignant par α et β les azimuts observés des plans de polarisation du rayon réfléchi et du rayon réfracté,

$$\frac{R_p}{R_s} = \text{tang}\,\alpha, \quad \frac{P^2 - R_p^2}{S^2 - R_s^2} = \text{tang}^2\,\beta.$$

R_p^2, R_s^2 seront par-là déterminés.

Une théorie de la réflexion et de la réfraction qui ne donne pas pour les intensités des rayons lumineux les valeurs que les hypothèses rationnelles de Fresnel ont fournies en (A) doit être abandonnée; mais une théorie qui se résume dans les mêmes formules doit être regardée comme déjà confirmée.

§ II.

Les hypothèses que j'adopte et sur lesquelles je fonde la nouvelle théorie sont les suivantes.

1. La différence des vitesses de propagation de la lumière dans différents milieux, ou la réfraction de la lumière, résulte uniquement d'une inégale élasticité de l'éther dans ces milieux ; la densité de l'éther est dans tous la même. Dans la théorie de Fresnel, il est essentiel d'admettre dans tous les milieux transparents non cristallisés une élasticité uniforme, et de faire dépendre la réfringence d'une densité variable. Une de ces deux suppositions est indispensable ; on ne peut supposer (le principe posé n° 5 de ce paragraphe le fera clairement comprendre) que l'élasticité et la densité varient ensemble, si, comme l'observation paraît l'apprendre, les phénomènes de la réflexion et de la réfraction dans les corps transparents ne sont dépendants que de l'indice de réfraction de ces milieux. Mais on doit se décider pour l'une ou pour l'autre, et l'incertitude me semble difficile. On peut bien, dans les milieux cristallisés, se figurer une élasticité variable suivant les directions, mais une densité variable?... Ces principes ne regardent, au reste, que les milieux à transparence parfaite; rien ne nous dit que, dans les métaux et les autres corps à transparence incomplète, la variation de densité n'accompagne pas la variation d'élasticité.

2. La lumière incidente résulte de vibrations transversales : ce sont des vibrations de la même espèce qui produisent la réflexion et la réfraction.

3. La direction de ces mouvements vibratoires est partout, dans les milieux cristallisés comme dans les autres, comprise dans le plan de l'onde.

Ces deux hypothèses sont empruntées à la théorie de Fresnel. La première sert de base à sa théorie, si souvent citée, des intensités de la lumière; la seconde se déduit comme un resultat de sa théorie de la double refraction. D'après la theorie de la double refraction que j'ai donnee, les molécules oscilleraient suivant une direction légèrement inclinée à la surface de l'onde.

4. Le plan de polarisation d'une onde est determiné par la normale à cette onde et

par la direction de son mouvement. Cette définition, contraire à la définition de Fresnel, est une conséquence forcée de mes recherches sur la double réfraction. (*Pogg. Ann.*, Bd. XXV.)

J'appelle plan de polarisation d'un rayon le plan conduit par ce rayon et par la direction du mouvement de ses éléments. Je prouverai plus tard que le rayon est toujours perpendiculaire à la direction du mouvement de ses molécules.

5. Touchant la réflexion et la réfraction à la surface des corps complétement transparents, je m'appuie sur les considérations qui suivent.

A. Soit AB, *fig.* 1re, une onde incidente à la limite commune GG de deux milieux transparents que, pour plus de généralité, je prendrai cristallisés; BC représentant l'onde réfractée, BD l'onde réfléchie. Ces trois plans d'ondes coupent le plan réfringent GG suivant la même droite. Chacune de ces trois ondes AB, BC, BD se propage parallèlement à elle-même avec une vitesse propre qui dépend de la direction de son plan de polarisation, et de sa position par rapport à l'axe optique. J'indique par des lignes ponctuées une quelconque des positions que prennent ces plans dans leur mouvement de progression; *ils sont liés entre eux de manière à atteindre en même temps le point* B'. Cette condition détermine la position relative des trois plans de ce système. En effet, soient l'angle d'incidence du plan d'ondes ABG $= i$, l'angle de réflexion DBG $= r$ et l'angle de réfraction CBG $= s$, les vitesses de propagation respectives n, m et u; la condition que le point B, quel que soit le plan d'ondes auquel il appartienne, se meuve avec une vitesse identique, est exprimée par les deux équations

$$\frac{1}{n}\sin i = \frac{1}{m}\sin r, \quad \frac{1}{n}\sin i = \frac{1}{u}\sin s.$$

Les quantités n, m et u dépendent des positions des plans d'onde auxquels elles conviennent, et sont par conséquent, pour des plans de réfringence et d'incidence déterminés, des fonctions connues des angles i, r et s qui fixent la position des plans d'onde. De ces deux équations, une donne l'angle r, l'autre l'angle s. En y mettant à la place de n, m et u les valeurs données par Fresnel en fonction des angles i, r, s, chacune d'elles conduit à une équation du 4e degré. Nous verrons que la première a deux racines négatives par le moyen desquelles on déterminera deux plans d'ondes réfléchies; la seconde, deux racines positives qui correspondront au système des deux ondes réfractées.

B. Toutes les molécules des mêmes ondes ont le même mouvement, tant en vitesse qu'en direction; cette uniformité dans l'intérieur de chaque onde s'étend jusqu'à la ligne d'intersection des différents plans en B. Le mouvement des molécules en B est la somme des mouvements qui leur sont communiqués par les ondes du premier milieu, l'onde incidente, l'onde réfléchie, ou la somme des mouvements produits par les ondes du second milieu, les ondes réfractées. Ces deux sommes sont égales. *Les composantes du mouvement imprimé aux molécules en* B *par l'onde incidente et l'onde réfléchie sont égales aux composantes du mouvement imprimé aux mêmes molécules par les ondes ré-*

fractées. Fresnel admettait seulement l'égalité des deux composantes parallèles au plan de réfringence. L'hypothèse que je fais s'appuie sur la considération suivante.

Quand, à l'aide des équations de la Mécanique, on veut résoudre rigoureusement le problème de la réflexion et de réfraction des ondes lumineuses à la surface de séparation de deux milieux transparents, on est forcé de poser les deux conditions suivantes, qui déterminent l'état de la limite commune des deux milieux : 1° que, suivant cette surface, ces deux milieux sont intimement unis ; 2° que la pression produite par le mouvement des molécules en B dans l'un d'eux est égale à la pression produite par le même déplacement dans l'autre. Ces deux principes servent à établir six équations de condition au moyen desquelles on détermine les fonctions arbitraires comprises dans l'intégrale générale. La première de ces deux conditions, que les deux milieux sont solidaires à leur limite commune, combinée avec l'hypothèse d'un mouvement commun à toutes les molécules d'un même plan d'onde, est exactement la supposition que j'ai faite ; car de l'égalité des vitesses des molécules en B suit l'égalité de leurs déplacements.

6. La force vive que possède l'onde incidente est égale à la somme des forces vives de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée.

Fresnel avait déjà fait usage du même principe, et j'avoue que, du côté théorique, ce principe peut être contesté ; car on ne comprend pas comment une partie de la force vive de l'onde incidente n'est pas dépensée à produire des ondes à vibrations longitudinales dont l'effet optique est nul : une partie de la lumière devrait donc toujours disparaître, puisque son intensité est mesurée par la force vive des ondes à vibrations transversales, et qu'il n'existe, à proprement parler, aucun corps complétement transparent. Ce principe ne peut donc être adopté qu'à la suite des expériences qui prouvent qu'il y a effectivement des corps pour lesquels l'intensité de la lumière incidente est égale à la somme des intensités que possèdent la lumière réfléchie et la lumière réfractée.

§ III.

Je vais appliquer, dans ce paragraphe, les principes que je viens de développer au cas où le milieu réfléchissant et réfringent n'est pas cristallisé. La lumière incidente peut être polarisée ou ne pas l'être, mais on peut toujours la supposer décomposée en deux parties, l'une qui est polarisée suivant le plan d'incidence, l'autre qui s'est polarisée perpendiculairement au même plan. La première produit une onde réfléchie et une onde réfractée qui sont encore polarisées suivant le plan d'incidence ; la seconde donne à la réflexion comme à la réfraction, des ondes polarisées perpendiculairement au plan d'incidence. Ces deux portions de lumière peuvent être considérées séparément. Je m'occuperai d'abord de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. Soient AB, *fig.* 2, une onde plane incidente, polarisée perpendiculairement au plan d'incidence ; FB l'onde réfléchie, BD l'onde réfractée : dans ces trois ondes le mouvement s'opère parallèlement au plan réfringent. Les vitesses de mouvement seront respectivement, dans l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée, désignées par P, R_p, D_p. On a alors, par le principe de l'égalité des composantes, § II, n° 5, B,

$$P + R_p = D_p. \tag{1}$$

L'équation de la conservation des forces vives fournira une seconde relation pour déterminer R_p et D_p. A cause de l'égalité de densité, § II, n° 1, on peut, dans l'équation des forces vives, prendre les produits des vitesses au carré par les rapports des espaces qu'ébranlent les mouvements d'une même ondulation dans les trois ondes. Les rapports de ces trois espaces sont, si l'on désigne par d et d' les longueurs d'ondulation dans le milieu où se meut l'onde incidente et dans le milieu où elle se réfracte,

$$AC \times d : BF \times d : BD \times d'.$$

Mais AC = BF, et, si l'on désigne par φ l'angle d'incidence CAB, et par φ' l'angle de réfraction ABD, on a

$$AC : BD = \cos\varphi : \cos\varphi'.$$

D'ailleurs

$$d : d' :: \sin\varphi : \sin\varphi';$$

donc, pour les rapports des trois espaces, il vient

$$\sin\varphi\cos\varphi : \sin\varphi\cos\varphi : \sin\varphi'\cos\varphi' :: 1 : 1 : \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

L'équation donnée par le principe de la conservation des forces vives est donc

$$P^2 = R_p^2 + D_p^2\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{2}$$

Si l'on fait passer R_p^2 dans le premier membre, et si l'on divise cette équation par (1), on obtient

$$P - R_p = D_p\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation, réunie à l'équation (1), nous donne

$$R_p = P\frac{\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi'} = P\frac{\operatorname{tang}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')},$$

$$D_p = \frac{2P\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Si l'on désigne par P^2 l'intensité de la lumière incidente, R_p^2 sera l'intensité de la lumière réfléchie, et $D_p^2\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}$ l'intensité de la lumière réfractée; on aura donc, en posant $D_p^2\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi} = T_p^2$,

$$\left\{\begin{aligned} R_p^2 &= P^2\frac{\operatorname{tang}^2(\varphi-\varphi')}{\operatorname{tang}^2(\varphi+\varphi')},\\ T_p^2 &= P^2\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos^2(\varphi-\varphi')}.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ce sont les formules que j'ai rappelées au § I[er] (A), et dont la justesse a été démontrée.

Soit l'onde incidente AC polarisée parallèlement au plan d'incidence. Le mouvement de cette onde, aussi bien que les mouvements de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée, se feront parallèlement au plan d'incidence. Les vitesses de ces mouvements dans l'onde incidente, dans l'onde réfléchie et dans l'onde réfractée, seront respectivement S, R_s, D_s. La conservation des forces vives donne l'équation

$$(4) \qquad S^2 = R_s^2 + D_s^2 \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Si l'on imagine les mouvements S, R_s, D_s, décomposés suivant des directions parallèle et perpendiculaire au plan de réfringence, on déduit du principe de l'égalité des composantes les deux équations qui suivent :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S \sin\varphi + R_s \sin\varphi = D_s \sin\varphi', \\ S \cos\varphi - R_s \cos\varphi = D_s \cos\varphi'. \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi trois équations et seulement deux inconnues R_s et D_s ; mais on voit facilement que la troisième équation est une conséquence des deux autres, et qu'elle n'exprime rien de contradictoire. On doit être porté à voir, dans cette circonstance, une confirmation des considérations développées au § II, savoir, qu'une transparence complète ne peut exister sans une densité uniforme dans les deux milieux vibrants, car l'équation de la conservation des forces vives serait tout autre si la densité changeait.

Des équations (5) on tire

$$R_s = - S \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}, \quad D_s = 2S \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')},$$

et si l'on désigne encore $D_s^2 \dfrac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin\varphi \cos\varphi}$ par T_s^2,

$$R_s^2 = - S \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}, \quad T_s^2 = S^2 \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')},$$

valeurs qui sont identiques avec celles que j'ai citées au § I[er] (A).

La nouvelle théorie donne donc les valeurs vraies des intensités que possèdent la lumière réfléchie et la lumière réfractée à la limite commune de deux corps transparents non cristallisés.

§ IV.

Je vais présentement appliquer les mêmes principes au cas où la réflexion et la réfraction se passent à la surface de séparation d'un milieu non cristallisé et d'un milieu cristallisé à un axe. Je développerai d'abord quelques relations générales, en partie connues, qui trouveront leur emploi dans la suite.

La position des différentes lignes et des différents plans doit être exprimée par les angles que forment ces divers éléments avec les trois axes rectangulaires d'élasticité du milieu cristallin à la surface duquel ont lieu les phénomènes de réflexion et de réfraction.

Soient A, B, C les cosinus des angles que la normale à la surface réfringente fait avec ces axes.

Les normales aux ondes planes, incidente, réfléchie, réfractée ordinairement, réfractée extraordinairement, auront respectivement pour cosinus a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''.

La normale au plan d'incidence sera fixée par les angles dont les cosinus sont

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3;$$

la trace du plan d'incidence sur le plan réfringent par

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3;$$

la *ligne principale* du plan réfringent par

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3;$$

les angles que le plan réfringent fait avec l'onde plane incidente, l'onde réfractée ordinairement, et l'onde réfractée extraordinairement, seront

$$\varphi, \quad \varphi', \quad \varphi''.$$

L'angle que la ligne principale (H_1, H_2, H_3) forme avec la trace du plan d'incidence et du plan réfringent (F_1, F_2, F_3), c'est-à-dire l'azimut du plan d'incidence, sera désigné par ω. Enfin soient μ', μ'' les vitesses de propagation de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire, la vitesse de propagation dans le milieu environnant non cristallisé étant $= 1$.

Pour déterminer E_1, E_2, E_3, on a

$$E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 1,$$

et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} AE_1 + BE_2 + CE_3 &= 0, \\ aE_1 + bE_2 + cE_3 &= 0; \end{aligned} \right.$$

pour F_1, F_2, F_3, on a

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1,$$

et

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} AF_1 + BF_2 + CF_3 &= 0, \\ E_1F_1 + E_2F_2 + E_3F_3 &= 0; \end{aligned} \right.$$

pour la détermination de H_1, H_2, H_3, on a

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = 1,$$

et

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} AH_1 + BH_2 + CH_3 &= 0, \\ XH_1 + YH_2 + ZH_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

X, Y, Z désignent les cosinus de la normale au plan qui est mené par la ligne principale perpendiculairement au plan de réfringence; ils sont définis par les équations

$$(4)\qquad X^2 + Y^2 = 1, \quad Z = 0, \quad AX + BY = 0.$$

Pour les angles φ et ω, enfin, on a

$$(5)\qquad \cos\varphi = Aa + Bb + Cc,$$

$$(6)\qquad \cos\omega = H_1F_1 + H_2F_2 + H_3F_3.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), (4) on peut exprimer F_1, F_2, F_3, et H_1, H_2, H_3, au moyen de a, b, c, et, en portant ces valeurs dans l'équation (6), qu'on combinera avec l'équation (5), exprimer a, b, c par les angles φ et ω, en observant la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Pour éviter les longueurs, on peut supposer $B = 0$, car dans les cristaux optiques à un axe, il n'y a qu'une seule des directions des axes d'élasticité qui soit déterminée.

Il vient alors

$$(7)\qquad \begin{cases} a = A\cos\varphi - C\sin\varphi\cos\omega, \\ b = \sin\varphi\sin\omega, \\ c = C\cos\varphi + A\sin\varphi\cos\omega; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} F_1 = C\cos\omega, \\ F_2 = -\sin\omega, \\ F_3 = -A\cos\omega; \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} E_1 = C\sin\omega, \\ E_2 = \cos\omega, \\ E_3 = -A\sin\omega. \end{cases}$$

On obtient les valeurs des cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' en changeant dans l'équation (7) φ en $-\varphi$, φ', φ'', les normales que ces cosinus déterminent étant toutes placées dans le plan des normales fixées par A, B, C et a, b, c, c'est-à-dire dans le plan d'incidence.

Soient G_1, G_2, G_3 les cosinus des angles que la trace du plan de l'onde incidente sur le plan d'incidence fait avec les trois axes d'élasticité, et I_1, I_2, I_3 les cosinus des angles de la ligne commune au plan d'incidence et à l'onde réfléchie avec les mêmes axes; on a

$$aG_1 + bG_2 + cG_3 = 0,$$

$$E_1G_1 + E_2G_2 + E_3G_3 = 0,$$

et

$$\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3 = 0,$$

$$E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 = 0.$$

On déduit de là, en mettant pour a, b, c, α, β, γ, E_1, E_2, E_3, leurs valeurs tirées des équations (7) et (9),

$$(10)\qquad \begin{cases} G_1 = A\sin\varphi + C\cos\varphi\cos\omega, \\ G_2 = -\cos\varphi\sin\omega, \\ G_3 = C\sin\varphi - A\cos\varphi\cos\omega; \end{cases}$$

et

$$(11)\qquad \begin{cases} I_1 = A\sin\varphi - C\cos\varphi\cos\omega, \\ I_2 = \cos\varphi\cos\omega, \\ I_3 = C\sin\varphi + A\cos\varphi\cos\omega. \end{cases}$$

Pour exprimer φ' et φ'' au moyen de φ, on a

$$\mu' \sin\varphi = \sin\varphi', \quad \text{et} \quad \mu'' \sin\varphi = \sin\varphi'',$$

équations dans lesquelles μ' est une constante μ, exprimant la valeur commune des vitesses de propagation des deux systèmes d'ondes, quand tous les deux sont perpendiculaires à l'axe. La première équation ne réclame donc aucune étude ultérieure. Quant à μ'', c'est une fonction de l'angle que la normale à l'onde extraordinaire fait avec l'axe, c'est-à-dire une fonction de γ'' que voici d'ailleurs,

$$(12) \qquad \mu''^2 = \pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)\gamma''^2:$$

π désigne la vitesse de propagation de l'onde extraordinaire, quand elle est parallèle à l'axe. Pour déterminer φ'' on a ainsi, en remplaçant γ'' par sa valeur exprimée en φ'', l'équation suivante

$$(13) \qquad \sin^2\varphi\,[\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)(\mathrm{C}\cos\varphi'' + \mathrm{A}\sin\varphi''\cos\omega)^2] = \sin^2\varphi''.$$

La racine positive de cette équation du deuxième degré convient à la question qui nous occupe; quant à la racine négative, elle n'a de signification que pour la réflexion à l'intérieur d'un milieu cristallin.

Il faut encore trouver les directions du mouvement dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire.

Soient R'_a, R'_b, R'_c les cosinus des angles que la direction du mouvement ordinaire fait avec les axes d'élasticité; R''_a, R''_b, R''_c les cosinus des angles que la direction du mouvement extraordinaire fait avec les mêmes axes.

La direction désignée par R'_a, R'_b, R'_c est l'intersection du plan d'ondes, dont la normale a pour cosinus α', β', γ', avec le plan mené par cette normale et par l'axe; l'autre direction, indiquée par R''_a, R''_b, R''_c, est perpendiculaire au plan mené par l'axe et par la normale dont les cosinus sont α'', β'', γ''.

Cette dernière direction doit donc satisfaire aux conditions

$$\alpha''\mathrm{R}''_a + \beta''\mathrm{R}''_b + \gamma''\mathrm{R}''_c = 0, \quad \mathrm{R}''_c = 0,$$

ou

$$(14) \qquad \mathrm{R}''_a = \frac{\beta''}{\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}}, \quad \mathrm{R}''_b = -\frac{\alpha''}{\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}}, \quad \mathrm{R}''_c = 0.$$

On obtient les cosinus de la normale au plan conduit par $(\alpha', \beta', \gamma')$ et l'axe, en remplaçant α'', β'' par α', β'. On a ainsi

$$\alpha'\mathrm{R}'_a + \beta'\mathrm{R}'_b + \gamma'\mathrm{R}'_c = 0,$$
$$\beta'\mathrm{R}'_a - \alpha'\mathrm{R}'_b = 0,$$

d'où

$$(15) \qquad \mathrm{R}'_a = \frac{\alpha'\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}, \quad \mathrm{R}'_b = \frac{\beta'\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}, \quad \mathrm{R}'_c = -\frac{\alpha'^2 + \beta'^2}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}.$$

De la position donnée du plan d'ondes, on doit déduire la direction du rayon qui lui appartient. Pour l'onde plane ordinaire le rayon est dirigé suivant la normale à cette onde; pour l'onde extraordinaire le rayon a la direction du rayon vecteur mené du centre de l'ellipsoïde

$$\mu^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \pi^2 z^2 = \mu^2 \pi^2,$$

dont l'ordonnée z est parallèle à l'axe optique, au point où cette surface est touchée par le plan de l'onde. L'équation de ce plan est

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0.$$

Le rayon vecteur, mené au point de contact, forme avec les trois axes des angles dont les cosinus sont $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$; sa direction est donnée par les équations

$$x = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}} z, \quad y = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}} z.$$

Pour le point de contact commun à l'ellipsoïde et au plan, à l'extrémité de ce rayon vecteur, on a

$$-\frac{dx}{dz} = +\frac{\pi^2}{\mu^2}\frac{z}{x} = +\frac{\gamma''}{\alpha''},$$

$$-\frac{dy}{dz} = +\frac{\pi^2}{\mu^2}\frac{z}{y} = +\frac{\gamma''}{\beta''};$$

tirant de là les valeurs de $\frac{x}{z}$ et de $\frac{y}{z}$, et les portant dans les equations qui précèdent, et observant que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1$, on trouve

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{\pi^2 \alpha'}{\mathrm{T}}, \\ \mathrm{Y} &= \frac{\pi^2 \beta'}{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{T} = \sqrt{\alpha''^2 \pi^4 + \beta''^2 \pi^4 + \gamma''^2 \mu^4}. \\ \mathrm{Z} &= \frac{\mu^2 \gamma'}{\mathrm{T}}; \end{aligned} \right.$$

si l'on appelle ω'' l'azimut de ce rayon par rapport au plan d'incidence, et δ'' son inclinaison sur la normale au plan réfringent,

$$(17) \qquad \operatorname{tang} \omega'' = \frac{\mathrm{A}\gamma' \sin \omega \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2}}{\sin \varphi' + \mathrm{A}\gamma'' \cos \omega \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2}},$$

$$(18) \qquad \cos \delta'' = \frac{\cos \varphi' + \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2} \mathrm{C}\gamma'}{\sqrt{1 + \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2} \gamma'^2}}.$$

§ V.

Nous allons présentement former les équations qui résultent du principe de l'égalite des composantes. Le plan d'incidence est à l'azimut ω; l'angle d'incidence est φ, les angles de réfraction sont φ' et φ''. Soient ensuite S la vitesse du mouvement dans la lumière incidente, parallèlement au plan d'incidence; P perpendiculairement au même plan; R_s, R_p les deux composantes correspondantes dans la lumière réfléchie; D' la vitesse du mouvement dans l'onde ordinaire; D'' la quantité analogue dans l'onde extraordinaire. Nous décomposons ces six mouvements dans leurs composantes parallèles aux trois axes coordonnés, et nous obtenons, par le principe susnommé, les trois équations

$$
\begin{aligned}
PE_1 + SG_1 + R_pE_1 + R_sI_1 &= D'R'_a + D''R''_a,\\
PE_2 + SG_2 + R_pE_2 + R_sI_2 &= D'R'_b + D''R''_b,\\
PE_3 + SG_3 + R_pE_3 + R_sI_3 &= D'R'_c + D''R''_c.
\end{aligned}
$$

Si l'on multiplie la première, la seconde et la troisième de ces equations, d'abord par E_1, E_2, E_3, puis par F_1, F_2, F_3, et enfin par A, $B = 0$, C, et qu'à chaque fois on ajoute les trois produits, en ayant égard aux relations

$$
\begin{aligned}
&F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3 = \cos\varphi = F_1I_1 + F_2I_2 + F_3I_3,\\
\text{et}\quad &AG_1 + CG_3 = \sin\varphi = -(AI_1 + CI_3),
\end{aligned}
$$

on transforme ces trois équations dans les trois suivantes

$$
(1)\quad\left\{
\begin{aligned}
P + R_p &= D'(R'_aE_1 + R'_bE_2 + R'_cE_3) + D''(R''_aE_1 + R''_bE_2 + R''_cE_3),\\
(S + R_s)\cos\varphi &= D'(R'_aF_1 + R'_bF_2 + R'_cF_3) + D''(R''_aF_1 + R''_bF_2 + R''_cF_3),\\
(S - R_s)\sin\varphi &= D'(R'_aA + R'_cC) + D''(R''_aA + R''_cC).
\end{aligned}
\right.
$$

Si des équations (13), (12), (8), (7) du précédent paragraphe on déduit les valeurs de R'_a, $R''_a,\ldots$, $E_1,\ldots$, $F_1,\ldots$, et qu'à la place de α', β', γ', α'', β'', γ'' on mette les valeurs qui se déduisent des équations (6), § IV, quand dans ces équations on substitue à φ les angles φ' et φ'', on trouve, après réductions convenables,

$$
(2)\quad\left\{
\begin{aligned}
R'_aE_1 + R'_bE_2 + R'_cE_3 &= -\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}},\\
R''_aE_1 + R''_bE_2 + R''_cE_3 &= \frac{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
R'_aF_1 + R'_bF_2 + R'_cF_3 &= -\frac{\cos\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}},\\
R''_aF_1 + R''_bF_2 + R''_cF_3 &= -\frac{A\cos\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
R'_aA + R'_cC &= -\frac{\sin\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}},\\
R''_aA + R''_cC &= \frac{A\sin\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Par là les équations (1) se changent dans les suivantes

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&a. \quad P - R_p = + D' \frac{A \sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{C \sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
&b. \quad (S - R)\cos\varphi = - D' \frac{\cos\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{A\cos\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
&c. \quad (S + R)\sin\varphi = - D' \frac{\sin\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{A\sin\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je vais actuellement développer l'équation qui se déduit du principe de la conservation des forces vives, et dans ce but chercher d'abord le rapport d'un volume de l'onde incidente aux volumes des ondes réfléchie et réfractée qui se partagent, après la réflexion et la réfraction, la vitesse du premier.

Soient, *fig.* 3, *ab* l'intersection d'un plan d'ondes avec le plan d'incidence qui est le plan de la figure, et AB l'intersection du plan consécutif avec le même plan; qu'on imagine en *a* une ligne perpendiculaire au plan d'incidence, figurant l'intersection de l'onde incidente avec la surface réfringente, et qu'on suppose cette ligne prolongee en *a'*. Les trois lignes *ab*, *a*A, *aa'* représenteront les trois côtés d'un parallélipipède rectangle égal au volume primitif de l'onde incidente auquel nous cherchons à comparer les volumes qui reçoivent les vitesses du premier dans les ondes réfractées et dans l'onde réfléchie.

Les extrémités des côtés du parallélipipède primitif parallèles à *aa'*, et partant des points A, B, *b*, sont désignées par A', B', *b'*. Le côté B*b* rencontre en C le plan réfringent; le côté B'*b'* en C'.

D'après l'hypothèse que les ondes incidentes se meuvent dans un milieu non cristallisé, je n'aurai à déterminer que le volume de l'onde réfractée extraordinairement; car le volume de l'onde ordinaire se déterminera comme dans un milieu non cristallise, et le volume de l'onde réfléchie est égal au volume de l'onde incidente. Soient CD le plan des ondes extraordinairement réfractées qui correspond à AB, et *cd* celui qui dérive de *ab*; toutes les vitesses qui proviennent du parallélipipède primitif A*aa'* sont renfermées entre les deux plans CD et *cd*, dont l'écartement, mesuré sur la normale *a*H, est G*g*. Soient *a*S et CT les rayons appartenant à ces plans d'ondes, savoir, *a*S rayon réfracté de *a*E, et CT rayon réfracté de CF. Ces rayons réfractés ne sont pas en général dans le plan de la figure, c'est-à-dire dans le plan d'incidence; les lettres D, *d*, *c* dans la figure doivent se rapporter à l'intersection réelle du plan des ondes avec les rayons *a*S et CT. Figurons-nous, en outre, par les points *a'*, C', deux autres rayons parallèles à *a*E et CF, *a'*E', C'F', et représentons les rayons réfractés qui leur correspondent par *a'*S', C'T', et par D', *d'*, *c'* leurs intersections avec l'onde. Les mouvements qui ont lieu d'abord dans le prisme rectangulaire AB*ab* A'B'*a' b'* passent dans un prisme oblique CD*cd*C'D'*c'd'*; le rapport de ces deux prismes est donc le rapport des deux volumes qui se correspondent dans l'onde incidente et dans l'onde extraordinairement réfractée.

Pour déterminer la capacité du prisme C′DD′d, nous allons calculer l'aire de la base CC′DD′; cette base est figurée *fig.* 4, et désignée par les lettres qui lui conviennent; G est le pied d'une perpendiculaire à cette base abaissée de a, et G′ le pied d'une normale menée de a'. Désignons par W l'aire de cette base, par ψ l'angle DGC; l'angle DCG par ξ et la ligne CC′ par a. aC étant $= 1$,

$$GC' = \cos\varphi'', \quad aG = \sin\varphi''.$$

L'angle que le rayon aD fait avec la normale aG étant q, on a

$$GD = \sin\varphi'' \operatorname{tang} q,$$

et

$$W = DC \times CC' \times \cos\xi = a\cos\xi \times CD;$$

mais

$$CD\cos\xi = CG - GD\cos\psi = \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q\cos\psi:$$

d'où

$$(4) \qquad W = a(\cos\varphi'' - \sin\varphi''\cos\psi \operatorname{tang} q).$$

On doit, dans cette équation, à la place de tang q, substituer sa valeur.

Les cosinus des angles que le rayon forme avec les trois axes coordonnés ont été désignés, (16), § IV, par X, Y, Z, et les cosinus de la normale à l'onde par α'', β'', γ''.

$$\cos q = \alpha''X + \beta''Y + \gamma''Z,$$

et, en substituant pour X, Y, Z, leurs valeurs tirées de (16), § IV,

$$\cos q = \frac{\pi^2\alpha''^2 + \pi^2\beta''^2 + \mu^2\gamma''^2}{\sqrt{\pi^4\alpha''^2 + \pi^4\beta''^2 + \mu^4\gamma''^2}} = \frac{\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)\gamma''^2}{\sqrt{\pi^4 + (\mu^4 - \pi^4)\gamma''^2}},$$

par conséquent

$$(5) \qquad \operatorname{tang} q = + \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''\sqrt{1 - \gamma''^2}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}.$$

Au lieu de prendre le double signe, on ne prend que le signe déterminé +, parce que, dans les cristaux à un axe, tang q a toujours une valeur positive, en admettant, comme pour le spath calcaire, que l'axe de l'ellipsoïde optique est le plus petit rayon de cet ellipsoïde. Pour l'uniformité, nous admettrons toujours cette hypothèse dans la discussion sur le choix des signes.

De plus, on doit substituer dans l'expression de W la valeur de cos ψ; ψ est l'angle que le plan d'incidence fait avec le plan déterminé par la normale à l'onde et la direction du rayon. Ce dernier plan forme, avec les trois axes coordonnes x, y, z, des angles dont les sinus sont $\pm \frac{\beta''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$, $\mp \frac{\alpha''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$, 0; quant aux sinus des angles du plan d'incidence avec les trois axes, nous les avons désignés ci-dessus par E_1, E_2, E_3. En employant ces différentes valeurs, on obtient, pour cos ψ,

$$\cos\psi = \frac{\pm E_1\beta'' \mp E_2\alpha''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}},$$

et en substituant les valeurs de E_1, E_2, tirées du § IV (9),

$$\cos\psi = \frac{\pm C\beta''\sin\omega \mp \alpha''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.$$

Pour décider le choix du signe, posons $\omega = 0$, ce qui nous donne

$$\cos\psi = \frac{\mp\alpha''}{\sqrt{1-\gamma''^2}},$$

et en remplaçant α'' et γ'' par leurs valeurs (7), § IV,

$$\cos\psi = \frac{\mp\sin(\lambda-\varphi'')}{+\sqrt{\sin^2(\lambda-\varphi'')}}.$$

Dans cette équation on a posé $A = \sin\lambda$, $C = \cos\lambda$, ce qui donne $90° - \lambda$ pour l'inclinaison du plan réfringent sur l'axe optique.

Si l'on prend maintenant, comme cela est déjà indiqué par la formule (3), l'angle $\psi = 0$, dans le cas où le rayon forme avec la normale au plan de réfringence un plus grand angle que la normale au plan d'ondes avec la même ligne, et inversement $\psi = 180°$ quand le rayon fait avec la normale un angle plus petit, on doit, puisque dans le premier cas λ est plus petit que φ'', et dans le second cas λ est plus grand que φ'', prendre le signe supérieur. On a, par conséquent,

$$\cos\psi = \frac{+C\beta''\sin\omega - \alpha''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.$$

En mettant dans cette équation les valeurs que l'on déduit de l'équation (7), § IV, en y changeant φ en φ'', on trouve

$$\cos\psi\sqrt{1-\gamma''^2} = C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega,$$

et par suite

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\cos\psi\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi'' &= +C - (C\cos\varphi'' + A\sin\varphi''\cos\omega)\cos\varphi''\\ &= +C - \gamma''\cos\varphi''.\end{aligned}\right.$$

Portant, dans l'équation (4), la valeur de tang q (5), on aura

$$W = a\left[\cos\varphi'' - \sin\varphi\;\frac{\cos\psi\,\gamma''\sqrt{1-\gamma''^2}\,(\pi^2-\mu^2)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}\right];$$

mettant dans W, au lieu de $\cos\psi\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi''$, sa valeur (6), on obtiendra

$$(7)\quad W = a\left[\cos\varphi'' - \frac{\gamma''(C-\gamma''\cos\varphi'')(\pi^2-\mu^2)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}\right].$$

Le volume du prisme oblique CC′DD′, que je désignerai par Z″, est donc, Gg représentant la hauteur de ce prisme,

$$Z'' = Gg \times W.$$

Or, cette hauteur Gg est à la hauteur Aa du prisme rectangulaire correspondant AA′Ca de l'onde incidente dans le rapport de la vitesse μ'' à la vitesse V.

La hauteur Aa étant représentée par H, on a

$$Gg = \frac{\mu''}{V} H = \frac{\sin\varphi''}{\sin\varphi} H,$$

et l'on obtient enfin, pour la solidité du prisme,

$$(8) \qquad Z'' = aH \frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sin\varphi}\left[1 - (\pi^2 - \mu^2)\frac{\gamma''\left(\dfrac{C}{\cos\varphi''} - \gamma'\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}\right].$$

Telle est l'expression du volume ébranlé dans l'onde extraordinaire; le volume correspondant dans l'onde ordinaire sera désigné par Z′, et le volume dans l'onde réfléchie, qui est égal au volume dans l'onde incidente, par Z. On obtient ces volumes en posant dans l'équation (8) $\pi^2 - \mu^2 = 0$, et changeant successivement φ'' en φ' pour obtenir Z′, et φ'' en φ pour Z. Ainsi

$$(9) \qquad \begin{cases} Z' = aH\dfrac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi}, \\ Z = aH\cos\varphi. \end{cases}$$

L'équation qui découle du principe de la conservation des forces vives est

$$(P^2 + S^2 - R^2 - R_s^2)\,Z = D'^2 Z' + D''^2 Z'';$$

elle se change dans la suivante quand on y porte les valeurs trouvées pour Z, Z′, Z″, et qu'on supprime le facteur commun aH,

$$(10) \qquad \begin{cases} (P^2 + S^2 - R_p^2 - R_s^2)\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\sin\varphi'\cos\varphi' \\ \qquad + D''^2\sin\varphi''\cos\varphi''\left[1 - \dfrac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''\left(\dfrac{C}{\cos\varphi''} - \gamma'\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}\right]. \end{cases}$$

§ VI.

Pour déterminer les inconnues R_s, R_p, D′, D″, on a, dans (3) et (10) du § V, le nombre suffisant d'équations; mais il semble à la première vue que ces quantités vont dependre d'équations carrées, d'où devrait résulter une ambiguité qui n'est pas dans la nature du sujet. Je montrerai cependant que le système des équations (3) et (10) se résout en quatre équations du premier degré.

Multiplions l'une par l'autre les équations (b) et (c), (3), § V; nous obtenons

$$(1) \qquad \begin{cases} (S^2 - R_s^2)\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\left(\dfrac{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right)^2 \\ + D''^2\sin\varphi''\cos\varphi''\left(\dfrac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right)^2 - D'D''\dfrac{(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)A\sin\omega\sin(\varphi' + \varphi''}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}} \end{cases}$$

Si à la place de γ' et γ'' on met leurs valeurs exprimées au moyen des angles φ', φ'' et ω, (7), § IV, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &1 - \left(\frac{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right)^2 = \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2},\\ &1 - \left(\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right)^2 = \frac{(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega)^2}{1-\gamma''^2},\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, en retranchant l'équation (1) de l'équation des forces vives (10), § V,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(P^2 - R_p^2)\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2}\\ &+ D''^2\sin\varphi''\cos\varphi''\left[\frac{(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega)^2 + \Delta(1-\gamma''^2)}{1-\gamma''^2}\right]\\ &+ D'D''A\frac{(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\omega\sin(\varphi'+\varphi'').\end{aligned}\right.$$

Δ remplace

$$\frac{(\mu^2 - \pi^2)\gamma''\left(\dfrac{C}{\cos\varphi''} - \gamma''\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}.$$

Je vais prouver maintenant que la partie de cette équation qui est à la droite du signe d'égalité peut se décomposer en deux facteurs M et N,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} M &= D'\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D''\frac{(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\ N &= D'\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\ &+ D''\left[\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma''^2}} + \frac{\Delta\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi''\cos\varphi''}{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega}\right].\end{aligned}\right.$$

Multipliant ces deux facteurs l'un par l'autre, et comparant leur produit au second membre de l'équation (3), on voit que la décomposition est exacte, si

$$\frac{A\sin\omega(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega)(\sin\varphi'\cos\varphi' + \sin\varphi''\cos\varphi'') + \dfrac{A\sin\omega\Delta(1-\gamma''^2)\sin\varphi''\cos\varphi'}{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega}}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

$$= \frac{A\sin\omega(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}}.$$

Cette relation est donc à vérifier. Supprimant les facteurs communs, on la réduit à

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)\sin(\varphi'+\varphi'')\cos(\varphi'-\varphi'')+\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''(1-\gamma''^2)\Delta}{C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega}\\&=(C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega)\sin(\varphi'+\varphi'').\end{aligned}\right.$$

Rappelons d'ailleurs que

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\Delta=\frac{(\mu^2-\pi^2)\gamma''(C-\gamma''\cos\varphi'')}{\cos\varphi''[\pi^2+(\mu^2-\pi^2)\gamma''^2]},\\&C-\gamma''\cos\varphi''=\sin\varphi''(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega),\\&\sin^2\varphi[\pi^2+(\mu^2-\pi^2)\gamma''^2]=\sin^2\varphi'',\quad\text{et}\quad \mu^2\sin^2\varphi=\sin^2\varphi',\end{aligned}\right.$$

et que des équations de la dernière ligne on peut tirer

$$(7)\qquad \mu^2-\pi^2=\frac{\sin^2\varphi'-\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi(1-\gamma''^2)}=\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sin^2\varphi(1-\gamma''^2)},$$

$$(8)\qquad \pi^2+(\mu^2-\pi^2)\gamma''^2=\frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'expression de Δ, elle se change dans la suivante :

$$(9)\qquad \Delta=\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi'+\varphi'')(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)\gamma''}{\sin\varphi''\cos\varphi''(1-\gamma''^2)}.$$

Cette valeur de Δ, introduite dans l'équation (5) qu'on débarrassera du facteur commun $\sin(\varphi'+\varphi'')$, donne

$$(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)\cos(\varphi'-\varphi'')+\sin(\varphi'-\varphi'')\gamma''=C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega,$$

équation dont il est facile de reconnaître l'exactitude, en observant que

$$C[\sin\varphi''\cos(\varphi'-\varphi'')-\sin\varphi']=-C\cos\varphi''\sin(\varphi'-\varphi''),$$
$$A\cos\omega[\cos\varphi''\cos(\varphi'-\varphi'')-\cos\varphi']=A\cos\omega\sin\varphi''\sin(\varphi'-\varphi''),$$

et que

$$\gamma''=A\sin\varphi\cos\omega+C\cos\varphi''.$$

La possibilité de la décomposition de la seconde partie de l'équation (3) en deux facteurs M et N (4) est donc démontrée ; le premier membre de cette équation se résout aussi dans les deux facteurs $P+R_p$, $(P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi$. Si l'on compare les facteurs de chacun des membres de l'équation (3) avec les deux parties de l'équation (3), *a*, § V, on voit que l'équation (3) peut être divisée par celle-ci, et peut être remplacée par l'équation suivante,

$$(P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi=D'\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$
$$+D''\left[\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)+\dfrac{\sin\varphi''\cos\varphi''(1-\gamma''^2)\Delta}{C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega}}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right].$$

ou, à la place de Δ mettant sa valeur (9),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(P - R_p) \sin\varphi \cos\varphi = D' \frac{\sin\varphi' \cos\varphi' A \sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \\ &+ D'' \left[\frac{\sin\varphi'' \cos\varphi'' (C \sin\varphi'' - A\cos\varphi'' \cos\omega) + \gamma'' \sin(\varphi' + \varphi'') \sin(\varphi' - \varphi'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Mettant, à la place de γ'', dans le facteur de D'', sa valeur

$$\gamma'' = C\cos\varphi'' + A\sin\varphi''\cos\omega,$$

et remarquant que

$$\sin(\varphi' + \varphi'')\sin(\varphi' - \varphi'') = \sin^2\varphi' - \sin^2\varphi'',$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega) + \gamma''\sin(\varphi'+\varphi'')\sin(\varphi'-\varphi'') \\ &= C\cos\varphi''\sin^2\varphi' - A\sin\varphi''\cos^2\varphi'\cos\omega. \end{aligned}$$

Cette valeur substituée dans l'équation (10), la rend un peu plus simple.

Les quatre équations du premier degré qui déterminent les vitesses R_s, R_p, D', D'', sont donc les suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &a. \quad P + R_p = D' \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}, \\ &b. \quad (P - R_p)\sin\varphi\cos\varphi = D' \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{C\cos\varphi''\sin^2\varphi' - A\sin\varphi''\cos^2\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}, \\ &c. \quad (S + R_s)\sin\varphi = -D' \frac{\sin\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{A\sin\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}, \\ &d. \quad (S - R_s)\cos\varphi = -D' \frac{\cos\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + D'' \frac{A\cos\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}. \end{aligned}\right.$$

§ VII.

En éliminant R_p entre les équations a et b du paragraphe précédent et R_s entre c et d, on trouve

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &2P\sin\varphi\cos\varphi = \frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')A\sin\omega \\ &+ \frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi')], \\ &2S\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi') \\ &+ \frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi'+\varphi'')A\sin\omega. \end{aligned}\right.$$

En éliminant P et S entre les mêmes équations, on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&2R_p \sin\varphi\cos\varphi = \frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\,A\sin\omega\\
&+\frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[C(\sin\varphi''\cos\varphi\sin\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi''\cos^2\varphi')\right],\\
&2R_s \sin\varphi\cos\varphi = \frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\\
&-\frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi-\varphi'')\,A\sin\omega.
\end{aligned}\right.$$

Des équations (1) on peut déduire les vitesses dans le rayon ordinaire et dans le rayon extraordinaire.

Posant, pour abréger,

$$N = \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\left[\begin{aligned}&C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\&-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{aligned}\right]$$
$$+A\sin^2\omega\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi''),$$

on obtient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&D' = 2\,\frac{\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\varphi\cos\varphi}{N}\\
&\times\left\{P\sin(\varphi+\varphi')A\sin\omega - S\left[\begin{aligned}&C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\&-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{aligned}\right]\right\},\\
&D'' = 2\,\frac{\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi\cos\varphi}{N}\\
&\times\left[\begin{aligned}&P\sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\\&+S\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')A\sin\omega\end{aligned}\right].
\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs étant portées dans les équations (2), on voit que les expressions des vitesses dans les deux rayons réfléchis polarisés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence ont la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} R_p &= pP + sS,\\ R_s &= p'P + s'S.\end{aligned}\right.$$

On trouve, pour p et s, les valeurs suivantes :

$$Np = \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\left[\begin{aligned}&C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\&-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{aligned}\right]$$
$$+A^2\sin^2\omega\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi''),$$

$$Ns = -\sin(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\left[\begin{aligned}&C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\&-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{aligned}\right]$$
$$-A^2\sin^2\omega\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi-\varphi''),$$

et pour p' et s', après quelques réductions,

$$\begin{aligned} N p' &= - A \sin \omega\, (C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi') \sin 2\varphi \sin (\varphi' - \varphi''), \\ N s' &= - A \sin \omega\, (C \sin \varphi' + A \cos \omega \cos \varphi') \sin 2\varphi \sin (\varphi' - \varphi''). \end{aligned}$$

Si l'on fait dans ces formules, qui donnent D', D'', R_p, R_s, $\varphi' = \varphi''$, c'est-à-dire si l'on admet que la réfraction simple seulement est produite, elles se changent dans les valeurs trouvées ci-dessus au § III, pour la réflexion dans les milieux non cristallisés. s' et p' deviennent alors simultanément nulles, et

$$(a) \qquad p = \frac{\sin (\varphi - \varphi') \cos (\varphi + \varphi')}{\sin (\varphi + \varphi') \cos (\varphi - \varphi')}, \quad s = - \frac{\sin (\varphi - \varphi')}{\sin (\varphi + \varphi')}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (4), on trouve pour R_p et R_s les valeurs rapportées au § III pour les mouvements réfléchis dans les rayons lumineux polarisés perpendiculairement et parallèlement au plan d'incidence.

On tire en outre de l'équation (3), en ayant égard à la relation

$$1 - \gamma'^2 = A^2 \sin^2 \omega + (C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi')^2,$$

$$D' = 2\, \frac{\sin \varphi \cos \varphi\, [PA \sin \omega \sin (\varphi' + \varphi) - S (C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi') \sin (\varphi' + \varphi) \cos (\varphi' - \varphi)]}{\sin^2 (\varphi' + \varphi) \cos (\varphi' - \varphi) \sqrt{1 - \gamma'^2}},$$

$$D'' = 2\, \frac{\sin \varphi \cos \varphi\, [P (C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi') \sin (\varphi + \varphi') + SA \sin \omega \sin (\varphi' + \varphi) \cos (\varphi' - \varphi)]}{\sin^2 (\varphi' + \varphi) \cos (\varphi' - \varphi) \sqrt{1 - \gamma'^2}}.$$

D'où l'on déduit, en multipliant la première équation par $\dfrac{A \sin \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$, la seconde par $\dfrac{C \sin \varphi' - A \cos \varphi' \cos \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$, et ajoutant; la première équation par $\dfrac{C \sin \varphi' - A \cos \varphi' \cos \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$, et la seconde par $\dfrac{A \sin \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$, et retranchant:

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} D' \frac{A \sin \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} + D'' \frac{C \sin \varphi' - A \cos \varphi' \cos \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} &= \frac{2P \sin \varphi \cos \varphi}{\sin (\varphi' + \varphi) \cos (\varphi' - \varphi)}, \\ -D' \frac{C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} + D'' \frac{A \sin \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} &= \frac{2S \sin \varphi \cos \varphi}{\sin (\varphi' + \varphi)}. \end{aligned} \right.$$

Si χ désigne l'angle formé par le plan d'incidence avec le plan mené par l'axe et la normale à l'onde réfractée sous l'angle φ' ou φ'', le mouvement D'' a lieu dans l'azimut $90^\circ - \chi$ et le mouvement D' dans l'azimut $180^\circ - \chi$, l'azimut étant compté à partir du plan d'incidence. Si donc on décompose les mouvements D' et D'' suivant le plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan, et qu'on appelle D_s et D_p les composantes respectives, on obtient

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_s &= - D' \cos \chi + D'' \sin \chi, \\ D_p &= D' \sin \chi + D'' \cos \chi. \end{aligned} \right.$$

Mais on trouve

$$\cos\chi = \frac{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \quad \text{et} \quad \sin\chi = \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}};$$

et si l'on combine (b) et (c) l'une avec l'autre, on obtient

$$D_p = \frac{2P\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)}, \quad D_s = \frac{2S\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi'+\varphi)}.$$

Ce sont les valeurs que nous avons trouvées ci-dessus, au § III, pour D_p et D_s.

§ VIII.

Des équations (4) et (5) on peut déduire les lois de la polarisation de la lumière par réflexion à la surface des milieux cristallins. Je m'occupe de cette recherche avec d'autant plus d'intérêt que les précieuses observations du docteur Seebeck sont là pour servir de pierre de touche à mes résultats théoriques, et qu'elles leur fournissent une belle confirmation.

On peut, en partant des phénomènes de réflexion sur des surfaces non cristallines, donner une double définition de l'angle de polarisation :

1°. On peut le définir l'angle d'incidence que doit faire avec la surface réfléchissante, un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence pour ne pas fournir de rayon réfléchi ; 2° ou encore l'angle sous lequel la lumière naturelle doit être réfléchie, pour que le rayon réfléchi ne soit composé que de lumière polarisée parallèlement au plan de réflexion. Mais ces deux définitions ne sont point, rigoureusement et généralement parlant, applicables aux surfaces cristallines.

En effet, si nous admettons que la lumière incidente soit polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, nous avons pour la lumière réfléchie, d'après (4),

$$R_p = pP, \quad \text{et} \quad R_s = p'P,$$

et, pour l'intensité de la lumière réfléchie,

$$R_p^2 + R_s^2 = (p^2 + p'^2)P.$$

Ces deux composantes ne peuvent s'éteindre pour une valeur convenable de l'angle φ, que dans le cas où p' est nul indépendamment de l'angle φ, ce qui a toujours lieu pour les surfaces non cristallisées, mais n'existe que dans certains cas particuliers pour les surfaces cristallines.

Mais on peut concevoir la première définition d'une manière plus générale, qui la rend applicable aux corps cristallisés et non cristallisés. Il suffit de dire que l'angle de polarisation est l'angle sous lequel un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence doit être réfléchi pour qu'aucune portion de lumière polarisée perpendiculairement au plan de réflexion ne fasse partie du rayon réfléchi. Cette définition de l'angle de polarisation étant adoptée, nous obtenons cet angle en résolvant l'équation $p = 0$.

En mettant pour p sa valeur, et négligeant le facteur commun $\frac{1}{N}$, cette équation est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= A^2 \sin^2 \omega \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') \sin(\varphi + \varphi'') \\ &+ \sin(\varphi + \varphi')(C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi') \left[\begin{aligned} &C(\sin \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi'' \sin^2 \varphi') \\ &- A \cos \omega (\cos \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi'' \cos^2 \varphi') \end{aligned}\right], \end{aligned}\right.$$

équation dans laquelle φ, φ', φ'' sont liés par les relations suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin \varphi' = \mu \sin \varphi, \\ &\operatorname{tang}^2 \varphi \left(\frac{1 - \pi^2 \sin^2 \omega \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) = \mu^2 (C + A \cos \omega \operatorname{tang} \varphi'')^2 + \pi^2 (A^2 - C \cos \omega \operatorname{tang} \varphi'')^2. \end{aligned}\right.$$

Je vais prouver maintenant que la seconde définition de l'angle de polarisation est pareillement insuffisante dans le cas de la réflexion sur les surfaces cristallines, et, dans ce but, je donnerai l'expression de l'intensité de la lumière réfléchie dans le cas où la lumière incidente n'est pas polarisée.

La lumière naturelle peut se représenter par une suite de mouvements vibratoires se succédant dans toutes les directions avec une rapidité telle que l'on peut supposer que, pendant la courte durée nécessaire pour produire dans l'œil l'impression lumineuse, un même nombre d'oscillations ont lieu dans chaque azimut.

Soit I^2 l'intensité totale de la lumière incidente; l'intensité de la lumière qui produira ses oscillations dans l'azimut β sera $\frac{I^2}{2\pi} d\beta$; cette partie donne en lumière réfléchie

$$(R_p^2) = (p \cos \beta + s' \sin \beta)^2 \frac{I^2}{2\pi} d\beta,$$

$$(R_s^2) = (p' \cos \beta + s \sin \beta)^2 \frac{I^2}{2\pi} d\beta.$$

L'intensité de la lumière réfléchie polarisée perpendiculairement, et l'intensité de la lumière réfléchie polarisée parallèlement, s'obtiennent en faisant la somme des intensités partielles (R_p^2) et (R_s^2) pour toutes les valeurs de β,

$$R_p^2 = (p^2 + s'^2) \frac{I^2}{2},$$

$$R_s^2 = (p'^2 + s^2) \frac{I^2}{2}.$$

La lumière réfléchie sera complétement polarisée suivant le plan d'incidence si $p^2 + s'^2 = 0$, et l'angle d'incidence φ, déterminé par cette équation, sera l'angle de polarisation, conformément à la seconde définition.

Mais, comme on le voit, cette équation ne suffit pas en général; elle convient seulement dans les cas particuliers où s' est nulle indépendamment de φ; alors l'angle de polarisation est déterminé par $p = 0$.

Mais on peut donner à cette seconde définition une forme assez générale pour qu'elle puisse s'appliquer tant aux corps cristallisés qu'à ceux qui ne le sont pas, en disant : *L'angle de polarisation est l'angle d'incidence sous lequel la lumière naturelle doit être réfléchie pour être complétement polarisée.* Pour les corps non cristallisés, le plan de polarisation de la lumière complétement polarisée par réflexion coïncide toujours avec le plan de réflexion; ceci n'a plus lieu pour les corps cristallisés. C'est le docteur Seebeck qui a le premier fait connaître ce fait remarquable (*Pogg. Ann. de Phys.*, Bd. XXI), quoique Brewster (*Philos. Trans.*, 1819) l'eût déjà précédemment observé dans des circonstances particulières pour lesquelles l'écart entre le plan de polarisation et le plan de réflexion est singulièrement augmenté. Il est facile de déduire des équations (4), § VII, l'angle défini *de polarisation complète*, et l'azimut dans lequel a lieu cette polarisation. J'appellerai cet azimut *la déviation du plan de polarisation.*

Les deux mouvements R_s et R_p, dont le premier a lieu dans le plan de réflexion, le second perpendiculairement au même plan, peuvent se décomposer en deux, l'un parallèle au plan mené par le rayon réfléchi, et faisant avec le plan de réflexion l'angle α; l'autre perpendiculaire. Soient R_s' la première composante, R_p' la seconde; elles satisfont aux conditions

$$R_s' = R_p \sin\alpha + R_s \cos\alpha = P(p \sin\alpha + p' \cos\alpha) + S(s' \sin\alpha + s \cos\alpha),$$
$$R_p' = R_p \cos\alpha - R_s \sin\alpha = P(p \cos\alpha - p' \sin\alpha) + S(s' \cos\alpha - s \sin\alpha).$$

Le rayon réfléchi sera complétement polarisé dans l'azimut α si $R_p' = 0$, indépendamment de P et de S. On a donc, pour qu'une polarisation complète de la lumière naturelle puisse avoir lieu par réflexion, à satisfaire aux équations

$$p \cos\alpha - p' \sin\alpha = 0,$$
$$s' \cos\alpha - s \sin\alpha = 0,$$

ce qui peut toujours être pour un choix convenable de α et de l'angle d'incidence φ. L'angle α est l'azimut que nous avons appelé déviation du plan de polarisation. Si l'on élimine α entre ces équations, on aura, pour déterminer l'angle de polarisation,

$$ps - p's' = 0, \tag{3}$$

et la déviation du plan de polarisation est

$$\tang \alpha = \frac{s'}{s}. \tag{4}$$

J'appellerai dans la suite l'angle de polarisation complète déterminé par (3), *angle de polarisation*. Cette désignation sera plus brève, et l'angle qu'elle indique est celui qui me paraît présenter le plus d'analogie avec l'angle de polarisation des surfaces non cristallines, c'est le même angle que Seebeck a complétement déterminé par l'observation dans le spath calcaire pour différentes faces et différentes directions du plan de réflexion, et qu'il a aussi nommé angle de polarisation. Au reste, les différences entre les angles d'incidence déterminés par l'équation (3) et ceux déterminés par l'équation (1), où $p = 0$, sont du second ordre par rapport à la différence $(\pi^2 - \mu^2)$; ce n'est que dans

50..

les cristaux fortement réfringents, comme le spath calcaire, que des différences de cet ordre n'échappent pas à l'observation.

Dans le cas particulier où le plan de réflexion est parallèle à la section principale, c'est-à-dire, $\omega = 0$, on a $s' = 0$ et aussi conséquemment $\alpha = 0$, et l'angle de la polarisation complète dépend de $p = 0$, c'est-à-dire de l'équation

$$(5) \qquad C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi') = 0,$$

dans laquelle

$$\sin\varphi' = \mu\sin\varphi,$$

$$(6) \qquad \operatorname{tang}^2\varphi'' = \sin^2\varphi[\mu^2(C + A\operatorname{tang}\varphi'')^2 + \pi^2(A - C\operatorname{tang}\varphi'')^2];$$

de (5) on tire

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{A\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi'}{C\sin\varphi\cos\varphi + A\cos^2\varphi'},$$

et de là

$$A - C\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{A^2\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'}{A\cos^2\varphi' + C\sin\varphi\cos\varphi}, \quad A\operatorname{tang}\varphi' + C = \frac{AC + \sin\varphi\cos\varphi}{A\cos^2\varphi' + C\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Avec ces trois équations on peut éliminer φ'' de l'équation (6), et obtenir :

$$\left(\frac{A\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi'}{\sin\varphi}\right)^2 - \mu^2(AC + \sin\varphi\cos\varphi)^2 = \pi^2(A^2\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi')^2.$$

Le premier membre de cette équation revient, comme il est facile de le voir, au produit suivant :

$$(A^2 - \sin^2\varphi')(1 - \mu^2 C^2 - \sin^2\varphi),$$

d'où résulte que l'équation est linéaire par rapport à $\sin^2\varphi$. En ayant égard à la relation

$$A^2\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi' = A^2 - \sin^2\varphi',$$

elle devient

$$[1 - \mu^2 C^2 - \pi^2 A^2 - (1 - \pi^2\mu^2)\sin^2\varphi]\,(A^2 - \sin^2\varphi') = 0.$$

Le premier facteur est seul à considérer; il fournit l'angle de polarisation pour le cas où la section principale coïncide avec le plan de réflexion :

$$(7) \qquad \sin^2\varphi = \frac{(1 - \pi^2)A^2 + (1 - \mu^2)C^2}{1 - \pi^2\mu^2}.$$

C'est la même formule que Seebeck a déduite précédemment de considérations théoriques, et dont il a justifié l'exactitude par des observations. (*Pogg. Ann.*, Bd. XXII.)

Je vais maintenant examiner le cas qui, après celui que je viens de traiter, est le plus simple, celui où le plan de reflexion est perpendiculaire à la section principale ($\omega = 90°$). Si l'on porte dans (3) les valeurs de p, s, p', s', tirées de l'équation (5), § VII, qu'on développe les multiplications indiquées, et qu'on néglige les facteurs communs $\sin(\varphi - \varphi')$, $\sin(\varphi + \varphi')$ et N^2, dont le premier n'a de signification que dans le cas particulier où $\varphi = \varphi'$, c'est-à-dire où le milieu cristallisé est entouré d'un milieu non cristallisé dont l'indice de réfraction est égal à son indice *ordinaire* (cas particulier que j'étudierai spécialement plus tard), on obtient

$$\begin{aligned}
&A^2\cos(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')\sin(\varphi-\varphi'')\\
&+\ C^2\sin^2\varphi'(\sin^2\varphi''\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\cos^2\varphi''\sin^2\varphi'')\\
&+\ A^2C^2\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\
&+\ A^2C^2\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')=0.
\end{aligned}$$

Cette équation se résout en deux facteurs,

$$\begin{aligned}
&[A^2\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')+C^2\sin\varphi'(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')]\\
&[A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')+C^2\sin\varphi'(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')]=0,
\end{aligned}$$

dont le premier n'a aucune racine utile à la question actuelle, comme on s'en assure quand on pose $\varphi'=\varphi''$, c'est-à-dire quand on applique cette équation au cas d'un milieu non cristallisé. L'angle de polarisation est donc ainsi déterminé par le second facteur seulement,

$$(8)\qquad A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')+C^2\sin\varphi'(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')=0.$$

Il est facile d'éliminer φ'' au moyen de l'équation (2), que, dans ce cas, où $\cos\omega=0$, on peut écrire

$$\operatorname{tang}\varphi''=\frac{\mu\sin\varphi\sqrt{1+\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}A^2}}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi-\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}\mu^2\sin^2\varphi}},$$

ou avec la condition $\sin\varphi'=\mu\sin\varphi$,

$$(9)\qquad \operatorname{tang}\varphi''=\operatorname{tang}\varphi'\sqrt{\frac{1+\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}A^2}{1-\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}\operatorname{tang}^2\varphi'}}.$$

Si l'on fait,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin\varphi-C^2\sin^2\varphi'=M,\\
&A^2\cos(\varphi+\varphi')\cos\varphi-C^2\sin\varphi'\sin\varphi\cos\varphi=N,
\end{aligned}\right.$$

on tire des équations (8) et (9) :

$$M^2\cos^2\varphi'-N^2\sin^2\varphi'=(M^2+N^2A^2)\sin^2\varphi'\,\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}.$$

A l'aide des équations (10), qui donnent

$$\begin{aligned}
&M\cos\varphi'-N\sin\varphi'=(A^2+C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),\\
&M\cos\varphi'+N\sin\varphi'=A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi')-C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'),
\end{aligned}$$

cette équation devient :

$$(11)\ \cos(\varphi+\varphi')=\frac{(M^2+A^2N^2)\sin^2\varphi'\,\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}}{\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')(A^2+C^2\sin^2\varphi')[A^2\cos(\varphi+\varphi')-C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')]}.$$

On trouve ensuite, en mettant pour M et N leurs valeurs, que $M^2 + A^2N^2$ a pour facteur $A^2 + C^2\sin^2\varphi'$; d'ailleurs

$$\sin(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi') = \frac{1-\mu^2}{\mu^2}\sin^2\varphi' ;$$

toutes ces relations transforment l'équation (11) en

$$(12)\qquad \cos(\varphi + \varphi') = \frac{\left[(A^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi')^2 + A^4\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\right]\dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}}{A^2\cos(\varphi+\varphi') - C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Cette équation ne peut se résoudre que d'une manière approximative, car elle est du quatrième degré ; pour plus de simplicité, on la met sous la forme des équations algébriques par la substitution suivante :

$$\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} = x,$$

d'où

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{x^2-1}{x^2-\mu^2}, & \sin^2\varphi' &= \frac{\mu^2(x^2-1)}{x^2-\mu^2},\\ \cos^2\varphi &= \frac{1-\mu^2}{x^2-\mu^2}, & \cos^2\varphi' &= \frac{x^2(1-\mu^2)}{x^2-\mu^2}. \end{aligned}\right.$$

Elle se transforme par là dans l'équation suivante,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &A^4(x-\mu)^2(1-\mu x)^2 + C^4\mu^4(1-x^2)^2(1-\mu^2x^2)^2\\ &-\left\{[A^2(1-\mu^2)-\mu^2(x^2-1)]^2 + A^4(1-\mu^2)^2(x^2-1)(1-\mu x)^2\right\}\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Des quatre racines, celle qui convient à la question doit être déterminée, en raison des relations (13), par la condition que si μ est plus petit que 1, x soit plus grande que 1, et réciproquement, si μ est plus grand que 1, x soit plus petite, tout en restant toujours positive.

La forme de l'équation (12) est très-propre au développement de $\sin^2\varphi$ suivant les puissances de $\dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}$; en multipliant les deux membres par $\cos(\varphi-\varphi')$, et écrivant dans le premier, à la place de $\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')$, $1-(1+\mu^2)\sin^2\varphi$, on obtient

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}\left[1 - \frac{(A^2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi')^2 + A^4\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')}{A^2\cos(\varphi+\varphi') - C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}\cos(\varphi-\varphi')\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}\right],$$

et de là l'on tire

$$(15)\qquad \sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}\left\{1 + \mu^2C^2\,\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4} + \frac{1}{4}\left[4\mu^4-(1-5\mu^2-\mu^4+\mu^6)A^2\right]C^4\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\right)^2 - \ldots\right\}$$

Pour essayer l'équation (12), j'ai calculé l'angle de polarisation du spath calcaire dans l'hypothèse d'un azimut $\omega = 90°$, et pour les faces sur lesquelles Seebeck l'avait determiné par l'observation. Je rassemble les résultats du calcul et de l'observation dans le tableau suivant :

INCLINAISON de la surface réflechissante sur l'axe.	ANGLES de polarisation calculés.	ANGLES de polarisation observés.	DIFFÉRENCES.
0° 12′	58° 54′,9	58° 56′	+ 1′,1
0. 23	58. 54,9	58. 56,1	+ 1,2
27. 2	59. 19,1	59. 3,9	− 15,2
45. 23,7	59. 53,4	59. 50,9	− 2,5
45. 29	59. 53,5	59. 47,7	− 5,8
45. 43,5	59. 54,1	59. 46,7	− 7,4
64. 1,5	60. 26,3	60. 14,8	− 11,7
89. 47,5		60. 33,4	

Pour développer l'équation générale de l'angle de polarisation, je pose

$$C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi') = M,$$
$$C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi') = M',$$
$$C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi' = N.$$

Par là l'équation (3) se change en la suivante, après lui avoir fait éprouver quelques réductions faciles à voir, et avoir supprimé le facteur commun $\frac{\sin(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi')}{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'')A^4\sin^4\omega + N^2MM' \\ + \cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi - \varphi'')A^2\sin^2\omega NM' + \cos(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi'')A^2\sin^2\omega MN \end{array}\right\} = 0.$$

et celle-ci se décompose en deux facteurs

$$[\cos(\varphi - \varphi')\sin(\varphi - \varphi'')A^2\sin^2\omega + NM'],$$
$$[\cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi - \varphi'')A^2\sin^2\omega + NM],$$

dont le dernier contient seul les racines qui conviennent à la question. On s'en assure en faisant comme ci-dessus $\varphi' = \varphi''$. Si l'on y replace les valeurs de N et de M, on obtient l'équation suivante, qui détermine généralement l'angle de polarisation :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi - \varphi')A^2\sin^2\omega + (C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi') \\ \times[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi')] \end{array}\right\} = 0,$$

de laquelle on éliminera φ'' au moyen de l'équation

$$(17)\quad \text{tang}^2\varphi''\left(\frac{1 - \pi^2\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right) = \mu^2(C + A\cos\omega\,\text{tang}\,\varphi'')^2 + \pi^2(A - C\cos\omega\,\text{tang}\,\varphi'')^2$$

M. Seebeck a entrepris une série d'observations sur l'angle de polarisation à la surface naturelle du spath calcaire dans différents azimuts. Pour ces mêmes azimuts, j'ai calculé les angles de polarisation d'après (16) et (17) et j'en présente les valeurs dans le tableau suivant, en regard de celles qu'a données l'observation.

	ANGLES DE P calculés.	ANGLES DE P observés.	DIFFÉRENCES.
0° 0′	57° 20′,1	57° 19′,7	— 0′,4
22.30	57.42,9	57.45,9	+ 3,0
45. 0	58.34,9	58 33,9	— 1,0
67.30	59.30,1	59.29,1	— 1,0
90. 0	59.53,4	59.50.9	— 2,5

Je ne crois pas qu'on puisse atteindre une concordance plus parfaite entre l'observation et la théorie; elle prouve à la fois et la justesse des principes qui ont été adoptés, et la grande habileté de l'observateur.

Comme le cas particulier que nous avons traité ($\omega = 90^\circ$) nous a conduits à une équation du quatrième degré, on ne peut pas espérer que les racines des équations (16) et (17) puissent s'exprimer autrement que par une série.

Il est facile de mettre ces équations sous une forme semblable à celle de (12), et de développer ensuite les racines suivant les puissances de $\dfrac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}$.

A l'inspection immédiate des équations (16) et (17), on voit que l'angle de polarisation est le même pour $+\omega$ et $-\omega$; mais on ne peut voir de même, et sans un examen attentif, que l'angle de polarisation ne change pas pour ω et $180^\circ - \omega$, comme Brewster l'a observé le premier, et comme Seebeck l'a confirmé.

Pour le reconnaître, je développai les racines de l'équation (16) suivant les puissances de $\pi^2 - \mu^2$, et je les trouvai jusqu'à la troisième puissance inclusivement indépendantes des puissances impaires de $\cos\omega$. D'après cela il me parut vraisemblable que le développement en était généralement indépendant. L'élimination de φ'' dans l'équation (16) me confirma dans cette opinion; mais mon calcul est trop long pour l'inscrire ici, d'autant plus qu'on m'a communiqué le calcul suivant, qui est plus court.

De (16) on tire la valeur

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{l + m\cos\omega}{n + p\cos\omega};$$

l, m, n, p, doivent seulement contenir des puissances paires de $\cos\omega$,

$$\begin{aligned}
l &= A^2\sin^2\omega\sin\varphi\cos(\varphi + \varphi') - C^2\sin^2\varphi' + A^2\cos^2\omega\cos\varphi'\sin\varphi\cos\varphi,\\
n &= A^2\sin^2\omega\cos\varphi\cos(\varphi + \varphi') - C^2\sin\varphi'\sin\varphi\cos\varphi + A^2\cos^2\omega\cos^3\varphi',\\
m &= AC\sin\varphi'(\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi),\\
p &= AC\cos\varphi'(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi').
\end{aligned}$$

Si l'on substitue partout dans ces expressions à $\sin\varphi\cos\varphi$ sa valeur

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi'\cos\varphi' + \cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi - \varphi'),$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
l &= A^2\cos(\varphi+\varphi')[\sin^2\omega\sin\varphi + \cos^2\omega\cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M,\\
n &= \cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\cos\varphi - C^2\sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \cos\varphi' M,\\
m &= -\ AC\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),\\
p &= \quad AC\cos\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),
\end{aligned}
$$

où l'on pose pour abréger

$$M = A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'.$$

Si l'on remplace en outre, dans les valeurs l, n, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par les valeurs

$$
\begin{aligned}
\sin\varphi &= \sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi'),\\
\cos\varphi &= \cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi'),
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
l &= A^2\cos(\varphi+\varphi')[\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M,\\
n &= \cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - (C^2+A^2\sin^2\omega)\sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \cos\varphi' M
\end{aligned}
$$

Soient maintenant

$$
\begin{gathered}
C + A\cos\omega\tang\varphi'' = \frac{l' + m'\cos\omega}{n + p\cos\omega},\\
A - C\cos\omega\tang\varphi'' = \frac{l'' + m''\cos\omega}{n + p\cos\omega},\\
l' = Cn + C\cos^2\omega\, m, \qquad m' = Cp + Al,\\
l'' = An + C\cos^2\omega\, m, \qquad m'' = Ap - Cl,
\end{gathered}
$$

on, si l'on substitue les valeurs précédemment données pour l, m, n, p,

$$
\begin{aligned}
l' &= C\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + C\cos\varphi' M,\\
m' &= A\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + A\sin\varphi' M;\\
l'' &= A\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')[A^2\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] - A\cos\varphi' M,\\
m'' &= -\ A^2C\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - C\sin\varphi' M.
\end{aligned}
$$

Qu'à l'aide de ces expressions on forme les valeurs

$$
\begin{gathered}
l \pm l'\sin\varphi, \qquad m \pm l'\sin\varphi',\\
l\sin\omega \pm \sqrt{-1}\,.\,l'', \qquad m\sin\omega \pm \sqrt{-1}\,.\,m'',
\end{gathered}
$$

et qu'on pose pour abréger

$$
\begin{aligned}
\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + (\cos\varphi'+C)\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M &= D,\\
\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + (\cos\varphi'-C)\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M &= D',\\
A\sin\omega\cos(\varphi+\varphi')[A\sin\omega\cos(\varphi-\varphi') - \sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi')] + M &= E,\\
A\sin\omega\cos(\varphi+\varphi')[A\sin\omega\cos(\varphi-\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi')] + M &= E',
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{gathered}
l - l'\sin\varphi' = (1 - C\cos\varphi')D, \qquad l + l'\sin\varphi' = (1 + \cos\varphi')D',\\
m - m'\sin\varphi' = -\ A\sin\varphi' D, \qquad m + m'\sin\varphi' = +\ A\sin\varphi' D'.
\end{gathered}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
l\sin\omega + \sqrt{-1}\,.\,l'' &= \left(\sin\omega\sin\varphi' + \sqrt{-1}\,A\cos\varphi'\right)E,\\
l\sin\omega - \sqrt{-1}\,.\,l'' &= \left(\sin\omega\sin\varphi' - \sqrt{-1}\,A\cos\varphi'\right)E',\\
m\sin\omega + \sqrt{-1}\,.\,m'' &= -\,C\sqrt{-1}\sin\varphi'.E,\\
m\sin\omega - \sqrt{-1}\,.\,m'' &= \,C\sqrt{-1}\sin\varphi'.E'.
\end{aligned}
$$

Mais on a

$$
\begin{aligned}
&(n + p\cos\omega)\left[\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi'(C + A\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = l + m\cos\omega - \sin\varphi'(l' + m'\cos\omega),\\
&(n + p\cos\omega)\left[\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi'(C + A\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = l + m\cos\omega + \sin\varphi'(l' + m'\cos\omega),\\
&(n + p\cos\omega)\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' + \sqrt{-1}\,(A - C\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = \sin\omega(l + m\cos\omega) + \sqrt{-1}\,(l'' + m''\cos\omega),\\
&(n + p\cos\omega)\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' - \sqrt{-1}\,(A - C\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = \sin\omega(l + m\cos\omega) - \sqrt{-1}\,(l'' + m''\cos\omega),
\end{aligned}
$$

et par consequent, si l'on pose $n + p\cos\omega = N$,

$$
\begin{aligned}
&N\left[\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi'(C + A\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right] = (1 - C\cos\varphi' - A\cos\omega\sin\varphi')D,\\
&N\left[\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi'(C + A\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right] = (1 + C\cos\varphi' + A\cos\omega\sin\varphi')D',\\
&N\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' + \sqrt{-1}\,(A - C\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = \left[\sin\omega\sin\varphi' + \sqrt{-1}\,(A\cos\varphi' - C\cos\omega\sin\varphi')\right]E,\\
&N\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' - \sqrt{-1}\,(A - C\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = \left[\sin\omega\sin\varphi' - \sqrt{-1}\,(A\cos\varphi' - C\cos\omega\sin\varphi')\right]E'.
\end{aligned}
$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (17), que l'on peut présenter ainsi,

$$\operatorname{tang}^2\varphi'' - \sin^2\varphi'(C + A\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')^2 = \pi^2\sin^2\varphi\left[\sin^2\omega\operatorname{tang}^2\varphi'' + (A - C\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')^2\right],$$

on obtient, en tenant compte de la condition

$$1 - (C\cos\varphi' + A\cos\omega\sin\varphi')^2 = \sin^2\omega\sin^2\varphi' + (A\cos\varphi' - C\cos\omega\sin\varphi')^2,$$

l'équation

$$0 = \left[1 - (C\cos\varphi' + A\cos\omega\sin\varphi')^2\right]\left[DD' - \pi^2\sin^2\varphi\, EE'\right],$$

qui se reduit à la suivante, le premier facteur ne pouvant disparaître pour une valeur réelle de φ',

$$0 = DD' - \pi^2\sin^2\varphi\, EE', \tag{18}$$

dans laquelle se trouvent seulement des puissances paires de $\cos\omega$.

C'est là l'équation à l'aide de laquelle on détermine généralement l'angle de polarisation après avoir éliminé φ''. Si l'on met pour D, D', E, E', leurs valeurs, on arrive à l'équation

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\begin{aligned}&\cos(\varphi+\varphi')\,(\mathrm{A}^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')+\cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')\\ &\qquad+\sin\varphi'(\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi')\end{aligned}\right]^2\\ &\qquad=\pi^2\sin^2\varphi\left[\begin{aligned}&\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\\ &\quad+\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi'\end{aligned}\right]^2\\ &\qquad+\pi^2\sin^2\varphi\,\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\\ &\qquad+\mathrm{C}^2\sin^2(\varphi-\varphi')\cos^2(\varphi+\varphi').\end{aligned}\right.$$

Si l'on met pour $\pi^2\sin^2\varphi$ sa valeur

$$\pi^2\sin^2\varphi=\sin^2\varphi'+(\pi^2-\mu^2)\sin^2\varphi,$$

et si l'on donne à (19) la forme

$$(20)\qquad \mathrm{R}=\mathrm{S}(\pi^2-\mu^2)\sin^2\varphi,$$

on trouve

$$\mathrm{R}=\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')\left[\begin{aligned}&\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\\ &+(\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\end{aligned}\right],$$

$$\mathrm{S}=\left\{\begin{aligned}&[\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi']^2\\ &\qquad+\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\end{aligned}\right\};$$

on a donc, si, au lieu de $\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')$, on écrit sa valeur $(1-\mu^2)\sin^2\varphi$,

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos(\varphi+\varphi')=\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}\\ &\times\frac{[\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi']^2+\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')}{\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')+(\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $\cos(\varphi-\varphi')$, et qu'à la place de $\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')$ on écrive sa valeur $1-(1+\mu^2)\sin^2\varphi$, on obtient

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\sin^2\varphi=\frac{1}{1+\mu^2}-\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\\ &\times\left\{\frac{[\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi']^2+\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')}{\mathrm{A}^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')+(\mathrm{A}^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-\mathrm{C}^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\right\}\cos(\varphi-\varphi'),\end{aligned}\right.$$

forme très-convenable pour le développement de $\sin^2\varphi$, suivant les puissances de $\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}$. Comme $\cos(\varphi+\varphi')$ disparaît en même temps que $\pi^2-\mu^2$, on obtient immédiatement le terme de $\sin^2\varphi$ qui dépend de la première puissance de $\pi^2-\mu^2$, en posant $\cos(\varphi + \varphi') = 0$:

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'),\\
&\text{ou}\\
&\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\left(\frac{A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2}{1+\mu^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on veut encore obtenir le terme suivant qui dépend de $(\pi^2-\mu^2)^2$, on peut poser dans l'équation (22) $\cos^2(\varphi+\varphi') = 0$, et l'on obtient alors

$$
\begin{aligned}
\sin^2\varphi = {} & \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\\
& \times \left\{ (A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi) \left\{ \frac{[A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi' + 2A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')]\cos(\varphi-\varphi')}{(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')} \right\} \right\},
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\sin^2\varphi = \frac{1}{1-\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\cos(\varphi+\varphi')A^2\sin^2\omega\frac{\cos 2(\varphi-\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}.
$$

Si l'on porte dans le second membre de cette équation la valeur de $\sin^2\varphi$ de l'équation (23), et si l'on néglige la troisième puissance de $\pi^2-\mu^2$, on trouve

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\left(\frac{A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2}{1+\mu^2}\right)\\
&-\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\right)^2(A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2)\left\{\frac{A^2\cos^2\omega + C^2}{1+\mu^2}\mu^2 + A^2\sin^2\omega\left[1-\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu^2}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit que $\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}$ dans l'azimut ω', pour lequel $\cos\omega' = \pm\frac{C}{A}\mu$. Dans ces quatre azimuts la surface cristalline se comporte donc comme la surface d'un corps non cristallisé à l'indice de réfraction $\frac{1}{\mu}$, et $\cos(\varphi+\varphi')$ est nul; et ceci n'a pas lieu seulement approximativement, mais rigoureusement, comme on le voit par l'équation (21). D'où résulte que, si $\cos(\varphi+\varphi') = 0$, $A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi' = 0$, et réciproquement.

Il peut être intéressant d'avoir l'équation (19) dans la forme ordinaire de l'équation algébrique. On y parvient de la manière la plus simple, à l'aide de la substitution précédemment employée, savoir :

$$
\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} = x,
$$

ce qui donne l'équation

$$
\begin{aligned}
&[\mu(A^2\sin^2\omega + \mu^2C^2) + (1-\mu^2)x - \mu(1-A^2\cos^2\omega)x^2]^2\\
&- \pi^2[A^2\sin^2\omega + \mu^2C^2 - (\mu^2 - A^2\cos^2\omega)x^2]^2\\
&- (1-\mu^2)[\pi^2A^2\sin^2\omega + \mu^2C^2 - (\pi^2A^2\sin^2\omega + C^2)x^2](1-\mu x)^2 = 0,
\end{aligned}
$$

dont je ne m'arrêterai pas à donner le développement suivant les puissances de x

§ IX.

Je vais m'occuper maintenant de l'équation (4) du précédent paragraphe, équation qui détermine la *déviation du plan de polarisation* par réflexion. L'angle désigné par φ dans cette équation représente l'angle de polarisation. La valeur de s' est, d'après l'équation (5), § VII,

$$s' = -\frac{1}{N} A \sin\omega \sin(\varphi' - \varphi'')(C \sin\varphi' + A \cos\omega \cos\varphi') \sin 2\varphi,$$

et la valeur de s se change par là même, quand on y met à la place du produit

$$A^2 \sin^2\omega \times \sin(\varphi - \varphi')$$

sa valeur déduite de l'équation (16), § VIII, dans l'expression suivante :

$$s = -\frac{1}{N} \frac{(C^2 \sin^2\varphi' - A^2 \cos^2\omega \cos^2\varphi') \sin(\varphi' - \varphi'') \sin 2\varphi}{\cos(\varphi + \varphi')};$$

on obtient d'après cela, pour la déviation du plan de polarisation α,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{A \sin\omega \cos(\varphi + \varphi')}{C \sin\varphi' - A \cos\omega \cos\varphi'}.$$

Ce résultat simple et élégant se traduit dans le théorème suivant :

La tangente de la déviation du plan de polarisation est égale à la tangente de l'angle que le plan de polarisation de l'onde ordinaire fait avec le plan d'incidence, multipliée par le cosinus de la somme des angles de polarisation complète et de réfraction ordinaire qui lui correspondent.

Quant à l'expression $\frac{A \sin\omega}{C \sin\varphi' - A \cos\omega \cos\varphi'}$, prise pour la tangente de l'angle que le plan d'incidence fait avec la direction du mouvement dans l'onde réfractée ordinairement, c'est-à-dire avec son plan de polarisation, il est facile de se convaincre qu'elle est exacte d'après les équations (2), § V, 2, dans lesquelles le sinus de cet angle est, d'après les notations expliquées aux paragraphes IV et V, exprimé par

$$R'_a E' + R'_b E'' + R'_c E''' = \frac{A \sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}.$$

Si l'on veut savoir dans quel azimut la déviation de la polarisation disparaît, on se servira de l'observation faite ci-dessus que $\cos(\varphi + \varphi')$ disparaît en même temps que $(C^2 \sin^2\varphi' - A^2 \cos^2\omega \cos^2\varphi')$, et s'annulle seulement dans ce cas. La déviation du plan de polarisation sera donc nulle si

$$(2) \qquad A \sin\omega (C \sin\varphi' + A \cos\varphi' \cos\omega) = 0.$$

D'après cela, aucune déviation n'a lieu.

1°. Quand $A = 0$;

2°. Quand $\omega = 0$ ou $180°$, c'est-à-dire quand le plan de réflexion est parallèle à la section principale;

3°. Quand $\cos\omega = -\frac{C}{A}\operatorname{tang}\varphi' = -\frac{C}{A}\mu$.

En effet, quand $\operatorname{tang}(\varphi + \varphi') = 0$, $\operatorname{tang}\varphi' = \mu$.

La troisième équation détermine, en général, deux azimuts de même valeur, mais de signes contraires. Tout plan réflecteur est donc en général divisé en quatre parties analogues à celles que déterminent sur le plan de la figure (*fig.* 5), la *ligne principale* HH′, et les lignes AB, BC, de telle sorte que les deux parties adjacentes donnent des déviations de signes contraires et soient séparées par des lignes sans déviation. La direction HH′ divise le système total des déviations en deux moitiés symétriques. Les deux autres lignes sans déviation AB et CD se confondent en une seule ligne qui est perpendiculaire à HH′ quand le plan réflecteur devient parallèle à l'axe. Plus le plan réfléchissant s'incline sur l'axe, plus les lignes AB, BC s'approchent de HH′, et s'en approchent du côté H′ qui se trouve dans l'azimut $\omega = 180°$, situé de telle manière que la ligne HH′ fasse en H un angle aigu avec l'axe mené par H au-dessous du plan. Il y a une certaine inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe pour laquelle les deux lignes AB et BC se confondent avec BH′, et pour laquelle il n'y a plus sur la face qu'une seule ligne sans déviation, la ligne principale; cette inclinaison est déterminée par l'équation

$$\frac{A}{C} = \operatorname{tang}\varphi' = \mu.$$

Pour le spath calcaire, cette inclinaison est de 58°55′.

Si dans l'équation (1) on néglige tout ce qui dépend de la seconde puissance de $(\mu^2 - \pi^2)$, on peut, de l'équation (21) du paragraphe précédent, tirer

$$\cos(\varphi + \varphi') = \frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \frac{A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi}{\cos(\varphi - \varphi')},$$

rappelant que $\sin^2\varphi = \frac{1}{1 + \mu^2}$, on obtient

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \left(\frac{A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2}{2\mu}\right).$$

Ceci donne

$$\operatorname{tang}\alpha = A\sin\omega(A\cos\omega + C\mu)\frac{1 + \mu^2}{2\mu} \cdot \frac{\mu^2 - \pi^2}{1 - \mu^2}.$$

La déviation α est donc, pour les substances comme le spath calcaire, dans lesquelles $\pi > \mu$, positive depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega' = \operatorname{arc}\left(\cos = -\frac{C}{A}\mu\right)$; de $\omega = \omega'$ jusqu'à $\omega = 180°$ elle est négative. L'inverse a lieu quand $\pi < \mu$. Il semble nécessaire de bien éclaircir ce qu'on entend par inclinaisons positives et négatives.

Soient, *fig.* 6, H′HK un rhomboèdre de spath calcaire, H le sommet de l'angle solide obtus, HH′ la ligne principale de la face HH′G.

Soient en outre EI un rayon lumineux incident réfléchi suivant IR vers l'œil placé en R; *er* l'intersection du plan réflecteur HH'G par le plan d'incidence RIE, eIE $= 180° - \varphi$ et HIE $= \omega$.

Si le rayon IR est complétement polarisé par réflexion, et si α a une valeur négative, son plan de polarisation est à gauche pour l'œil placé en R. Ceci résulte de ce que nous avons admis dans les formules (11), § VI, que le mouvement P s'éloigne du plan d'incidence vers la droite, que le mouvement S se fait dans le plan d'incidence de bas en haut, et que les mouvements R_p, R_s ont lieu respectivement suivant les mêmes directions.

Pour obtenir les *maximum* de α, il suffit d'égaler à zéro la différentielle de cette expression prise par rapport à ω; on trouve l'équation suivante :

$$(3) \qquad \cos\omega = -\frac{1}{4}\frac{C}{A}\mu \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\frac{C^2}{A^2}\mu^2}$$

Des deux directions déterminées par cette équation, l'une change de $\omega = 45°$ jusqu'à $\omega = 90°$, l'autre de $\omega = 135°$ jusqu'à $\omega = 180°$ pendant que l'inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe varie de 0° à 90°, mais de telle sorte que la dernière atteint beaucoup plus vite l'azimut 180° que la première ne s'approche de 90°; si $\frac{A}{C} = \mu$, celle-ci est éloignée de l'azimut 90° de l'angle $(\cos = \frac{1}{2})$, tandis que la seconde direction est déjà dans l'azimut 180°, et s'est évanouie en même temps comme direction correspondante à un maximum. De la position d'un plan incliné sur l'axe d'un angle correspondant à la condition $\frac{A}{C} = \mu$, à celle d'un plan perpendiculaire à l'axe, il n'y a qu'une seule ligne de plus grande déviation ; cette ligne s'approche de plus en plus de la perpendiculaire à la ligne principale, à mesure que le maximum devient plus petit, et, si ce maximum s'annulle, la ligne sans déviation se place perpendiculairement à la ligne principale. Pour le plan perpendiculaire à l'axe, la déviation est, dans tous les azimuts, égale à zéro.

J'ai été heureux de voir ces résultats de la théorie de la déviation du plan de polarisation tellement confirmés par les observations de M. Seebeck, que l'accord le plus parfait s'est trouvé entre les valeurs déduites du calcul et les valeurs observées. Cet accord est vraiment admirable, dans des phénomènes si délicats et si fugaces, et montre bien la grande habileté et la rare précision de l'observateur. M. Seebeck publiera très-prochainement sans doute ses observations, et je dois laisser le lecteur s'assurer par lui-même de leur perfection.

Jusqu'à présent nous nous sommes occupés du cas où de la lumière non polarisée était réfléchie par les surfaces cristallines. Nous admettrons maintenant que la lumière est polarisée avant de tomber sur la surface réfléchissante. Je désignerai par a l'azimut de la polarisation primitive, ce qui revient à faire dans les formules (4), § VI, $\frac{P}{S} = \tang a$.

Le plan de polarisation de la lumière réfléchie tournera d'une certaine quantité par réflexion, et je désignerai par δ son nouvel azimut, δ satisfaisant à la relation générale

$\text{tang}\,\delta = \frac{R_r}{R}$. Le rayon incident étant polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, soit δ_p la rotation de son plan de polarisation, c'est-à-dire l'angle que le plan de polarisation fait avec le plan perpendiculaire au plan de réflexion ; soit δ_s la rotation du plan de polarisation d'un rayon polarisé parallèlement au plan d'incidence.

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{tang}\,\delta_p &= \frac{p'}{p}, \\ \text{tang}\,\delta_s &= \frac{s'}{s}. \end{aligned} \right.$$

On peut mettre les expressions de p, p', s, s' dans (5) sous les formes suivantes, en ordonnant les termes suivant la différence des réfractions φ', φ'' :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} Np &= \sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi + \varphi')(1 - \gamma'^2)\cos(\varphi' - \varphi'') - M\sin(\varphi' - \varphi''), \\ Ns &= -\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi')\sin(\varphi - \varphi')(1 - \gamma'^2)\cos(\varphi' - \varphi'') - M\sin(\varphi' - \varphi''). \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose pour abréger

$$T = \gamma' \sin\varphi\cos\varphi' + C\sin^2\varphi' + A\cos\omega\cos^2\varphi',$$

$$T' = \gamma' \sin\varphi\cos\varphi' - C\sin^2\varphi' - A\cos\omega\cos^2\varphi',$$

les valeurs de M et M' sont les suivantes :

$$M = \sin(\varphi - \varphi')\cos^2(\varphi + \varphi')A^2\sin^2\omega + \sin(\varphi + \varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')T,$$

$$M' = \sin(\varphi + \varphi')\cos^2(\varphi - \varphi')A^2\sin^2\omega - \sin(\varphi - \varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')T'.$$

Les valeurs de p' et de s' sont d'après (5), § VI, les suivantes :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} Np' &= -A\sin\omega(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi' - \varphi''), \\ Ns' &= -A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi' - \varphi''). \end{aligned} \right.$$

Ces valeurs de p, s, p', s', substituées dans les équations (4), donnent

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{tang}\,\delta_p &= \frac{-A\sin\omega(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\,\text{tang}(\varphi' - \varphi'')}{\sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi + \varphi')(1 - \gamma'^2) - M\,\text{tang}(\varphi' - \varphi'')}, \\ \text{tang}\,\delta_s &= \frac{A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\,\text{tang}(\varphi' - \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi')\sin(\varphi - \varphi')(1 - \gamma'^2) + M'\,\text{tang}(\varphi' - \varphi'')}. \end{aligned} \right.$$

La tangente $(\varphi' - \varphi'')$ dépend d'une équation du deuxième degré, qu'on forme facilement de

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)\gamma''^2] \quad \text{et de} \quad \sin^2\varphi' = \mu^2\sin^2\varphi.$$

Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on obtient

$$(8)\quad \sin(\varphi' - \varphi'')\sin(\varphi' + \varphi'') = (1 - \gamma''^2)\sin^2\varphi'\,\frac{\mu^2 - \pi^2}{\mu^2}.$$

Si dans cette équation on met partout, à la place de φ'', $\varphi' - (\varphi' - \varphi'')$, et si l'on divise par $\cos^2(\varphi' - \varphi'')$, on obtient l'équation qui donne $\text{tang}\,(\varphi' - \varphi'')$, dont la plus petite racine convient seule à l'équation (7). Si l'on veut la valeur numérique de cette racine, il est préférable de la déduire de l'équation (8) par un procédé d'approximation.

Si dans les valeurs de tang δ_p, tang δ_s on ne veut conserver que les premières puissances de $\frac{\mu^2 - \pi^2}{\mu^2}$, on devra, dans tang δ_p, ne pas négliger le terme de tang $(\varphi' - \varphi'')$ qui dépend de $\left(\frac{\mu^2 - \pi^2}{\mu^2}\right)^2$, dans le cas où la réflexion a lieu dans le voisinage de l'angle de polarisation, parce qu'alors cos $(\varphi + \varphi')$ contient aussi le facteur $\mu^2 - \pi^2$. Si la réflexion s'opère sous l'angle de polarisation, les deux déviations δ_p et δ_s sont complémentaires, et δ_s devient en même temps égale à α, c'est-à-dire à l'angle de *déviation* du plan de polarisation, comme cela résulte des formules (3) et (4), § VIII.

Ces deux déviations δ_s, δ_p disparaissent sur la face perpendiculaire à l'axe, et changent sur chaque face quand le plan de réflexion est parallèle à la ligne principale. D'ailleurs il existe sur chaque face, pour tout azimut du plan de réflexion entre 0° et ± 90°, un angle d'incidence pour lequel $\delta_p = 0$, et pour tout azimut entre ± 90° et 180°, un angle d'incidence pour lequel δ_s disparaît. Le système de ces deux angles d'incidence est divisé symétriquement par la ligne principale du plan réfléchissant. Pour obtenir pour un plan réflecteur quelconque le système des rayons à polarisation parallèle et perpendiculaire qui ne subissent pas de rotation, on peut employer la construction suivante.

Soit HH′, *fig.* 7, la ligne principale du plan réflecteur qui fait en H un angle aigu avec l'axe mené au-dessous. Comme centre du cristal, prenons un point situé sur la normale élevée en N à la surface réfringente, et distant de N d'une longueur = 1. Faisons

$$MN = M'N = \tfrac{1}{2} AC,$$

et des points M et M′, avec le rayon MN, décrivons deux cercles. Toute ligne menée du centre du cristal à la périphérie du cercle M représente un rayon ordinaire, procédant d'un rayon incident dont la polarisation primitivement perpendiculaire n'éprouve nulle déviation; tandis que les rayons qui vont du centre à la périphérie du cercle M′ proviennent par réfraction ordinaire de rayons incidents, dont la polarisation primitivement parallèle n'éprouve aucune déviation.

Quel doit être l'azimut du rayon incident pour que le rayon réfléchi soit polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan de réflexion?

Je désignerai le premier azimut par d_s, le second par d_p. Des équations (4) il résulte que, si le rayon réfléchi est polarisé parallèlement au plan de réflexion, $R_p = 0$; alors aussi $\frac{P}{S} = -\frac{s'}{p}$, et par conséquent

$$-\frac{s'}{p} = \text{tang}\, d_s.$$

Les mêmes considérations font voir que

$$-\frac{s}{p'} = \text{tang}\, d_p. \tag{8}$$

Ces deux azimuts des plans primitifs de polarisation d_s et d_p deviennent égaux quand la réflexion se fait sous l'angle de polarisation complète, car ce dernier est, d'après l'eq. 3, § VIII, determiné par $\frac{s'}{p} = \frac{s}{p'}$. *Dans cet azimut aucune portion de lumière n'est réfléchie.* Quand φ est mis pour l'angle de polarisation complète, $-\frac{s}{p'}$ ou $-\frac{s'}{p}$ est la tangente de l'azimut dans lequel doit être un rayon préalablement polarisé pour qu'il disparaisse totalement par la reflexion sous l'angle de polarisation. Cette tangente est à la tangente de la déviation du plan de polarisation complète comme $-s$ est à p. On voit qu'on peut aussi definir l'angle de la polarisation complète par réflexion l'angle d'incidence sous lequel un rayon polarisé dans l'azimut d_s ou d_p n'est pas réfléchi.

Du reste, on voit que d_s et δ_s, aussi bien que $90 - d_p$ et δ_p, disparaissent en même temps, et que, pour le même angle d'incidence et le même plan d'incidence,

$$\frac{\operatorname{tang} \delta_s}{\operatorname{tang} d_s} = \frac{\cot d_p}{\operatorname{tang} \delta_p}.$$

L'expression générale pour l'azimut δ du plan de polarisation du rayon réfléchi, l'azimut de la polarisation primitive étant α $\left(\operatorname{tang} \alpha = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}\right)$, est la suivante,

$$(9) \qquad \operatorname{tang} \delta = \frac{\frac{p}{s} \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \delta_s}{1 - \cot d_p \operatorname{tang} \alpha}.$$

§ X.

Jusqu'à présent j'ai admis que $\pi^2 - \mu^2$ était une très-petite quantité par rapport à $1 - \mu^2$, ce qui est vrai lorsque le cristal est entouré d'air. Mais si $1 - \mu^2$ est lui-même une petite quantité ou presque égal à zéro, il existe alors des propriétés qu'il est d'autant plus intéressant de rechercher, que Brewster les a depuis longtemps étudiées expérimentalement, et qu'il paraît avoir tout recemment entrepris sur ce sujet des recherches qui promettent beaucoup. Ce cas a lieu lorsque sur la face réfléchissante du cristal se trouve une couche d'un liquide dans lequel la lumière a sensiblement la même vitesse de propagation que dans le cristal. Il resulte de là que quelques quantités qui dépendent de la double réfraction reçoivent des valeurs exagérées, par exemple l'angle que nous avons appele la *déviation* du plan de polarisation, lequel, lorsque la lumière tombe de l'air sur le cristal, est seulement de quelques degrés, et qui, pour un choix convenable du liquide, peut aller jusqu'à 90°. Ce fut par les énormes accroissements de cet angle que Brewster fut conduit à la decouverte de la *déviation* du plan de polarisation. (*Philos. Trans.*, 1819.)

Je vais donc encore une fois m'occuper des equations de l'angle de polarisation et de la polarisation, dans l'hypothèse où $1-\mu^2$ serait une petite quantité, ou bien φ peu différent de φ'.

Si l'on développe l'équation de l'angle de polarisation (16), § VIII, suivant les puissances de $\sin(\varphi-\varphi') = \dfrac{(1-\mu^2)\sin^2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')}$, et si l'on néglige les termes du troisième ordre ou d'un degré plus élevé par rapport à $1-\mu^2$ et $\pi^2-\mu^2$, on obtient

$$(1)\quad (1-\mu^2)\cos(\varphi+\varphi')-(\pi^2-\mu^2)[A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')+A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi']=0.$$

Dans cette équation on peut poser avec le même degré d'approximation

$$\cos(\varphi+\varphi') = \cos 2\varphi' - \frac{1-\mu^2}{\mu^2}\sin^2\varphi' :$$

posant ensuite pour $\cos 2\varphi'$ sa valeur $\cos^2\varphi'-\sin^2\varphi'$, et divisant l'équation par $\cos^2\varphi'$, on obtient

$$(2)\qquad \tang^2\varphi' = \frac{\mu^2[(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2]}{[1-\mu^2-(\pi^2-\mu^2)\sin^2\omega]A^2+[1-\mu^2-\mu^2(\pi^2-\mu^2)]C^2}.$$

d'où

$$(3)\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2}{1-\mu^2\pi^2-(\pi^2-\mu^2)A^2\sin^2\omega}.$$

Pour le cas où $\sin\omega = 0$, cette expression donne pour le sinus de l'angle de polarisation un résultat exact, le même que celui qui est donné par l'équation (7), § VIII.

Aussi longtemps que π^2 et μ^2 (ou bien, si, au lieu de supposer la vitesse de la lumière dans le liquide en contact avec le cristal égale à l'unité, on l'appelle v), aussi longtemps que $\dfrac{\pi^2}{v^2}$ et $\dfrac{\mu^2}{v^2}$ seront plus petits que l'unité, $\sin\varphi$ aura une valeur possible; cette valeur sera encore réelle si tous les deux à la fois sont plus grands que 1. On voit cela avec la plus grande facilité quand on pose

$$\frac{\pi^2}{v^2} = 1-\psi,\quad \frac{\mu^2}{v^2} = 1-\nu;$$

par là on obtient

$$(4)\qquad \sin^2\varphi = \frac{\psi A^2+\nu C^2}{[\psi+\nu-\psi\nu-(\nu-\psi)\sin^2\omega]A^2+(\psi+\nu-\psi\nu)C^2}:$$

et si l'on néglige le produit $\psi\nu$,

$$(5)\qquad \sin^2\varphi = \frac{\psi A^2+\nu C^2}{[\nu+\psi-(\nu-\psi)\sin^2\omega]A^2+(\nu+\psi)C^2}.$$

Les deux limites sont :

$$\psi = 0,\quad \sin^2\varphi = \frac{C^2}{1-A^2\sin^2\omega};$$

$$\nu = 0,\quad \sin^2\varphi = \frac{A^2}{1+A^2\sin^2\omega}.$$

La dernière équation a perdu toute signification, car, du moment où le liquide ambiant a exactement le même coefficient que le cristal pour la réfraction ordinaire, il n'y a plus aucun angle particulier de polarisation complète. Nous verrons que, dans ce cas particulier, tout rayon réfléchi est complétement polarisé. Nous éclaircirons plus tard cette singulière circonstance que l'équation (4) convienne pour toute valeur de ν aussi petite qu'on voudra et ne convienne plus pour $\nu = 0$.

L'équation (4) donne toujours pour φ une valeur réelle, tout autant que ν et ψ sont en même temps positifs ou en même temps négatifs. Mais si ces deux quantités ont des signes contraires, l'angle de polarisation devient impossible. Si, par exemple, le liquide ambiant possède un coefficient de réfraction qui tienne le milieu juste entre le coefficient de réfraction ordinaire et le coefficient de réfraction extraordinaire, si en outre $\psi = -\nu$, nous obtenons

$$\sin^2\varphi = \frac{A^2 - C^2}{\psi + 2A^2\sin^2\omega};$$

ce qui donne pour sin φ une valeur imaginaire, pour toutes les faces qui font avec l'axe un angle plus aigu que 45°, et pour les faces qui restent il n'y a qu'un nombre limité d'azimuts où l'angle de polarisation soit réel. Sur une face parallèle à l'axe, pour $\omega = 0$ l'angle de polarisation est donné par $\sin^2\varphi = \frac{1}{2+\psi}$; pour $\omega = 45°$, par $\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\psi}$; l'angle φ est ainsi très-près de 90°, et pour des valeurs plus petites de ω devient bientôt impossible. Dans l'azimut $\omega = 0$ il n'y a de valeurs réelles pour l'angle de polarisation que dans le petit intervalle de 45° à $A^2 - C^2 = \psi$ des inclinaisons des faces sur l'axe, et dans ce petit intervalle ces valeurs passent de 0° à 90°; on voit donc qu'en mettant un semblable liquide sur la face d'un cristal, l'influence de la structure cristalline sur l'angle de polarisation peut être énormément exaltée.

L'équation pour la déviation du plan de polarisation (1), § IX, se change dans l'équation

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{(\mu^2 - \pi^2)A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')}{1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2)A^2\sin^2\omega}$$

quand à la place de $\cos(\varphi + \varphi')$ on met sa valeur, tirée de l'équation (1) de ce paragraphe, savoir,

$$\cos(\varphi + \varphi') = \frac{(\pi^2 - \mu^2)(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi')}{1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2)A^2\sin^2\omega}. \tag{6}$$

Cette formule devrait représenter les observations que Brewster a fait connaître dans les *Trans. Philos.*, 1819, sur les déviations de la polarisation à la limite commune du spath calcaire et de l'huile de cassia, si elles avaient été exactement observées sous l'angle de polarisation, ce qui ne paraît pas être; car cet angle varie entre 30° et 45° environ à la face naturelle du spath couvert d'huile de cassia, et Brewster semble n'avoir observé que dans le voisinage de l'incidence 45°. Je vais cependant, à l'aide de cette formule, calculer la déviation du plan de polarisation pour le cas où la face du spath calcaire couverte d'huile de cassia est le plan réfléchissant, et rapprocher mes resultats des observations de Brewster. Si nous ne trouvons pas, en raison de la circonstance que j'ai indiquée, une grande concordance entre le calcul et l'observation, la marche des déviations du plan de polarisation sera du moins la même, ce qu'on doit déjà considérer comme une sorte de vérification de l'équation (5). La formule de la déviation se change, quand le plan réflecteur est incliné de 90° sur l'axe, ce qui est à peu près le cas des faces de clivage du spath calcaire, en

$$(7)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\frac{\mu^2-\pi^2}{2}\sin\omega\,(\sin\varphi' + \cos\omega\cos\varphi')}{1-\mu^2-\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2\omega}.$$

Comme l'indice de réfraction de l'huile de cassia n'est pas connu exactement, je prendrai pour base de mon calcul l'observation de Brewster, qui, pour l'azimut $\omega = 42°$, donne $\alpha = 90°$; on déduit de là, si, au lieu de μ et π, on écrit $\frac{\mu}{\nu}$ et $\frac{\pi}{\nu}$, l'équation

$$\nu^2 = \mu^2 + \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2 42°,$$

dans laquelle $\frac{1}{\nu}$ doit être à peu près l'indice de réfraction de l'huile de cassia. Si, pour μ et π, on met leurs valeurs dans le spath calcaire, savoir, $\mu = 0{,}60288$, $\pi = 0{,}67254$, on trouve $\nu^2 = 0{,}3834$ et $\nu = 0{,}6192$. Cette valeur de ν s'accorde presque exactement avec une détermination directe de l'indice de réfraction de l'huile de cassia, prise par Brewster et calculée par J. Young (Herschel, *Traité de la lumière*, traduct. de M. Quetelet, p. 291), d'après laquelle $\nu = 0{,}6158$.

Dans le tableau suivant j'ai placé les angles de polarisation calculés avec $\nu = 0{,}6192$, et les déviations du plan de polarisation à la face de clivage du spath calcaire couvert d'huile de cassia.

	ANGLES de polarisation.	DÉVELOPPEMENT du plan de polarisation.	OBSERVATIONS de Brewster.
0°	47° 16′	0°	0°
12	46.11	— 35.41′	— 45
42	37.47	90	90
90	31.30	— 41.53	+ 45
180	47.16	0	0

Le cas où le liquide qui entoure le cristal a presque exactement l'indice ordinaire de réfraction de ce cristal mérite une considération toute spéciale. μ est alors $= 1$, et, si l'on développe les expressions de p, s, p', s', dans l'éq. (5), § VII, pour ce cas on trouve

(8) $$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{(C^2\sin^2\varphi - A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},\\ s' &= \frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},\\ p' &= \frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},\\ s &= \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)}, \end{aligned}\right.$$

et de là, d'après l'équation (4), § VII,

$$R_p = \frac{(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)P + A\sin\omega S}{1-\gamma^2}\cdot(C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},$$

$$R_s = \frac{(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)P + A\sin\omega S}{1-\gamma^2}\,A\sin\omega\,\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)};$$

d'où il résulte que le quotient de R_p par R_s est indépendant de P et de S, que, en outre, quelle que soit la direction de la lumière incidente, la lumière réfléchie est toujours complétement polarisée, et polarisée dans l'azimut a, pour lequel

(9) $$\tang a = \frac{R_p}{R_s} = \frac{C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi}{A\sin\omega}.$$

Le résultat est le même, que la lumière incidente soit polarisée ou non polarisée. L'azimut a a une signification physique simple. Si l'on imagine dans le cristal une onde extraordinaire parallèle à l'onde réfléchie, l'azimut du plan de polarisation de cette onde extraordinaire sera identique avec celui de l'onde réfléchie avec a.

Cet azimut est d'ailleurs la limite de la déviation du plan de polarisation dans (6), quand on y fait $\mu = 1$. Si l'on appelle ν l'inclinaison du rayon incident sur l'axe, de manière qu'on ait

$$\sin^2\nu = 1-\gamma^2 = A^2\sin^2\omega + (C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)^2,$$

et ν' l'inclinaison du rayon réfléchi sur l'axe, d'où

$$\sin^2\nu' = A^2\sin^2\omega + (C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)^2,$$

on a, si la lumière incidente n'est pas polarisée, pour l'intensité de la lumière réfléchie,

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2\nu'}{\sin^2\nu}\cdot\frac{\sin^2(\varphi''-\varphi)}{\sin^2(\varphi''+\varphi)}.$$

Si la lumière incidente est polarisée dans l'azimut b, et si

$$\tang b = -\frac{A\sin\omega}{C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi},$$

il n'y a aucune portion de lumière réfléchie; le maximum de lumière réfléchie a lieu lorsque la polarisation a lieu dans l'azimut c, pour lequel

$$\operatorname{tang} c = \frac{C \sin \varphi - A \cos \omega \cos \varphi}{A \sin \omega}.$$

Si donc on divise la lumière incidente en deux parties polarisées dans chacun des azimuts rectangulaires b et c, la partie polarisée suivant c est seule réfléchie, et si on la désigne par C^2, on a, pour la quantité totale de lumière réfléchie,

$$(10)\qquad \frac{C^2 \sin^2 \nu'}{\sin^2 \nu} \cdot \frac{\sin^2(\varphi'' - \varphi)}{\sin^2(\varphi + \varphi')};$$

ν et ν' désignant les inclinaisons de l'axe optique sur le rayon incident et sur le rayon réfléchi; les deux azimuts b et c sont ceux suivant lesquels se polarise une onde intérieure au cristal parallèle à l'onde incidente, selon que cette onde est ordinaire ou extraordinaire.

J'ai dit précédemment que l'équation (4) a encore lieu pour de très-petites valeurs de ν, mais non plus pour $\nu = 0$ ou $\mu^2 = 1$. Ceci résulte de ce que l'équation

$$ps - p's' = 0,$$

dont est dérivée l'équation (4), a le facteur $(\mu^2 - 1)$. Pour comprendre comment la signification de l'angle de polarisation complète disparaît aussi soudainement en apparence, il faut rechercher un point de vue plus général de la polarisation par réflexion à la surface des cristaux. Comme les cristaux, les milieux non cristallisés réfléchissent, quelle que soit l'incidence, une portion de lumière polarisée, et cette portion augmente de plus en plus à mesure que μ approche de la valeur 1, pour laquelle, sous toutes les incidences, la quantité polarisée est égale à la quantité réfléchie.

L'azimut de polarisation de la partie polarisée dans la lumière réfléchie ne coïncide pas avec le plan d'incidence, comme dans les corps non cristallisés, mais il dépend ici de la direction du rayon réfléchi. Soit I^2 l'intensité de la lumière naturelle incidente; décomposons la lumière réfléchie en deux portions, l'une polarisée dans l'azimut β, l'autre dans un azimut perpendiculaire; la première étant désignée par $R_s'^2$, la seconde par $R_p'^2$, on a, d'après le § VIII,

$$R_s'^2 = \frac{I^2}{2}\left[(p \sin \beta + p' \cos \beta)^2 + (s' \sin \beta + s \cos \beta)^2\right],$$

$$R_p'^2 = \frac{I^2}{2}\left[(p \cos \beta - p' \sin \beta)^2 + (s' \cos \beta - s \sin \beta)^2\right].$$

La quantité de lumière polarisée dans la lumière réfléchie est le maximum de $(R_s'^2 - R_p'^2)$ par rapport à β.

On trouve

$$R_s'^2 - R_p'^2 = \left\{\left[(p'^2 + s^2) - (p^2 + s'^2)\right] \cos 2\beta + 2(pp' + ss') \sin 2\beta\right\} \frac{I^2}{2}.$$

et pour le maximum et le minimum, l'équation

$$o = [(p'^2 + s^2) - (p^2 + s'^2)] \sin 2\beta - 2\,(pp' + ss')\cos 2\beta,$$

dont les deux racines vers 90° sont différentes l'une de l'autre.

A l'aide de cette équation, on obtient la valeur de $(R_s'^2 - R_p'^2)$,

$$R_s'^2 - R_p'^2 = \frac{I^2}{2}\sqrt{[(p'^2 + s^2) - (p^2 + s'^2)]^2 + 4\,(pp' + ss')^2},$$

ou, en écrivant autrement,

$$R_s'^2 - R_p'^2 = \frac{I^2}{2}\sqrt{(p^2 + p'^2 + s^2 + s'^2)^2 - 4\,(ps - p's')^2}.$$

Comme la somme des portions de lumière réfléchies est

$$R_p'^2 - R_s'^2 = p^2 + p'^2 + s^2 + s'^2,$$

et comme $(ps - p's')$ contient le facteur $(1 - \mu^2)$, on voit que, pour des petites valeurs de $(1 - \mu^2)$, la lumière réfléchie sous une incidence quelconque est presque complétement polarisée, car ce qui n'est pas polarisé dépend de $(1 - \mu^2)^2$. La signification de l'équation (4) ne disparaît donc pas subitement avec $\mu^2 - 1 = 0$, mais elle perd peu à peu sa signification, et dans la pratique elle ne signifie plus rien longtemps avant $\mu^2 - 1 = 0$.

L'équation (7), au contraire, qui détermine l'azimut β de la plus forte polarisation, acquiert de plus en plus de l'importance. Cet azimut β coïncide avec l'azimut a déterminé dans l'éq. (6) ou avec l'azimut de l'éq. (5) α, quand $ps - p's' = 0$, suivant qu'un des facteurs de cette équation $1 - \mu^2$ ou l'autre $= 0$. Pour obtenir les valeurs de β, en général, avec approximation dans le cas où le cristal est recouvert d'un liquide qui réfracte la lumière presque aussi fortement que lui-même, on peut, dans les valeurs de p, p', s, s', en (5), § VII, négliger les plus hautes puissances de $\sin(\varphi - \varphi')$ et de $\sin(\varphi - \varphi'')$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\cos 2\varphi \sin(\varphi - \varphi')}{\sin 2\varphi} - \frac{C^2 \sin\varphi - A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi}{1 - \gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin 2\varphi},\\
s &= -\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin 2\varphi} - \frac{A^2\sin^2\omega}{1 - \gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin 2\varphi},\\
p' &= -\frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)}{1 - \gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin 2\varphi},\\
s' &= -\frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)}{1 - \gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin 2\varphi}.
\end{aligned}$$

Pour faire usage de la formule (7), j'admettrai que l'angle d'incidence atteigne 45°; on obtient alors

$$\tang 2\beta = \frac{\sqrt{2}\,A\sin\omega\,(C + A\cos\omega)\,[1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2)(1 - \gamma)^2(\mu^2 - \pi^2)]}{(1-\mu^2)^2 + 2A^2\sin^2\omega\,(\mu^2 - \pi^2)(1-\mu)^2 + [A^2\sin^2\omega - \frac{1}{2}(C + A\cos\omega)^2](1-\gamma^2)(\mu^2 - \pi^2)^2}.$$

Si l'on veut essayer cette formule par la réflexion à la face naturelle du spath calcaire, on doit poser

$$A = C = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \qquad \text{et} \qquad 1 - \gamma^2 = \tfrac{1}{2}\left[\sin^2\omega + \tfrac{1}{2}(1 - \cos\omega)^2\right],$$

et l'on trouve alors

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{\sqrt{2}\sin\omega\cos^2\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi^2 - 1}{\pi^2 - \mu^2} - \cos\frac{1}{2}\omega\right)}{\frac{1}{4}\left(2\,\frac{1 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2} - \sin^2\omega\right)^2 - \frac{1}{16}\sin^2\omega\,(\sin^2\omega + 8\cos\omega)}$$

J'ai calculé cette formule pour le cas où la face naturelle du spath calcaire est couverte d'huile de cassia dont l'indice de réfraction est, d'après les valeurs ci-dessus trouvées, égal à 1,6192. J'ai rassemblé dans la table suivante les azimuts calculés des plans de polarisation des rayons réfléchis sous une incidence de 45°; car il n'est pas sans intérêt de comparer dans un exemple numérique ces azimuts avec ceux qui sont donnés par la réflexion sous l'angle de la polarisation complète, azimuts dont les valeurs sont présentées dans la table qui précède.

ω	β
0°	0°
12	− 35.45'
14	− 41.19
40.22'	90
42	+ 87.22
90	+ 43.57
180	0

§ XI.

Les équations (3), § VII, contiennent la loi suivant laquelle la lumière réfractée se partage entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire. Les intensités I'^2, I''^2 de ces rayons sont entre elles comme les forces vives, d'où

$$I'^2 : I''^2 = D'^2 : D''^2\,U.$$

$$U = \frac{\sin 2\varphi''}{\sin 2\varphi'}\left[1 + \frac{\gamma''(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'')\sin(\varphi' + \varphi'')\sin(\varphi' - \varphi'')}{(1 - \gamma''^2)\sin\varphi''\cos\varphi''}\right].$$

D' et D'' ont la signification qui leur a été attribuée au § VII.

Si la lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, on a, d'après cela,

$$(1) \qquad I'^2 : I''^2 :: \frac{A^2\sin^2\omega}{1 - \gamma''^2}\sin^2(\varphi + \varphi') : \frac{(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2}{1 - \gamma'^2}\sin^2(\varphi - \varphi')\,U$$

Le rayon ordinaire disparaît donc, 1° quand le plan de réfringence est perpendiculaire à l'axe; 2° quand le plan d'incidence est parallèle à l'axe. Le rayon extraordinaire disparaît quand

$$(2)\qquad C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi' = 0,$$

c'est-à-dire quand le plan de polarisation du rayon ordinaire est perpendiculaire au plan d'incidence. Ce sont les mêmes rayons pour lesquels nous avons trouvé $\tang\delta_p = 0$ au § IX, et qui ont été construits au moyen de la surface conique M, *fig.* 7.

On a une valeur approximative du rapport $\frac{I'^2}{I''^2}$ quand pour U on met sa valeur et qu'on néglige la seconde puissance et les puissances plus élevées de $\sin(\varphi' - \varphi'')$,

$$(3)\qquad I'^2 : I''^2 = A^2\sin^2\omega : (C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2\left[1 - 2\frac{\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'+\varphi'')}\right].$$

Si le rayon incident est polarisé parallèlement au plan d'incidence, on a

$$(4)\quad I'^2 : I''^2 = \left[\frac{C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sqrt{1-\gamma''^2}}\right]^2 : \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2}\,U,$$

équation d'après laquelle le rayon extraordinaire disparaît, 1° quand $A = 0$; 2° quand $\sin\omega = 0$. Le rayon ordinaire disparaît quand

$$(5)\quad C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi') = 0,$$

ou, si l'on élimine φ' et φ,

$$\begin{aligned}&(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'')^2[\mu^2 - (\mu^2 - \pi^2)(1-\gamma''^2) - \sin^2\varphi'']\\ &= [\mu^2\cos\varphi''(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'') + (\mu^2 - \pi^2)A\cos\omega(1-\gamma''^2)]^2.\end{aligned}$$

Ces rayons appartiennent à un cône du quatrième ordre. On obtient approximativement pour la racine utile

$$(6)\qquad \tang\varphi'' = \frac{A\cos\omega}{C}\left[1 + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\mu^2}\,\frac{A^2\sin^2\omega(1 - A^2\sin^2\omega)}{C^2}\right],$$

de sorte que le cône (2) représente la première approximation.

Si l'on néglige les puissances supérieures de $\sin(\varphi' - \varphi'')$ on trouve, le rapport des deux intensités (4),

$$I''^2 : I'^2 = (C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2 : A^2\sin^2\omega\left[1 + 2\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi'+\varphi'')}\right].$$

Si le rayon incident est polarisé dans l'azimut a, on a généralement

$$(7)\quad I'^2 : I''^2 = \frac{\sin^2(\varphi-\varphi'')}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\,\frac{\left[\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin a - \frac{(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi'')\cos(\varphi'-\varphi'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}} + \gamma''\frac{(\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi'')}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(\varphi+\varphi'')}\cos a\right]^2}{\left[\left(\frac{C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right)\sin a + \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\cos(\varphi-\varphi')\cos a\right]^2 U}.$$

Pour un angle d'incidence donné, et un azimut donné du plan d'incidence, on peut toujours, par un choix convenable de l'azimut de polarisation du rayon incident, faire disparaître ou le rayon ordinaire ou le rayon extraordinaire. Si le rayon ordinaire doit disparaître, on a, pour l'azimut a' du plan de polarisation primitif,

$$(8)\qquad \operatorname{tang} a' = \frac{(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi'')}{A\sin\omega}\cos(\varphi-\varphi'') + \frac{\gamma''(\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi'')}{A\sin\omega\sin(\varphi+\varphi'')}.$$

Si c'est le rayon extraordinaire, l'azimut a'' est donné par

$$(9)\qquad \operatorname{tang} a'' = -\frac{A\sin\omega\cos(\varphi-\varphi')}{C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi''}.$$

J'ai vérifié ces deux formules par deux observations qui m'ont été communiquées par le D^r Seebeck.

Les deux azimuts a' et a'' ne sont pas à angle droit l'un sur l'autre, comme on pourrait s'y attendre d'après la règle donnée par M. Biot, dans son *Traité de Physique*, tome IV, page 368. Cette règle s'éloigne surtout de la réalité pour des angles d'incidence qui ne sont pas très-petits.

Si le plan réfringent est parallèle à l'axe, $(C=0)$; (a') et (a'') étant les azimuts correspondants, on a

$$\operatorname{tang}(a') = -\operatorname{cotang}\omega\cos\varphi''\cos(\varphi-\varphi'') + \operatorname{cotang}\omega\sin\varphi''\frac{\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi''}{\sin(\varphi+\varphi'')},$$

$$\operatorname{tang}(a'') = \operatorname{tang}\omega\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi'}.$$

La règle de M. Biot, ci-dessus citée, donne

$$\operatorname{tang}(a') = -\operatorname{cotang}\omega, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(a'') = \operatorname{tang}\omega.$$

La formule (9) a une signification simple. Elle détermine exactement l'azimut, dans lequel un rayon devrait être polarisé pour qu'après sa réfraction par un milieu non cristallisé il fût polarisé dans l'azimut suivant lequel le rayon ordinaire est polarisé dans un milieu cristallin. Des valeurs de a' de l'éq. (8), celle de première approximation convient seule.

Quand un faisceau de lumière naturelle tombe à la surface d'un milieu cristallisé, les deux faisceaux dans lesquels il se partage par réfraction n'ont pas, en général, une égale intensité. En employant, dans ce cas, les mêmes raisonnements que ceux qui nous ont donné, § VIII, les expressions de l'intensité de la lumière réfléchie quand la lumière incidente n'était pas polarisée, on a

$$(10)\qquad \frac{I'^2}{I''^2} = \frac{[A\sin\omega\sin(\varphi+\varphi'')]^2 + [(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi'')(C\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \gamma'(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi') \ldots]^2}{[(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi+\varphi')]^2 + [A\sin\omega\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') \ldots]^2}$$

Si l'on développe cette expression, et si l'on néglige tous les termes qui dépendent de $\sin(\varphi' - \varphi'')$, on obtient, comme premier terme du développement, une expression qui dépend seulement de la position des plans de polarisation des rayons réfractés,

$$\frac{\mathrm{I}'^2}{\mathrm{I}''^2} = \frac{1 - \dfrac{(\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi')^2}{1-\gamma'^2}\sin^2(\varphi-\varphi')}{1 - \dfrac{\mathrm{A}^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2}\sin^2(\varphi-\varphi')}.$$

§ XII.

Jusqu'à présent nous nous sommes occupés des phénomènes que présente la lumière à son entrée dans un milieu cristallisé à un axe; nous allons maintenant considérer l'émergence d'un rayon lumineux du même milieu. Les équations fondamentales (11), § VI, ne peuvent plus s'employer ici, comme cela a lieu pour un milieu non cristallisé; il faut les déduire tout de nouveau des principes développés au § II.

Soit, *fig.* 8, Ad une onde plane qui se meut dans l'intérieur d'un milieu cristallisé; soient AD, A$'$D$'$ les rayons qui lui appartiennent; cette onde sera à la limite du milieu AA$'$, partie réfractée dans l'onde plane As dont les rayons correspondants sont représentés par AS et A$'$S$'$, partie réfléchie dans les ondes A$'r'$ et A$'r''$, la première ordinaire, la seconde extraordinaire.

Les lignes AR$'$, A$'$R$'$ et AR$''$, A$'$R$''$ représentent les rayons qui correspondent à ces deux ondes. Supposons que l'onde incidente Ad soit une onde ordinaire; soit $\psi' = $ A$'$Ad son angle d'incidence; soient $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ les angles de réflexion de A$'r'$ et de A$'r''$; soit A$'$AS l'angle de réfraction égal i'.

Entre ces quatre angles ont lieu les équations suivantes :

$$(1) \qquad \sin^2 i' = \frac{\sin^2\psi'}{\mu^2} = \frac{\sin^2\xi'_{,}}{\mu^2} = \frac{\sin^2\xi''_{,}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,}},$$

où $\gamma''_{,}$ désigne le cosinus de l'inclinaison de la normale à l'onde A$'r''$ sur l'axe; les cosinus des angles correspondants pour les ondes Ad, A$'r'$ étant γ' et $\gamma'_{,}$.

Si l'onde incidente Ad est extraordinaire, soient désignés par ψ'' l'angle d'incidence, l'angle de réfraction par i'', et par $\xi'_{''}$ et $\xi''_{''}$ les deux angles de réflexion. Soient de plus $\gamma_{''}$, $\gamma'_{''}$, $\gamma''_{''}$ les sinus des inclinaisons respectives de l'onde incidente et des deux ondes réfléchies sur l'axe. Entre ψ'', i'', $\xi'_{''}$ et $\xi''_{''}$ ont lieu les équations suivantes :

$$(2) \qquad \sin^2 i'' = \frac{\sin^2\psi''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2} = \frac{\sin^2\xi'_{''}}{\mu^2} = \frac{\sin^2\xi''_{''}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{''}}.$$

Dans l'équation (1), $\sin\xi'_{,}$ et $\sin i'$ se déterminent immédiatement au moyen de la valeur donnée de $\sin\psi'$; pour $\sin\xi''_{,}$ on obtient, en mettant pour $\gamma''_{,}$ sa valeur, une équation du deuxième degré dans laquelle la racine négative donne la valeur de $\xi''_{,}$. La racine positive appartient à une onde extraordinaire située tout près de Ad qui, comme Ad, sort du cristal sous l'angle i'. C'est l'onde extraordinaire correspondante à l'onde ordinaire Ad. Si l'on appelle $\psi''_{,}$ l'inclinaison de cette onde extraordinaire sur le plan d'incidence, on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\xi''_{,} + \operatorname{tang}\psi''_{,} &= -\frac{2(\pi^2-\mu^2)\,\mathrm{AC}\cos\omega\sin^2 i'}{1-\pi^2\sin^2 i' + (\pi^2-\mu^2)\,\mathrm{A}^2\cos^2\omega\sin^2 i'},\\ \operatorname{tang}\xi''_{,} - \operatorname{tang}\psi''_{,} &= -\frac{(\pi^2\mathrm{A}^2+\mu^2\mathrm{C}^2)\sin i'}{1-\pi^2\sin^2 i' + (\pi^2-\mu^2)\,\mathrm{A}^2\cos^2\omega\sin^2 i'}.\end{aligned}\right.$$

Par l'équation (2), on déterminera i'' et $\xi''_{,}$ au moyen de ψ''; entre ψ'' et $\xi''_{,,}$ ont lieu des relations qu'on déduit de l'équation (3), quand à $\xi''_{,}$, $\psi''_{,}$, i', on substitue respectivement $\xi''_{,,}$, ψ'', i''. J'introduirai les angles $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $\xi'_{,,}$, $\xi''_{,,}$ avec leurs signes négatifs dans le calcul suivant.

Nommons α', β', γ' les cosinus des inclinaisons de la normale à l'onde incidente sur les trois axes coordonnés, quand elle est ordinaire; a', b', c' et $\alpha'_{,}$, $\beta'_{,}$, $\gamma'_{,}$, $\alpha''_{,}$, $\beta''_{,}$, $\gamma''_{,}$ les mêmes cosinus pour l'onde réfractée qui en provient et pour les deux ondes réfléchies. Si l'onde incidente est une onde extraordinaire, nous désignerons ces cosinus par α'', β'', γ''; a'', b'', c''; $\alpha'_{,,}$, $\beta'_{,,}$, $\gamma'_{,,}$, et $\alpha''_{,,}$, $\beta''_{,,}$, $\gamma''_{,,}$. On a, d'après l'équation (6), § IV,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \cos i' - \mathrm{C}\cos i'\cos\omega',\\ b' &= \sin i'\sin\omega',\\ c' &= \mathrm{C}\cos i' + \mathrm{A}\sin i'\cos\omega';\end{aligned}\right.$$

A, B = 0, C sont les sinus des angles que le plan réfringent fait avec les trois axes coordonnés. On déduit de là a'', b'', c'', en substituant i'' à i'; on a de plus α', β', γ', α'',..., $\alpha'_{,}$,..., $\alpha''_{,}$,..., $\alpha'_{,,}$,..., $\alpha''_{,,}$,..., en changeant i' en ψ', ψ'', $-\xi'_{,}$, $-\xi''_{,}$, $-\xi'_{,,}$, $-\xi''_{,,}$.

La vitesse d'oscillation dans l'onde incidente doit être désignée par D′ ou par D″, suivant que l'onde incidente est ordinaire ou extraordinaire. Les vitesses, dans les ondes réfléchies seront représentées respectivement par $\mathrm{R}'_{,}$ et $\mathrm{R}''_{,}$, si elles viennent de D′, et par $\mathrm{R}'_{,,}$ et $\mathrm{R}''_{,,}$ si elles viennent de D″.

Décomposons les vitesses dans l'onde réfractée parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence, et nommons S′ et P′ les composantes correspondantes à D′, et S″, P″ les composantes de D″. Les directions des vitesses D′ et D″ forment avec les axes coordonnés des angles dont je désigne les cosinus par (D'_a), (D'_b), (D'_c) et (D''_a), (D''_b), (D''_c). Les quantités $(\mathrm{R}'_{,a})$, $(\mathrm{R}'_{,b})$, $(\mathrm{R}'_{,c})$, $(\mathrm{R}''_{,a})$,..., $(\mathrm{R}'_{,,a})$,..., $(\mathrm{R}''_{,,a})$,... auront la signification analogue pour les vitesses $\mathrm{R}'_{,}$, $\mathrm{R}''_{,}$, $\mathrm{R}'_{,,}$, $\mathrm{R}''_{,,}$.

Les directions des vitesses P′, P″ et S′, S″ forment, avec les trois axes d'élasticité, des angles dont les cosinus sont E'_1, E'_2, E'_3; E''_1, E''_2, E''_3; G'_1, G'_2, G'_3; G''_1, G''_2, G''_3.

Ceci posé, le principe de l'égalité des composantes donne, quand l'onde incidente est une onde ordinaire, les equations suivantes :

$$
(5)\quad \begin{cases}
P'E'_1 + S'G'_1 = D'(D'_a) + R'_{,}(R'_{,a}) + R''_{,}(R''_{,a}),\\
P'E'_2 + S'G'_2 = D'(D'_b) + R'_{,}(R'_{,b}) + R''_{,}(R''_{,b}),\\
P'E'_3 + S'G'_3 = D'(D'_c) + R'_{,}(R'_{,c}) + R''_{,}(R''_{,c}).
\end{cases}
$$

Si l'onde incidente est extraordinaire, on obtient un système semblable; il suffit de mettre à la place de $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,a}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$, $R'_{,,a}$, etc. Les cosinus E'_1, E'_2, E'_3, $E''_{,}$,..., $G'_{,}$,...., $G''_{,}$,...., s'obtiennent des équations (8) et (9), § IV, en remplaçant φ successivement par i' et i''. Les cosinus (D'_a),.... et (D''_a),.... sont les mêmes que ceux qu'on a désignés, équations (13) et (12), § IV, par R'_a et R''_a,...., et l'on obtient $R'_{,a}$,...., $R''_{,a}$,..., $R''_{,,a}$,... en changeant α', β', γ', et α'', β'', γ'' en $\alpha'_{,}$, $\beta'_{,}$, $\gamma'_{,}$, $\alpha''_{,}$,... et $\alpha'_{,,}$,...., $\alpha''_{,,}$,....

Multipliant les équations (5) respectivement,

1°. par E'_1, E'_2, E'_3;

2°. Par F_1, F_2, F_3; ces lettres étant prises dans le sens de l'équation (7), § IV;

3°. Par A, $B = 0$, C, et faisant à chaque fois la somme des produits, on transforme les équations (5), comme il suit :

$$
(6)\quad \begin{cases}
P' = D'\dfrac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{,}}} + R'_{,}\dfrac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{,}}} - R''_{,}\dfrac{C\sin\xi''_{,} + A\cos\xi''_{,}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{,}}},\\[2ex]
S'\cos i' = -D'\cos\psi'\dfrac{C\sin\psi' - A\cos\omega\cos\psi'}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + R'_{,}\cos\xi'_{,}\dfrac{C\sin\xi'_{,} + A\cos\xi'_{,}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{,}}}\\
\qquad\qquad + R''_{,}\dfrac{A\sin\omega\cos\xi''_{,}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{,}}},\\[2ex]
S'\sin i' = -D'\sin\psi'\dfrac{C\sin\psi' - A\cos\omega\cos\psi'}{\sqrt{1-\gamma'^2}} - R'_{,}\sin\xi'_{,}\dfrac{C\sin\xi'_{,} + A\cos\xi'_{,}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{,}}}\\
\qquad\qquad - R''_{,}\dfrac{A\sin\omega\sin\xi''_{,}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{,}}},
\end{cases}
$$

si l'on a égard aux relations (2), a, § V, et qu'on y remplace R'_a,.... et R''_a,.... successivement par D'_a,...., $R'_{,a}$,...., et $R''_{,a}$,...., et φ' par ψ', $\xi'_{,}$, φ'' par $\xi''_{,}$, etc.

Pour former l'équation qui résulte du principe de la conservation des forces vives, il faut chercher le rapport d'un volume de l'onde incidente aux volumes correspondants qui reçoivent le mouvement dans l'onde réfractée et dans les ondes réfléchies. J'appellerai $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ les volumes ébranlés dans les ondes D' et D''.

Dans les ondes réfractées ces volumes seront $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{Q}''$; dans les ondes réfléchies $R'_{,}$, $R''_{,}$ je désignerai les volumes correspondants par $\mathfrak{P}'_{,}$, $\mathfrak{P}''_{,}$, ainsi que dans les ondes $R'_{,}$, $R''_{,,}$ je les représenterai par $\mathfrak{P}'_{,,}$, $\mathfrak{P}''_{,,}$. Alors on trouve, par les considérations qui nous ont conduits, dans le § V, aux équations (8) et (7), quand on y remplace αH, par

$\sin i'$ si l'onde incidente est une onde ordinaire, par $\sin i''$ si l'onde incidente est extraordinaire, les expressions suivantes :

$$\mathfrak{Q}' = \cos i' \sin i',$$
$$\mathfrak{Q}'' = \cos i'' \sin i'',$$
$$\mathfrak{P}' = \sin \psi' \cos \psi',$$
$$\mathfrak{P}'' = \sin \psi'' \cos \psi'' \left[\frac{1-(\pi^2-\mu^2)\gamma''\left(\frac{C}{\cos\psi''}-\gamma''\right)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}\right];$$
$$\mathfrak{P}'_{,} = \sin \xi'_{,} \cos \xi'_{,},$$
$$\mathfrak{P}'_{,,} = \sin \xi'_{,,} \cos \xi'_{,,},$$
$$\mathfrak{P}_{,} = \sin \xi''_{,} \cos \xi''_{,} \left[\frac{1-(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{,}\left(\frac{C}{\cos\xi''_{,}}-\gamma''_{,}\right)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2_{,}}\right],$$
$$\mathfrak{P}'_{,,} = \sin \xi''_{,,} \cos \xi''_{,,} \left[\frac{1-(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{,,}\left(\frac{C}{\cos\xi''_{,,}}-\gamma''_{,,}\right)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2_{,,}}\right].$$

L'équation des forces vives, quand l'onde incidente est une onde ordinaire,

$$D'^2\,\mathfrak{P}' = (P'^2 + S'^2)\,\mathfrak{Q}' + R'^2_{,}\,\mathfrak{P}'_{,} + R''^2_{,}\,\mathfrak{P}_{,},$$

se change, d'après cela, en

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & D'^2 \sin\psi' \cos\psi' - R'^2_{,} \sin\xi'_{,} \cos\xi'_{,} - R''^2_{,} \sin\xi''_{,} \cos\xi''_{,} \\ & \times \left[\frac{1-(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{,}\left(\frac{C}{\cos\xi''_{,}}-\gamma''_{,}\right)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{,}}\right] = (P'^2+S'^2)\sin i' \cos i'. \end{aligned}\right.$$

Cette équation du deuxième degré peut se ramener à une équation linéaire. On multiplie la seconde et la troisième des équations (6) l'une par l'autre, on retranche le produit de l'éq. (8), et l'on remarque que, d'après l'éq. (1), $\xi'_{,} = \psi$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} P'^2 \sin i' \cos i' = {} & D'^2 \sin\psi' \cos\psi' \frac{A^2 \sin^2\omega}{1-\gamma'^2} - R'^2_{,} \sin\xi'_{,} \cos\xi'_{,} \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2} \\ & - R''^2 \sin\xi''_{,} \cos\xi''_{,} \left\{\frac{(C\sin\xi''_{,} + A\cos\xi''_{,}\cos\omega)^2}{1-\gamma''^2_{,}} - \frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{,}(C-\gamma''_{,}\cos\xi''_{,})^2}{\cos\xi''_{,}[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2_{,}]}\right\} \\ & + D'R''_{,} \sin(\psi'-\xi''_{,}) \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \frac{(C\sin\psi' - A\cos\psi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma''^2_{,}}} \\ & + R'_{,} R''_{,} \sin(\psi'+\xi''_{,}) \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{,}}} \frac{(C\sin\xi'_{,} + A\cos\xi'_{,}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2_{,}}}. \end{aligned}$$

Cette equation est divisible par la première des equations (6); on obtient :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&P'\sin i'\cos i' = D'\sin\psi'\cos\psi'\,\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}} - R'_{,}\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,}\,\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}}\\ &+ R''_{,}\left\{\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\,\frac{(C\sin\xi''_{,} + A\cos\omega\cos\xi''_{,})}{\sqrt{1-\gamma_{,}''^{2}}} - \frac{(\pi^2-\mu^2)\sin\xi''_{,}\gamma''_{,}(1-\gamma_{,}'^{2})}{\sqrt{1-\gamma_{,}''^{2}}\,[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma_{,}''^{2}]}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie cette équation par la première des équations (6), et si l'on compare le produit avec l'équation précédente, on trouve que la justesse de l'équation (9) est subordonnée aux relations

$$\begin{aligned}\sin(\psi'-\xi''_{,})\cos(\psi'+\xi''_{,})(C\sin\xi''_{,} + A\cos\xi''_{,}\cos\omega) + \frac{(\pi^2-\mu^2)\sin^2\xi''_{,}\gamma''_{,}(1-\gamma_{,}''^{2})}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma_{,}''^{2}}\\ = -\sin(\psi'-\xi''_{,})(C\sin\psi' - A\cos\omega\cos\psi'),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\xi'_{,}+\xi''_{,})\cos(\xi''_{,}-\xi'_{,})(C\sin\xi''_{,} + A\cos\xi''_{,}\cos\omega) - \frac{(\pi^2-\mu^2)\sin^2\xi''_{,}\gamma''_{,}(1-\gamma_{,}''^{2})}{(\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma_{,}''^{2}}\\ = \sin(\xi'_{,}+\xi''_{,})(C\sin\xi'+A\cos\xi'\cos\omega),\end{aligned}$$

de la justesse desquelles on peut s'assurer en éliminant μ^2 et π^2 au moyen de

$$\sin^2\xi''_{,} = \sin^2 i\,[\pi^2 - (\pi^2-\mu^2)\gamma_{,}'^{2}]$$

et

$$-(\pi^2-\mu^2)(1-\gamma_{,}''^{2})\sin^2 i = \sin(\xi'_{,}+\xi''_{,})\sin(\xi'_{,}-\xi''_{,}).$$

Les équations (6) et (9) contiennent la théorie du cas où le rayon direct est un rayon ordinaire. J'ai déjà dit en quelles autres équations se transforment les équations (5) quand le rayon direct est un rayon extraordinaire.

Si l'on traite ces équations (5) comme on l'a fait à l'occasion des équations (6), on obtient les expressions suivantes :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}P'' &= D'\,\frac{C\sin\psi' - A\cos\omega\cos\psi'}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}} + R'_{,,}\,\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma_{,,}'^{2}}} - R''_{,}\,\frac{C\sin\xi''_{,,} - \cos\xi'_{,,}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma_{,,}''^{2}}},\\ S''\cos i' &= D''\,\frac{A\sin\omega\sin\psi''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} + R'_{,,}\cos\xi'_{,,}\,\frac{(C\sin\xi'_{,,} + A\cos\xi'_{,,}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}} + R''_{,,}\,\frac{A\sin\omega\cos\xi'_{,,}}{\sqrt{1-\gamma_{,}''^{2}}},\\ S'\sin i' &= D''\,\frac{A\sin\omega\sin\psi'}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}} - R'_{,,}\sin\xi'_{,,}\,\frac{(C\sin\xi'_{,,} + A\cos\xi'_{,,}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}} - R''_{,,}\,\frac{A\sin\omega\sin\xi'_{,}}{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}}.\end{aligned}\right.$$

L'équation des forces vives est

$$D''^2\,\mathfrak{P}'' = (P''^2 + S''^2)\,\mathfrak{Q}' + R'^2_{,,}\,\mathfrak{P}'_{,,} + R''^2_{,,}\,\mathfrak{P}''_{,,};$$

et en y mettant les valeurs de $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{Q}''$,..., tirées de l'équation (7), elle donne

$$D''^2 \sin\psi'' \cos\psi'' \left\{ 1 - \frac{(\pi^2 - \mu^2)(C - \gamma'' \cos\psi'')\gamma''}{\cos\psi''[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2]} \right\}$$

$$- R'^2_{,,} \sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} - R''^2_{,,} \sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \left\{ 1 - \frac{(\pi^2 - \mu^2)(C - \gamma''_{,,} \cos\xi''_{,,})\gamma''_{,,}}{\cos\xi''_{,,}[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,,}]} \right\}$$

$$= (P''^2 + S''^2) \sin i'' \cos i''.$$

En multipliant l'une par l'autre les deux dernières équations (10) et retranchant le produit de l'équation (11), on obtient

$$P'^2 \sin i' \cos i'' = D'' \left[\sin\psi'' \cos\psi'' \frac{(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')}{1 - \gamma''^2} - \frac{(\pi^2 - \mu^2)(C - \gamma'' \cos\psi'')\gamma'' \sin\psi''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2} \right]$$

$$- R'_{,,} \sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} \frac{A^2 \sin^2\omega}{1 - \gamma'^2_{,,}} - R''^2_{,,} \left[\sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \frac{(C\sin\xi''_{,,} + A\cos\omega\cos\xi''_{,,})}{1 - \gamma''^2_{,,}} - \frac{(\pi^2 - \mu^2)(C - \gamma''_{,,} \cos\xi''_{,,})\gamma''_{,,} \sin\xi''_{,,}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,,}} \right]$$

$$- D'' R'_{,,} \sin(\psi'' - \xi'_{,,}) \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma''^2}} \frac{C\sin\xi'_{,,} + A\cos\omega\cos\xi'_{,,}}{\sqrt{1 - \gamma'^2_{,,}}} - D''R'' \frac{\sin(\psi'' - \xi''_{,,}) A^2 \sin^2\omega}{\sqrt{1 - \gamma''^2}\sqrt{1 - \gamma''^2_{,,}}}$$

$$+ R'_{,,} R''_{,,} \sin(\xi'_{,,} + \xi''_{,,}) \frac{A\sin\omega (C\sin\xi'_{,,} + \cos\omega\cos\xi'_{,,})}{\sqrt{1 - \gamma'^2_{,,}}\sqrt{1 - \gamma''^2_{,,}}}.$$

Si l'on divise cette équation par la première des équations (10), on obtient :

$$P\sin i' \cos i' = D'' \left\{ \sin\psi'' \cos\psi'' \frac{(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')}{\sqrt{1 - \gamma''^2}} - \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''(1 - \gamma''^2)\sin^2\psi''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2]} \right\}$$

$$- R'_{,,} \sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2_{,,}}}$$

$$+ R''_{,,} \left\{ \sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \frac{C\sin\xi''_{,,} + A\cos\omega\cos\xi''_{,,}}{\sqrt{1 - \gamma''^2_{,,}}} - \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,,}(1 - \gamma''^2_{,,})\sin^2\xi''_{,,}}{\sqrt{1 - \gamma''_{,,}}[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,,}]} \right\}.$$

Si l'on multiplie cette équation par la première des équations (10), et si l'on compare ce produit avec l'équation précédente, on voit que les relations suivantes doivent avoir lieu :

1. $\sin(\xi'_{,,} - \psi'')\cos(\xi'_{,,} + \psi'')(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'') + \dfrac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''(1 - \gamma''^2)\sin^2\psi''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}$
$$= -\sin(\xi'_{,,} - \psi'')(C\sin\xi'_{,,} + A\cos\omega\cos\xi'_{,,}).$$

2. $\sin(\xi'_{,,} + \xi''_{,,})\cos(\xi'_{,,} - \xi''_{,,})(C\sin\xi''_{,,} + A\cos\omega\cos\xi''_{,,}) - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,,}(1 - \gamma''^2_{,,})\sin^2\xi''_{,,}$
$$= \sin(\xi'_{,,} + \xi''_{,,})(C\sin\xi'_{,,} + A\cos\xi'_{,,}\cos\omega),$$

3. $\sin(\psi'' - \xi''_{,,})\cos(\psi'' + \xi''_{,,})(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')(C\sin\xi''_{,,} + A\cos\omega\cos\xi''_{,,})$
$$+ \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''(1 - \gamma''^2)(C\sin\xi''_{,,} + A\cos\omega\cos\xi''_{,,})\sin^2\psi''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}$$
$$- \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,,}(1 - \gamma''^2_{,,})(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')\sin^2\xi''_{,,}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,,}}$$
$$= A^2\sin^2\omega\sin(\psi'' - \xi''_{,,}).$$

On peut facilement s'assurer de l'exactitude de la première et de la seconde des relations en remplaçant les quantités qui multiplient γ'' et $\gamma''_{\prime\prime}$ par $\sin^2\xi'_{\prime\prime}-\sin^2\psi''$ et $\sin^2\xi'_{\prime\prime}-\sin^2\xi''_{\prime\prime}$. Pour prouver la troisième relation, nous remarquons que

$$\frac{-(\pi^2-\mu^2)\sin^2\psi''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}=\frac{\sin^2\psi''-\sin^2\xi''_{\prime\prime}}{\gamma''^2-\gamma''^2_{\prime\prime}}=\frac{-(\pi^2-\mu^2)\sin^2\xi''_{\prime\prime}}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2_{\prime\prime}};$$

en substituant ces expressions dans la troisième relation, multipliant par $\gamma''^2-\gamma''^2_{\prime\prime}$ et opérant quelques réductions, on obtient

$$\begin{aligned}&[\gamma''(\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos\omega)+\gamma''_{\prime\prime}(\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\omega\cos\psi'')-\sin(\psi''+\xi''_{\prime\prime})]\\ \times&[\gamma''(\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos\omega)+\gamma''_{\prime\prime}(\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\omega\cos\psi'')]+\mathrm{A}^2\sin^2\omega(\gamma''^2-\gamma''^2_{\prime\prime})=0.\end{aligned}$$

Si l'on met à la place de γ'' et $\gamma''_{\prime\prime}$ leurs valeurs tirées de (2), et qu'on exécute les opérations indiquées, on trouve que cette équation est identiquement nulle.

Les lois d'après lesquelles la lumière à la sortie d'un milieu cristallisé est partie réfléchie, partie refractée, sont entièrement comprises dans les équations (6), (9), (10) et (12).

§ XIII *a*.

Pour plus de simplicité, j'adopterai les notations suivantes :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}=\sin y', &&\frac{\mathrm{C}\sin\psi'-\mathrm{A}\cos\psi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}=\cos y',\\ &\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}=\sin y'', &&\frac{\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\psi''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}=\cos y'',\\ &\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime}}}=\sin z'_{\prime}, &&\frac{\mathrm{C}\sin\xi'_{\prime}+\mathrm{A}\cos\xi'_{\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime}}}=-\cos z'_{\prime},\\ &\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime}}}=\sin z''_{\prime}, &&\frac{\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime}}}=-\cos z''_{\prime},\\ &\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime\prime}}}=\sin z'_{\prime\prime}, &&\frac{\mathrm{C}\sin\xi'_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi'_{\prime\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime\prime}}}=-\cos z'_{\prime\prime},\\ &\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}=\sin z''_{\prime\prime}, &&\frac{\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}=-\cos z''_{\prime\prime}.\end{aligned}\right.$$

On remarquera que ces quantités différentes y et z désignent les azimuts des plans de polarisation des rayons dans l'intérieur du cristal. Je poserai, de plus,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\gamma''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\xi'_{\prime\prime}-\psi'')\sin(\xi'_{\prime\prime}+\psi'')=\mathrm{I},\\ &\frac{\gamma''_{\prime}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime}}}\sin(\xi'_{\prime}-\xi''_{\prime})\sin(\xi'_{\prime}+\xi''_{\prime})=\mathrm{K}',\\ &\frac{\gamma''_{\prime\prime}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}\sin(\xi'_{\prime\prime}-\xi''_{\prime\prime})\sin(\xi'_{\prime\prime}+\xi''_{\prime\prime})=\mathrm{K}''.\end{aligned}\right.$$

Ainsi les équations (6) et (9) du précédent paragraphe se changent dans les suivantes :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{lll} P' = D' \sin y', & + R'_{,} \sin z'_{,}, & + R''_{,} \cos z''_{,}; \\ S' \cos i' = - D' \cos y' \cos \psi', & - R'_{,} \cos z'_{,} \cos \xi'_{,}, & + R''_{,} \sin z''_{,} \cos \xi''_{,}; \\ S' \sin i' = - D' \cos y' \sin \psi', & + R'_{,} \cos z'_{,} \sin \xi'_{,}, & - R''_{,} \sin z''_{,} \sin \xi''_{,}; \\ P' \sin i' \cos i' = D' \sin y' \sin \psi' \cos \psi', & - R'_{,} \sin z'_{,} \sin \xi'_{,} \cos \xi'_{,}, & - R''_{,} (\cos z''_{,} \sin \xi''_{,} \cos \xi''_{,} - K'); \end{array}\right.$$

et les équations (10) et (12) du même paragraphe se changent en

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{lll} P'' = D'' \cos y'', & + R'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime}, & + R''_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime}; \\ S'' \cos i'' = D'' \sin y'' \cos \psi'', & - R'_{\prime\prime} \cos z'_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime}, & + R''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime}; \\ S'' \sin i'' = D'' \sin y'' \sin \psi'', & + R'_{\prime\prime} \cos z'_{\prime\prime} \sin \xi'_{\prime\prime}, & - R''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \sin \xi''_{\prime\prime}; \\ P'' \cos i'' \sin i'' = D'' (\cos y'' \sin \psi'' \cos \psi'' + I), & - R'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime} \sin \xi'_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime}, & - R''_{\prime\prime} (\cos z''_{\prime\prime} \sin \xi''_{\prime\prime} \cos \xi''_{\prime\prime} - K''). \end{array}\right.$$

On tire de l'équation (3), si l'on observe que $\xi'_{,} = \psi'$:

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} R'_{,} = - D' \dfrac{\sin(i' - \psi')}{\sin(i' + \psi')} \left\{ \dfrac{[\sin y' \sin z''_{,} \cos(i' + \psi') + \cos y' \cos z''_{,} \cos(i' - \xi''_{,})] \sin(i' + \xi''_{,}) - \cos y' K'}{[\sin z'_{,} \sin z''_{,} \cos(i' - \psi') + \cos z'_{,} \cos z''_{,} \cos(i' - \xi''_{,})] \sin(i' + \xi''_{,}) - \cos z'_{,} K'} \right\}, \\ R''_{,} = - D' \sin(i' - \psi') \left\{ \dfrac{\sin y' \cos z'_{,} \cos(i' + \psi') - \cos y' \sin z'_{,} \cos(i' - \xi'_{,})}{[\sin z'_{,} \sin z''_{,} \cos(i' - \psi') + \cos z'_{,} \cos z''_{\prime\prime} \cos(i' - \xi'_{,})] \sin(i' + \xi''_{,}) - \cos z'_{,} K'} \right\}. \end{array}\right.$$

et de l'équation (4)

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{l} R'_{\prime\prime} = - \dfrac{D''}{\sin(i'' + \xi'_{\prime\prime})} \times \\ \left\{ \dfrac{[(\cos y' \sin z''_{,} \cos(i'' + \psi'') - \sin y'' \cos z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi''_{\prime\prime})] \sin(i'' - \psi'') \sin(i'' + \xi'') - \sin z''_{,} \sin(i'' + \xi_{\prime\prime})] I + \sin y'' \sin(i'' - \psi'') K'}{[\sin z'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi'_{\prime\prime}) + \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi''_{\prime\prime})] \sin(i'' + \xi''_{\prime\prime}) - \cos z'_{\prime\prime} K'} \right\}, \\ R''_{\prime\prime} = - D'' \left\{ \dfrac{[\cos y'' \cos z'_{\prime\prime} \cos(i'' + \psi'') + \sin y'' \sin z'_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi'_{\prime\prime})] \sin(i'' - \psi'') - \cos z'_{\prime\prime} I}{[\sin z'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi'_{\prime\prime}) + \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi''_{\prime\prime})] \sin(i'' + \xi''_{\prime\prime}) - \cos z'_{\prime\prime} K'} \right\}. \end{array}\right.$$

Pour l'usage pratique on développera ces expressions suivant les puissances de la différence des axes d'élasticité, et l'on n'aura à considerer que le premier terme.

Le premier terme, qui est indépendant de la différence des axes d'élasticité et qui ne dépend que de leur position, donne

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l} R'_{,} = - \dfrac{D' \sin(i' - \psi')}{\sin(i' + \psi')} \left[\sin y' \sin z'_{,} \dfrac{\cos(i' + \psi')}{\cos(i' - \psi')} + \cos y' \cos z'_{,} \right], \\ R''_{,} = - \dfrac{D' \sin(i' - \psi')}{\sin(i' + \psi')} \left[\sin y' \cos z'_{,} \dfrac{\cos(i' + \psi')}{\cos(i' - \psi')} - \cos y' \sin z'_{,} \right]; \end{array}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l} R'_{\prime\prime} = - \dfrac{D'' \sin(i'' - \psi'')}{\sin(i'' + \psi'')} \left[\cos y'' \sin z''_{\prime\prime} \dfrac{\cos(i'' + \psi'')}{\cos(i'' - \psi'')} - \sin y'' \cos z''_{\prime\prime} \right], \\ R''_{\prime\prime} = - \dfrac{D'' \sin(i'' - \psi'')}{\sin(i'' + \psi'')} \left[\cos y'' \cos z''_{\prime\prime} \dfrac{\cos(i'' + \psi'')}{\cos(i'' - \psi'')} + \sin y'' \sin z''_{\prime\prime} \right]. \end{array}\right.$$

De l'équation (3) on déduit pour la lumière réfractée, quand on observe que

$$\xi'_{,} = \psi', \qquad \cos z''_{,} \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,}) \cos(\xi'_{,} + \xi''_{,}) + \mathrm{K}' = \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}} \cos y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,}),$$

et

$$\sqrt{1-\gamma''^2_{,}} \sin z''_{,} = \sqrt{1-\gamma'^2} \sin y',$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}' &= + \frac{\mathrm{D}' \sin y' \sin 2\psi'}{\sin(i'+\psi')\cos(i'-\psi')} + \mathrm{R}''_{,} \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}} \frac{\cos y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\sin(i'+\psi')\cos(i'-\psi')}, \\ \mathrm{S}' &= - \frac{\mathrm{D}' \cos y' \sin 2\psi'}{\sin(i'+\psi')} + \mathrm{R}''_{,} \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}} \frac{\sin y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\sin(i'+\psi')}. \end{aligned} \right.$$

Pour exprimer les valeurs P″ et S″ plus simplement au moyen de l'équation (6), j'introduirai une nouvelle onde, à savoir, l'onde ordinaire correspondante à D″. Je désigne par $\psi'_{''}$ soninclinaison sur le plan réfringent, en sorte que $\psi'_{''} = \xi'_{''}$. Je désigne par $y'_{''}$ l'y relative à cette onde, et par $\varkappa'$ l'inclinaison de sa normale sur l'axe. On a donc

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \varkappa' &= \mathrm{C} \cos\psi'_{''} + \mathrm{A} \sin\psi'_{''} \cos\omega, \\ \cos y'_{''} &= \frac{\mathrm{C} \sin\psi'_{''} - \mathrm{A} \cos\psi'_{''} \cos\omega}{\sqrt{1-\varkappa'^2}}, \quad \text{et} \quad \sin y'_{''} = \frac{\mathrm{A} \sin\omega}{\sqrt{1-\varkappa'^2}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on observe maintenant que

$$\cos y'' \sin(\xi'_{''} + \psi'') \cos(\xi'_{''} - \psi'') + \mathrm{I}'' = \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}} \cos y'_{''} \sin(\psi'_{''} + \psi''),$$

$$\cos z''_{''} \sin(\xi'_{''} - \xi''_{''}) \cos(\xi'_{''} + \xi''_{''}) + \mathrm{K}'' = \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2_{''}}} \cos y'_{''} \sin(\xi'_{''} - \xi''_{''}),$$

et

$$\sqrt{1-\gamma''^2} \sin y'' = \sqrt{1-\gamma''^2_{''}} \sin z''_{''} = \sqrt{1-\varkappa'^2} \sin y'_{''},$$

on obtient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}'' &= \frac{\mathrm{D}'' \sqrt{\dfrac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}} \cos y'_{''} \sin(\psi'_{''} + \psi'')}{\sin(i''+\psi'_{''})\cos(i''-\psi'_{''})} \left[1 + \frac{\mathrm{R}''_{''}}{\mathrm{D}''} \sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{''}}} \frac{\sin(\xi'_{''} - \xi''_{''})}{\sin(\psi'_{''} + \psi'')} \right], \\ \mathrm{S}'' &= \frac{\mathrm{D}'' \sqrt{\dfrac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}} \sin y'_{''} \sin(\psi'_{''} + \psi'')}{\sin(i''+\psi'_{''})} \left[1 + \frac{\mathrm{R}''_{''}}{\mathrm{D}''} \sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{''}}} \frac{\sin(\xi'_{''} - \xi''_{''})}{\sin(\psi'_{''} + \psi'')} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dans les expressions (9) et (11) on peut, si l'on ne veut conserver que les premières puissances de $(\pi^2 - \mu^2)$, en place de $\frac{\mathrm{R}''_{,}}{\mathrm{D}'}$ et $\frac{\mathrm{R}''_{''}}{\mathrm{D}''}$, mettre leurs valeurs approchées, déduites des équations (7) et (8).

Les équations (5), (6), (9), (11) donnent des valeurs imaginaires entre les limites de la réflexion totale, comme cela a lieu dans les milieux non cristallisés.

On sait que dans le cas de la réflexion totale P' et S', P'' et S'' disparaissent.

Les valeurs de $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ peuvent se déterminer pour ce cas par le même raisonnement que Fresnel a appliqué au cas analogue dans les milieux non cristallisés, raisonnement peu concluant par lui-même, mais qui a reçu la sanction d'observations nombreuses. J'appliquerai ce raisonnement seulement aux valeurs approchées (7) et (8). $R'_{,}$ prend, quand $\sin i' > 1$, la forme $A + B\sqrt{-1}$. D'après l'analogie du raisonnement de Fresnel, l'intensité de la lumière réfléchie serait en réalité

$$A^2 + B^2 = (A + B\sqrt{-1})(A - B\sqrt{-1}).$$

On obtient $A - B\sqrt{-1}$, en mettant dans la valeur de $R'_{,}$, $180^\circ - i'$ partout à la place de i'. De cette manière on tire des équations (7) et (8), si, dans le cas de réflexion totale, on désigne les vitesses réfléchies par $(R'_{,})$, $(R''_{,})$, $(R'_{,,})$, $(R''_{,,})$,

$$\begin{aligned}
(R'^{2}_{,}) &= D'^{2}[\cos^2(y' - z') - L' \sin 2y' \sin 2z'],\\
(R''^{2}_{,}) &= D'^{2}[\sin^2(y' - z') + L' \sin 2y' \sin 2z'],\\
(R'^{2}_{,,}) &= D''^{2}[\sin^2(y'' - z'') + L'' \sin 2y'' \sin 2z''],\\
(R''^{2}_{,,}) &= D''^{2}[\cos^2(y'' - z'') - L'' \sin 2y'' \sin 2z''].
\end{aligned}$$

$$L' = \frac{\sin \psi'}{\mu^2 - (1+\mu^2)\sin^2\psi'}, \quad \text{et} \quad L'' = \frac{\sin \psi''}{\mu^2 - (1+\mu^2)\sin^2\psi''}.$$

Des quatre rayons réfléchis, deux seulement, $(R''_{,})$, $(R'_{,,})$, disparaissent dans certains cas particuliers, savoir, 1° quand le plan réflecteur est perpendiculaire à l'axe; 2° quand l'azimut du plan d'incidence $= 0$; 3° quand l'azimut du plan d'incidence $= 90^\circ$, et qu'en même temps le plan réfléchissant est parallèle à l'axe. Les rayons $(R'_{,})$ et $(R''_{,,})$, au contraire, ne disparaissent pas.

§ XIII *b*.

Des équations (11) résulte une loi très-simple pour la position du plan de polarisation d'un rayon extraordinaire à sa sortie d'un milieu cristallin. Si l'on désigne son azimut par rapport au plan d'émergence par α'', on a

$$(12) \qquad \tan\alpha'' = \frac{P''}{S''} = \frac{\cot y''_{,,}}{\cos(i'' - \psi''_{,,})}.$$

Si l'on désigne le même angle pour le rayon ordinaire par α', de telle sorte que $\tan\alpha' = \frac{P'}{S'}$, on a, en négligeant les puissances supérieures de $(\xi'_{,} - \xi''_{,})$,

$$(13) \qquad \tan\alpha' = \frac{\tan y'}{\cos(i' - \psi')}\left[1 + \frac{R''_{,}}{D'}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\sin y' \cos y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}\right].$$

où pour $\frac{R''_{,}}{D'}$ on doit mettre sa valeur tirée de l'équation (7).

Des équations (9) et (10) on peut facilement déduire l'intensité de la lumière du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire à leur sortie du milieu cristallisé, savoir, $P'^2 + S'^2$, et $P''^2 + S''^2$. Ces expressions seront d'une grande importance pour les recherches photométriques. Pour employer les expressions (9) et (10) dans ce cas et dans des cas semblables, on devra connaître les valeurs de D′ et D″. Dans la plupart des cas ce seront les vitesses dans les rayons conjugués, entre lesquels un rayon donné se partage à son entrée dans un milieu cristallisé. Elles sont alors données par les formules (3), § VII, si l'on introduit dans ces formules les azimuts des plans de polarisation D′ et D″, pour les exprimer indépendamment de la position du plan suivant lequel la lumière a pénétré dans le milieu, c'est-à-dire, si l'on pose dans les formules (3), § VII,

$$\frac{A \sin \omega}{\sqrt{1-\gamma_{,}^{2}}} = \sin x', \quad \frac{C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi'}{\sqrt{1-\gamma_{,}^{2}}} = \cos x',$$

$$\frac{A \sin \omega}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} = \sin x'', \quad \frac{C \sin \varphi'' - A \cos \omega \cos \varphi''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} = \cos x'',$$

et de plus

$$\frac{\gamma''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} \sin(\varphi' - \varphi'') \sin(\varphi' + \varphi'') = G.$$

On a

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} D' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')} \left\{ \frac{[P \sin x'' - S \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')] \sin(\varphi + \varphi'') - SG}{[\sin x_{,} \sin x_{,,} \cos(\varphi - \varphi') + \cos x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')] \sin(\varphi + \varphi'') + \cos x' G} \right\}, \\ D'' &= \sin 2\varphi \left\{ \frac{[P \cos x' + S \sin x' \cos(\varphi - \varphi')]}{[\sin x' \sin x'' \cos(\varphi - \varphi') + \cos x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')] \sin(\varphi + \varphi'') + \cos x' G} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on néglige dans ces valeurs tous les termes qui dépendent de la différence des axes d'élasticité, on obtient, comme première approximation,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} D' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')} \left[\frac{P \sin x'}{\cos(\varphi - \varphi')} - S \cos x' \right], \\ D'' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')} \left[\frac{P \cos x'}{\cos(\varphi - \varphi')} + S \sin x' \right]. \end{aligned} \right.$$

Au moyen des équations (9), (11) et (15), on peut répondre à la question suivante :

Comment la lumière d'un rayon polarisé, après avoir traversé un prisme d'une substance cristallisée à un axe, s'est-elle partagée entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire ?

Je vais éclaircir ceci par l'application à quelques cas particuliers qui peuvent être importants pour la pratique.

1. *Les plans d'immergence et d'émergence du rayon dans le prisme coïncident, et les arêtes du prisme sont perpendiculaires à l'axe optique.* Alors, pour le rayon immer-

gent comme pour les rayons émergents, $\omega = 0$; par suite

$$\sin x' = \sin x'' = \sin y' = \sin y'' = \sin z'_{\prime} = \sin z''_{\prime} = \sin z'_{\prime\prime} = \sin z''_{\prime\prime} = 0.$$

et l'on obtient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
D' &= -\frac{S \sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')},\\
D'' &= \frac{P \sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'') + G},\\
P' &= 0,\\
S' &= -\frac{D' \sin 2\psi'}{\sin(i' + \psi')},\\
P'' &= \frac{D''\sqrt{\dfrac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}}\sin(\psi'_{\prime\prime} + \psi'')}{\sin(i''+\psi'')\cos(i''-\psi'')}\left[1 - \frac{\cos(i''+\psi'')\sin(i''-\psi'') - I}{\cos(i''-\xi''_{\prime\prime})\sin(i''+\xi''_{\prime\prime}) - K''}\sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}\frac{\sin(\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime})}{\sin(\psi'_{\prime\prime} + \psi''_{\prime\prime})}\right],\\
S'' &= 0.
\end{aligned}\right.$$

D'où le rapport des intensités de la lumière dans les deux rayons après leur sortie du prisme,

$$(17)\quad \frac{P'^2 + S'^2}{P''^2 + S''^2} = \frac{\dfrac{1-\gamma''^2}{1-\varkappa'^2}\left[\dfrac{\sin 2\psi'}{\sin(\psi'_{\prime\prime} + \psi'')}\dfrac{\sin(i''+\psi'')}{\sin(i'+\psi')}\cos(i''-\psi'')\right]^2\left[\dfrac{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') + G}{\sin(\varphi+\varphi')}\right]^2\dfrac{S^2}{P^2}}{\left[1 - \dfrac{\cos(i''+\psi'')\sin(i''-\psi'') - I}{\cos(i''-\xi''_{\prime\prime})\sin(i''+\xi''_{\prime\prime}) - K}\sqrt{\dfrac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}\dfrac{\sin(\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime})}{\sin(\psi'_{\prime\prime} + \psi''_{\prime\prime})}\right]^2}$$

2. *Les arêtes du prisme sont parallèles à l'axe, et les plans d'immergence et d'émergence leur sont perpendiculaires.* Alors $C = 0$ et $\omega = 90°$; ainsi

$$\cos x' = \cos x'' = \cos y' = \cos y'' = \cos z'_{\prime} = \cos z''_{\prime} = \cos z'_{\prime\prime} = \cos z''_{\prime\prime} = 0.$$

$$\gamma' = \gamma'' = \gamma'_{\prime} = \gamma''_{\prime} = \gamma'_{\prime\prime} = \gamma''_{\prime\prime} = \varkappa' = 0.$$

D'après cela

$$\begin{aligned}
D' &= \frac{P \sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')},\\
D'' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi'')},\\
P' &= \frac{D' \sin 2\psi' S}{\sin(i'+\psi')\cos(i'-\psi')},\\
S' &= 0,\\
S'' &= \frac{D''\sin(\psi'_{\prime\prime} + \psi'')}{\sin(i'' + \psi'_{\prime\prime})}\left[1 - \frac{\sin(i''-\psi'')\sin(\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime})}{\sin(i''+\psi'')\sin(\psi'_{\prime\prime} + \psi'')}\right].\\
P'' &= 0,
\end{aligned}$$

et le rapport des intensités dans le rayon ordinaire et dans le rayon extraordinaire après émergence,

$$(18)\quad \frac{P'^2+S'^2}{P''^2+S''^2}=\frac{\left[\frac{\sin 2\psi' \sin(i'+\psi'_{,,})}{\sin(\psi'_{,,}+\psi'')\sin(i'+\psi')}\,\frac{1}{\cos(\varphi-\varphi')\cos(i'-\psi')}\right]^2 \frac{\sin^2(\varphi+\varphi'')}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\,\frac{P^2}{S^2}}{\left[1-\frac{\sin(i''-\psi'')}{\sin(i''+\psi'')}\,\frac{\sin(\xi'_{,,}-\xi''_{,,})}{\sin(\psi'_{,,}+\psi'')}\right]}.$$

Je vais encore appliquer les formules (9), (11), (13) au passage de la lumière à travers un milieu cristallisé séparé par deux plans parallèles d'un même milieu non cristallisé. Ce cas particulier, intéressant par lui-même à cause de son application à la théorie des couleurs que les lames minces cristallisées font apparaître dans la lumière polarisée, est surtout propre à la confirmation des formules (9), (11), (15), par le grand nombre et la variété des phénomènes qu'il offre à l'observateur.

Les formules (15) restent telles qu'elles sont pour ce cas; on a, au contraire, à faire dans les formules (7), (8), (9) et (11) les substitutions que voici :

$$\begin{array}{lll}
y' = x', & z'_{,} = z'_{,,} = z', & y'_{,,} = x', \\
y'' = x'', & z''_{,} = z''_{,,} = z'', & \\
i' = i'' = \varphi, & & \\
\psi' = \varphi', & \psi'' = \varphi'', & \psi'_{,,} = \varphi', \\
\xi'_{,} = \xi'_{,,} = \varphi', & \xi''_{,} = \xi''_{,,}, & \\
\varkappa' = \gamma', & \gamma'_{,} = \gamma'_{,,}, & \gamma''_{,} = \gamma''_{,,}.
\end{array}$$

D'après cela nous obtenons, si pour la symétrie de l'expression nous mettons φ''' à la place de $\xi''_{,}$ ou $\xi''_{,,}$,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
P' &= \frac{D'\sin x'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}+R''_{,}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\cos x'\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')},\\
S' &= -\frac{D'\cos x'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}+R''_{,}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin x'\sin(\varphi-\varphi''')}{\sin(\varphi+\varphi')};
\end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
P'' &= \frac{D''\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[1+\frac{R''_{,,}}{D''}\sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi'+\varphi'')}\right],\\
S'' &= \frac{D''\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}\sin x'\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[1+\frac{R''_{,,}}{D''}\sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{,,}}}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi'+\varphi'')}\right],
\end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
R''_{,} &= -D'\sin(\varphi-\varphi')\left\{\frac{\sin x'\cos z'\cos(\varphi+\varphi')-\cos x'\sin z'\cos(\varphi-\varphi')}{[\sin z'\sin z''\cos(\varphi-\varphi')+\cos z'\cos z''\cos(\varphi-\varphi'')]\sin(\varphi+\varphi''')-\cos z'K}\right\};\\
R''_{,,} &= -D''\left\{\frac{[\cos x''\cos z'\cos(\varphi+\varphi'')+\sin x''\sin z'\cos(\varphi-\varphi')]\sin(\varphi-\varphi'')-\cos z'G}{[\sin z'\sin z''\cos(\varphi-\varphi')+\cos z'\cos z''\cos(\varphi-\varphi'')]\sin(\varphi+\varphi'')-\cos z'K}\right\},
\end{aligned}\right.$$

et

$$(22) \qquad K = \frac{\gamma''_{,}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}} \sin(\varphi' - \varphi'') \sin(\varphi' + \varphi''').$$

Si l'on ne veut conserver dans (19) et (20) que les premières puissances de $(\pi^2 - \mu^2)$, on peut poser

$$(23) \quad \begin{cases} R''_{,} = - D' \dfrac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} \left[\sin x' \cos z' \dfrac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')} - \cos x' \sin z' \right], \\ R''_{,,} = - D'' \dfrac{\sin(\varphi - \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi'')} \left[\cos x' \sin z' \dfrac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi'')} + \sin x' \sin z' \right]. \end{cases}$$

§ XIV.

Un rayon de lumière polarisé suivant l'azimut α est transmis par un milieu non cristallisé que limitent des plans parallèles ; il se dirige, après cette transmission, dans un azimut β, qui satisfait à la relation

$$\tang \beta = \frac{\tang \alpha}{\cos^2(\varphi - \varphi')} = \frac{P}{S \cos^2(\varphi - \varphi')};$$

ce rayon, reçu par une plaque de tourmaline, disparaît totalement si la direction du plan suivant lequel elle polariserait la lumière qui la traverse se trouve dans l'azimut β', pour lequel

$$(1) \qquad \tang \beta' = - \frac{S \cos^2(\varphi - \varphi')}{P}.$$

Substituons maintenant à la plaque non cristallisée une plaque mince de cristal, suffisamment mince pour que le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire ne soient pas séparés dans le rayon transmis. La lumière incidente doit ainsi rester polarisée dans l'azimut α où $\tang \alpha = \frac{P}{S}$, et je supposerai que la tourmaline soit encore dans l'azimut β', pour lequel $\tang \beta' = - \frac{S}{P} \cos^2(\varphi - \varphi')$. Le rayon ne sera pas complétement détruit, mais il y aura toujours certains azimuts de la ligne principale de la petite plaque cristalline, pour lesquels la lumière qui traverse est minimum. Ce sont ces azimuts que nous nous proposons de déduire de nos formules. Ils paraissent particulièrement propres à l'épreuve expérimentale d'où doit résulter la confirmation ou la réfutation des formules (17), (18) et (20). Je décomposerai la lumière en lumière polarisée suivant β' et en lumière polarisée perpendiculairement.

Les composantes du mouvement suivant β' proviennent de P' et S' dans l'équation (20); je les désignerai par O; j'appellerai E celles qui dérivent de P'' et S'';

on aura alors

$$\mathrm{O} = \mathrm{P}'\sin\beta' + \mathrm{S}'\cos\beta',$$
$$\mathrm{E} = \mathrm{P}''\sin\beta' + \mathrm{S}''\cos\beta';$$

et en remplaçant $\sin\beta'$ et $\cos\beta'$ par leurs valeurs déduites de l'équation (1), et P', P'',... par leurs valeurs tirées de l'équation (20), § XIII,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{O}\sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{S}^2\cos^2(\varphi-\varphi')}\\ &= \frac{\mathrm{D}'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}[\mathrm{P}\cos x' + \mathrm{S}\sin x'\cos(\varphi-\varphi')] - \mathrm{R}''_{,}\sqrt{\frac{1-\gamma_{,}^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}}\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}[\mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi')],\\ &\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{S}^2\cos^2(\varphi-\varphi')}\\ &= -\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}[\mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi')]\left[\frac{\mathrm{D}''\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')} + \mathrm{R}''_{,,}\sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma_{,}^{2}}}\frac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi+\varphi')}\right].\end{aligned}\right.$$

D'après ces expressions, on voit que $\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2$ ne peut, en général, être $= 0$, car O et E ne contiennent aucun facteur commun qui puisse être $= 0$; en sorte que la tourmaline, tout en se trouvant dans l'azimut β', ne peut faire disparaître en général le rayon transmis. Mais si la double réfraction est très-faible, et si l'on peut négliger les termes qui dépendent de $(\varphi'-\varphi'')$, on obtiendra, en mettant pour D' et D'' leurs valeurs tirées de l'équation (19),

$$\begin{aligned}&(\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2)[\mathrm{P}^2 + \mathrm{S}^2\cos^4(\varphi-\varphi')]\\ &= 2[\mathrm{P}\cos x' + \mathrm{S}\sin x'\cos(\varphi-\varphi')]^2[\mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi')]^2\frac{\sin^2 2\varphi\sin^2 2\varphi'}{\sin^4(\varphi+\varphi')\cos^2(\varphi-\varphi')},\end{aligned}$$

d'où il suit que $\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2$ est presque $= 0$, à des quantités du deuxième ordre près, dans deux cas :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &1^{\circ}.\ \text{Quand}\quad \mathrm{P}\cos x' + \mathrm{S}\sin x'\cos(\varphi-\varphi') = 0,\\ &2^{\circ}.\ \text{Quand}\quad \mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi') = 0.\end{aligned}\right.$$

De là on tire deux valeurs pour x', et de celles-ci, au moyen des équations (14), § XIII, deux azimuts ω, dans lesquels doit être placé le plan d'incidence pour que $\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2$ disparaisse. On tire de la première, en posant

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P}}\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi'} = \operatorname{tang}\Pi_{,},$$

$$\cos(\Pi_{,} + \omega) = \frac{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{\mathrm{S}\cos(\varphi-\varphi')}{\mathrm{P}\cos\varphi'}\right]^2}}.$$

et de la seconde, en posant

$$\operatorname{tang} \Pi'' = \frac{P}{S \cos \varphi' \cos (\varphi - \varphi')},$$

$$\sin (\Pi_{''} + \omega) = \frac{\frac{C}{A} \operatorname{tang} \varphi'}{\sqrt{1 + \left[\frac{P}{S}\,\frac{1}{\cos(\varphi - \varphi') \cos \varphi'}\right]^2}}.$$

On voit qu'il n'y a pas pour toute valeur de φ une valeur possible pour ω. Aussi longtemps que le rayon réfracté fait avec la normale à la surface réfringente des angles plus petits que l'inclinaison de l'axe sur la même ligne, l'azimut ω est possible pour toute valeur de φ, quelle que soit d'ailleurs la valeur de $\frac{P}{S}$, c'est-à-dire de l'azimut du plan de polarisation du rayon incident.

Si $\operatorname{tang} \varphi' > \frac{A}{C}$, on doit avoir, quand la première équation est satisfaite par une valeur possible de ω,

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{A^2} - 1 < \left[\frac{S \cos (\varphi - \varphi')}{P}\right]^2;$$

et si la seconde est aussi, et sous la même condition, vérifiée par une valeur possible de ω, on doit avoir

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{A^2} - 1 < \left[\frac{P}{S \cos (\varphi - \varphi')}\right]^2.$$

Si les deux valeurs de ω déterminées par l'équation (3) sont à la fois possibles, ces deux équations de condition doivent en même temps subsister. En les multipliant l'une par l'autre, on obtient encore une troisième condition indépendante de $\frac{P}{S}$ qui doit être remplie, savoir,

$$\sin^2 \varphi' < 2 A^2.$$

Nous pouvons ainsi poser

$$\sin^2 \varphi' = (1 + \alpha) A^2, \quad (\alpha < 1):$$

nous n'avons besoin que de considérer les valeurs de α entre 0 et 1; car pour une valeur négative de α on a

$$\operatorname{tang}^2 \varphi' < \frac{A^2}{C^2},$$

et dans ce cas, comme nous l'avons déjà remarqué, les deux valeurs de ω sont toujours possibles. On peut donc écrire ainsi les deux premières conditions:

$$(4) \qquad \frac{P}{S \cos (\varphi - \varphi')} > \sqrt{\alpha}, \qquad \frac{P}{S \cos (\varphi - \varphi')} < \sqrt{\frac{1}{\alpha}}.$$

On obtient, si ω est déterminé par la première des équations (3),

$$(5)\qquad O_{,}^{2} + E_{,}^{2} = \frac{R_{,}''^{2}\,\dfrac{1-\gamma'^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}\left[\dfrac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\right]^{2}}{\sin^{2}x + \cos^{2}x\cos^{2}(\varphi-\varphi')};$$

$R_{,}''$ doit être déterminé par les équations (23) et (24), avec cette restriction que $\frac{P}{S} = -\operatorname{tang} x'\cos(\varphi-\varphi')$.

Si ω est déterminé par la seconde des équations (3), on a

$$(6)\qquad O_{,,}^{2} + E_{,,}^{2} = \frac{D'^{2}\sin^{2}2\varphi'}{\sin^{2}[(\varphi+\varphi')(\cos^{2}x + \sin^{2}x\cos^{2}(\varphi-\varphi')]},$$

où l'on doit faire entrer la valeur de D' tirée de l'équation (16), avec l'attention de faire $\frac{P}{S} = \operatorname{cotang} x\cos(\varphi-\varphi')$; ce qui donne, quand on s'arrête seulement aux premières puissances de $(\varphi'-\varphi'')$, après quelques réductions :

$$(7)\qquad D' = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[\frac{\gamma\sin(\varphi+\varphi')}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}} + \frac{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}\cos x'\,\frac{\cos\varphi'}{\cos(\varphi-\varphi')}\right]\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}.$$

Quand la double réfraction sera considérable, par exemple comme dans le spath calcaire, les observations donneront pour ω des valeurs un peu différentes de celles qu'on calcule à l'aide de l'équation (3). Cela aura lieu surtout dans les azimuts, pour lesquels $O^{2}+E^{2}$ est un minimum après substitution des valeurs complètes de l'équation (2). Les expressions (3) ne seront donc pas $=0$, mais auront des valeurs de l'ordre $\varphi'-\varphi''$, que je désignerai respectivement par X' et X''. Je chercherai les conditions sous lesquelles $O^{2}+E^{2}$ est un minimum, mais j'y tiendrai seulement compte des premières puissances de $(\varphi'-\varphi'')$. Posons donc

$$(8)\qquad P\cos x' + S\sin x'\cos(\varphi-\varphi') = X'.$$

En négligeant les puissances supérieures de $(\varphi-\varphi')$, nous obtenons

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} O'\sqrt{P^{2}+S^{2}\cos^{2}(\varphi-\varphi')} &= \left[\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^{2}(\varphi+\varphi')}X' + R_{,}''\sqrt{\frac{1-\gamma'^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\cos(\varphi-\varphi')\right]\frac{S}{\cos x'},\\ E'\sqrt{P^{2}+S^{2}\cos^{2}(\varphi-\varphi')} &= \left[\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^{2}(\varphi+\varphi')}X'\right]\frac{S}{\cos x'}.\end{aligned}\right.$$

Ceci posé dans $O^{2}+E^{2} = \text{min.}$, donne

$$(10)\qquad X' = -R_{,}''\sqrt{\frac{1-\gamma'^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi-\varphi')}{2\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}.$$

ou, en observant que d'après l'équation (16) du paragraphe précédent, eu égard à l'équation (8), on peut poser

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \frac{R''_{,}}{D'}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi''')}{2\sin 2\varphi'}\,\frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{\cos x'},\\ D' &= -\frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi-\varphi')}\,\frac{S}{\cos x'},\end{aligned}\right.$$

$\dfrac{R''_{,}}{D'}$ se remplace, d'après l'équation (23), § XIII, par

$$\frac{R''_{,}}{D'} = -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[\sin x'\cos z' - \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\cos x'\sin z'\right].$$

Des équations (8) et (11), on déduit x'. Si l'on désigne par Y' la première approximation de x', de sorte qu'on ait

$$\operatorname{tang} Y' = -\frac{P}{S\cos(\varphi-\varphi')},$$

on obtient

$$(12)\qquad \sin(x'-Y') = +\frac{R''_{,}}{D'}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2\sin 2\varphi'},$$

d'où l'on peut tirer ω au moyen de l'équation (14), § XIII. Cette valeur de ω réduit $O^2_{,} + E^2$ à la moitié de la valeur fournie par l'équation (5).

Si l'on pose dans l'équation (2)

$$(13)\qquad P\sin x' - S\cos x'\cos(\varphi-\varphi') = X'',$$

et si l'on ne conserve que les termes du premier ordre par rapport à $(\varphi'-\varphi'')$, on obtient

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} O''\sqrt{P^2+S^2\cos^4(\varphi-\varphi')} &= \frac{D'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{\sin x'},\\ E''\sqrt{P^2+S^2\cos^4(\varphi-\varphi')} &= -\frac{D'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}X'' = -\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\,\frac{S}{\sin x'}X'\end{aligned}\right.$$

On tire de l'équation (15), § XIII, si l'on ne conserve que les termes du premier ordre, et si l'on réduit,

$$D' = \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}$$
$$\left\{X''\sin(\varphi+\varphi') + S\left[\frac{\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\cos(\varphi+\varphi') + \cos x'\sin(\varphi+\varphi')\right]\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')\right\},$$

expression qui peut se transformer en

$$(15)\qquad D' = \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[X''\sin(\varphi+\varphi') + S\,\frac{C\cos\varphi - A\cos\omega\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')\right],$$

d'où resulte :

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} O''^2 + E''^2 = [P^2 + S^2\cos^2(\varphi-\varphi')] \\ \dfrac{\sin^2 2\varphi\sin^2 2\varphi'}{\sin^4(\varphi+\varphi')}\,\dfrac{S^2}{\sin^2 x}\left\{\left[X'' + S\,\dfrac{(C\cos\varphi - A\cos\omega\sin\varphi)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,\dfrac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\sin(\varphi'-\varphi'')\right]^2 + X''^2\right\}, \end{array}\right.$$

et la valeur pour laquelle $O''^2 + E''^2$ devient minimum est

$$(17)\qquad X'' = -\frac{S}{}\,\frac{C\cos\varphi - A\sin\varphi\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma_{\prime}^2}}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2}.$$

De cette équation et de l'équation (13), quand on désigne par Y'' la première approximation de x', Y'' satisfaisant à la condition

$$(18\,a)\qquad \operatorname{tang} Y'' = \frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{P},$$

on deduit :

$$(18)\qquad \sin(x'-Y'') = -\sin Y''\,\frac{(C\sin\varphi - A\cos\varphi\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\varphi-\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2}.$$

La valeur de ω qui lui correspond sera trouvée à l'aide de l'équation

$$\operatorname{tang} x' = \frac{A\sin\omega}{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}.$$

Il est bon de remarquer quelques cas particuliers.

Si dans l'équation (12) on fait $P = 0$, tang x' devient $= 0$, car dans ce cas $\frac{R'}{D'}$ devient aussi $= 0$, $\sin x'$ et $\sin z'$ disparaissant en même temps. De même, si l'on fait $S = 0$ dans l'équation (18), tang $x' = 0$. Ceci est strictement juste, comme le font voir les expressions O et E dans l'équation (2) ; le résultat qui s'en déduit immédiatement n'est pas moins exact, à savoir qu'un rayon polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence, conserve son plan de polarisation rigoureusement quand il est transmis par une plaque mince cristallisée, de manière que son plan d'incidence coïncide avec la section principale du cristal. Les deux cas suivants offrent un intérêt plus grand qu'aucun des autres.

1. Si dans l'équation (12) on fait $S = 0$, on détermine les conditions sous lesquelles un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence se trouve, le moins possible, modifié dans son azimut de polarisation par son passage à travers une lame mince.

Comme en même temps que $S = 0$, $\cos Y'$ est aussi $= 0$, et $\sin Y' = 1$, on a

$$\frac{R''_{,}}{D'} = -\tan(\varphi - \varphi')\cot g(\varphi + \varphi')\cos z',$$

et

$$(19)\qquad \sin(x' - Y') = -\cos x' = -\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\tan(\varphi-\varphi')\,\text{cotang}(\varphi+\varphi')\cos z'\,\frac{\sin(\varphi - \varphi'')}{2\sin 2\varphi'}.$$

Les formules (12) et (18) donnent en particulier la relation qui doit exister entre φ et ω pour que $O^2 + E^2$ devienne un minimum. On peut y regarder φ comme donné, et s'en servir pour déterminer ω, et c'est ce que nous avons fait jusqu'ici; mais à l'inverse on peut se donner ω et se proposer de trouver φ. Cette dernière signification de la formule (12) a de l'intérêt parce que les expériences peuvent en fournir la vérification dans le cas particulier représenté par l'équation (19). Il s'agit donc de déterminer, à l'aide de l'équation (19), l'angle d'incidence φ correspondant à une valeur donnée de ω. On peut, dans la formule (19), pour φ, φ' et $\varphi' - \varphi''$ mettre leurs valeurs qui résultent de $\cos x' = 0$, c'est-à-dire de

$$(20)\qquad C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega = 0.$$

Si l'on désigne par $\cos(x')$ la valeur de $\cos x'$ qui, d'après cette relation, doit sortir de l'équation (19), on a

$$(21)\qquad \frac{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = \cos(x'),$$

équation qui servira à trouver φ' et par conséquent φ; si l'on désigne la valeur de φ' qui doit se déduire de l'équation (20) par (φ'), et celle qui doit se déduire de l'équation (21) par $(\varphi') + \xi$, ξ étant une quantité de l'ordre $\cos(x')$, c'est-à-dire, à cause de l'équation (19), de l'ordre $(\varphi' - \varphi''')$, on a, en négligeant les puissances de $(\varphi' - \varphi''')$,

$$\xi = \frac{\sqrt{1-\gamma'^2}}{\gamma'}\cos(x').$$

Si l'on désigne par (φ) la valeur particulière de l'angle φ correspondante à (φ'), et par $(\varphi) + \psi$, la valeur de cet angle correspondante à $(\varphi') + \xi$, on a, par suite de l'équation $\sin((\varphi') + \xi) = \mu\sin[(\varphi) + \psi_{,}]$,

$$\psi_{,} = \frac{\cos(\varphi')}{\mu\cos(\varphi)}\,\xi_{,} = \frac{\sqrt{1-\gamma'^2}}{\mu\gamma'}\,\frac{\cos(\varphi')}{\cos(\varphi)}\cos(x');$$

si l'on observe que dans le degré d'approximation usité jusqu'ici,

$$\sin(\varphi' - \varphi''') = \frac{1-\gamma''^2_{,}}{(1-\gamma''^2)}\sin(\varphi' - \varphi),$$

on a finalement

$$(22)\qquad \psi_{,} = \frac{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}}{2\mu\gamma'}\,\frac{\cos\varphi'\cos z'}{\cos\varphi\sin 2\varphi'}\,\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')\,\mathrm{cotang}(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi''),$$

où pour les valeurs respectives de φ on doit mettre celles qui résultent de l'équation (20).

2. Si dans l'équation (18) on fait $P = 0$, $\cos Y'' = 0$, comme cela résulte clairement de l'équation (18 a), et l'on a

$$\cos x' = \frac{C(\cos\varphi - A\sin\varphi\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}\,\frac{\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{2},$$

ou bien, comme à la suite de l'équation $\cos Y'' = 0$ on a

$$C\cos\varphi - A\sin\varphi\cos\omega = \gamma'\cos(\varphi+\varphi'),$$

$$(23)\qquad \cos x' = \frac{\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}\,\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')\cot(\varphi+\varphi')\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2}.$$

A l'aide de cette relation on peut encore déterminer la valeur de φ qui correspond à une valeur donnée pour ω. Si l'on désigne la valeur de φ déterminée par l'équation (23) par $(\varphi+\psi_{,,})$, φ se rapportant à la valeur de φ' déterminée par l'équation (20), pour laquelle

$$\mathrm{tang}\,\varphi' = \frac{A}{C}\cos\omega,$$

on trouve, par des considérations semblables à celles qui, ci-dessus, nous ont fait trouver $\psi_{,}$,

$$\psi_{,} = \frac{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}{\mu\gamma'}\,\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}\cos x';$$

on doit remplacer $\cos x'$ par sa valeur tirée de l'équation (23). On a ainsi

$$\psi_{,,} = \frac{1}{2\mu}\,\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}\,\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')\cot(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'');$$

pour φ et φ' on doit mettre les valeurs qui ressortent de l'équation (20).

Si l'on compare $\psi_{,}$ à $\psi_{,,}$, on voit qu'on a

$$\psi_{,} = \psi_{,,}\,\frac{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{,,}}}{\gamma'}\,\frac{\cos z'}{\sin 2\varphi'}.$$

Au moyen des relations

$$\sqrt{1-\gamma'^{2}_{,}}\cos z' = -C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega,\quad \text{et}\quad C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi' = 0,$$

on trouve

$$\frac{\sqrt{1-\gamma_{,}''^{2}}}{\gamma'}\,\frac{\cos \varepsilon'}{\sin 2\varphi'} = -\frac{\sqrt{1-\gamma_{,}''^{2}}}{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}},$$

ce qui permet de poser, puisqu'on néglige les carrés de $(\varphi' - \varphi'')$,

$$\psi_{,} + \psi_{,,} = 0.$$

§ XV.

Il faut présentement appliquer les principes établis dans le § II aux milieux cristallisés à deux axes optiques. A cette fin, j'établirai d'abord les formules générales qui déterminent les vitesses de propagation des ondes, les directions de leurs mouvements et la position des rayons qui leur appartiennent. Soient μ, ν, π les valeurs des trois axes d'élasticité; soient μ et π la plus petite et la plus grande de ces valeurs et ν la valeur moyenne. Prenons pour axes coordonnés x, y, z des parallèles aux trois axes d'élasticité μ, ν, π.

L'équation de la surface d'élasticité de Fresnel est, d'après cela,

$$(1) \qquad \rho^2 = \mu^2 a^2 + \nu^2 b^2 + \pi^2 c^2.$$

ρ désigne le rayon vecteur de cette surface et a, b, c les cosinus des angles que ce rayon vecteur fait avec les trois axes. Les deux vitesses de propagation d'une onde, selon qu'elle est ordinaire ou extraordinaire [*], s'obtiennent en menant par le centre de la surface d'élasticité un plan parallèle au plan de l'onde, et déterminant le plus grand et le plus petit rayon vecteur de cette section. Si α, β, γ désignent les cosinus des inclinaisons de la normale à l'onde plane sur les trois axes d'élasticité μ, ν, π, la valeur υ du plus grand ou du plus petit rayon vecteur est déterminée par l'équation suivante

$$(2) \qquad \frac{\alpha^2}{\upsilon^2-\mu^2} + \frac{\beta^2}{\upsilon^2-\nu^2} + \frac{\gamma^2}{\upsilon^2-\pi^2} = 0.$$

Je désignerai les deux racines de cette équation par o et e, de sorte que o ou e désigne la vitesse de propagation d'une onde plane parallèle à $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, selon que cette onde est ordinaire ou extraordinaire.

La direction du mouvement dans cette onde est perpendiculaire au rayon vecteur de son intersection avec la surface d'élasticité, rayon vecteur qui exprime sa vitesse de propagation. On trouve pour les cosinus o_1, o_2, o_3 des angles que la direction

---

[*] *Remarque.* Le sens de cette dénomination impropre ne peut être douteux que lorsque les deux axes optiques sont inclinés l'un sur l'autre de 90°. J'appelle onde ordinaire celle qui, dans le sens propre du mot, serait en réalité l'onde ordinaire, si l'on supposait l'angle des deux axes optiques diminué jusqu'à 0

du mouvement dans le plan de l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ forme avec les axes d'élasticité dans le cas d'une onde ordinaire,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} o_1 &= \frac{\alpha}{(e^2-\mu^2)\,\mathrm{E}}, \\ o_2 &= \frac{\beta}{(e^2-\nu^2)\,\mathrm{E}}, \\ o_3 &= \frac{\gamma}{(e^2-\pi^2)\,\mathrm{E}}, \end{aligned} \right.$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$\mathrm{E} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2}.$$

Si l'on designe les cosinus correspondants au cas où l'onde est extraordinaire par e_1, e_2, e_3, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \frac{\alpha}{(o^2-\mu^2)\,\mathrm{O}}, \\ e_2 &= \frac{\beta}{(o^2-\nu^2)\,\mathrm{O}}, \\ e_3 &= \frac{\gamma}{(o^2-\pi^2)\,\mathrm{O}}; \end{aligned} \right.$$

$$\mathrm{O} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{o^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{o^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{o^2-\pi^2}\right)^2}.$$

Ces valeurs (3) et (4) résultent immédiatement des expressions que j'ai donnees dans mon Mémoire sur la double réfraction (*Pogg. Ann.*, Bd. XXV, p. 445).

A un autre endroit (*Pogg. Ann.*, Bd. XXXIII), j'ai démontré que les racines o et e de l'équation (2) reçoivent une expression très-simple quand on rapporte la position du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ aux axes optiques, c'est-à-dire aux normales aux sections circulaires de la surface d'élasticité.

Si le plan d'ondes forme avec ces axes les angles $90^\circ - u$ et $90^\circ - u'$, il vient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} o^2 &= \mu^2 - (\mu^2-\pi^2)\sin^2\frac{u-u'}{2} = \frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\mu^2-\pi^2}{2}\cos(u-u'), \\ e^2 &= \mu^2 - (\mu^2-\pi^2)\sin^2\frac{u+u'}{2} = \frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\mu^2-\pi^2}{2}\cos(u+u'). \end{aligned} \right.$$

Le rayon correspondant à l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ a pour direction la ligne dans laquelle se meut le point d'intersection de cette onde avec d'autres ondes $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$, qui dans leurs directions diffèrent infiniment peu de la première. Cette direction dans les cristaux ne coïncide pas avec la normale à l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, car avec la direction des ondes les vitesses de propagation changent aussi. Soit $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ une onde extraordinaire, et soit, après l'unité de temps, sa position donnée par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = e. \tag{a}$$

La position de deux autres ondes infiniment peu différentes en direction s'obtiendra en différentiant cette équation successivement par rapport à α et par rapport à β,

$$x + \frac{d\gamma}{d\alpha} z = \frac{de}{d\alpha}, \tag{b}$$

$$y + \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{de}{d\beta}. \tag{c}$$

Une ligne menée du centre $x=0$, $y=0$, $z=0$ au point indépendant de $d\alpha$ et de $d\beta$ des trois plans (a), (b), (c) est la direction du rayon qui appartient à l'onde extraordinaire $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$. On doit éliminer les différentielles par rapport à $d\alpha$ et $d\beta$.

Les quotients différentiels de γ se tirent de la condition

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1, \\ \dfrac{d\gamma}{d\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}, \quad \dfrac{d\gamma}{d\beta} = -\dfrac{\beta}{\gamma}; \end{array}\right. \tag{d}$$

les valeurs des quotients différentiels $\frac{de}{d\alpha}$, $\frac{de}{d\beta}$ se tirent par différentiation de l'équation (2) qui devient, en faisant $v=e$,

$$\frac{\alpha^2}{e^2-\mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2-\nu^2} + \frac{\gamma^2}{e^2-\pi^2} = 0. \tag{e}$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à α, qu'on y remplace $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ par sa valeur tirée de (d), et qu'on pose, d'après l'équation (3),

$$\left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2 = E^2, \tag{f}$$

on obtient

$$eE^2\frac{de}{d\alpha} = \frac{\alpha}{e^2-\mu^2} - \frac{\alpha}{e^2-\pi^2}; \tag{g}$$

on trouve tout pareillement

$$eE^2\frac{de}{d\beta} = \frac{\beta}{e^2-\nu^2} - \frac{\beta}{e^2-\pi^2}. \tag{h}$$

Les valeurs de (d), de (g) et de (h), substituées dans (b) et (c), les changent dans les équations suivantes :

$$x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \alpha\left(\frac{1}{e^2-\mu^2} - \frac{1}{e^2-\pi^2}\right)\frac{1}{E^2e}. \tag{i}$$

$$y - \frac{\beta}{\gamma} z = \beta\left(\frac{1}{e^2-\nu^2} - \frac{1}{e^2-\pi^2}\right)\frac{1}{E^2e}. \tag{k}$$

auxquelles on joint

$$(l) \qquad z - z = 0,$$

si l'on multiplie les trois équations (i), (k), (l) respectivement par α, β, γ, et qu'on les ajoute, on a pour la somme

$$(m) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - \frac{z}{\gamma} = \left(\frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \pi^2}\right)\frac{1}{E^2 e};$$

mais, d'après l'équation (a), on a

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = e,$$

et d'après l'équation (b),

$$\frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} + \frac{\gamma^2}{e^2 - \pi^2} = 0.$$

En observant ces conditions, on trouve, d'après l'équation (m):

$$z = \left[e + \frac{1}{E^2 e (e^2 - \pi^2)}\right]\gamma.$$

Cette valeur, substituée dans les équations (i) et (k), conduit aux valeurs de x et de y. Il vient donc, si les ordonnées du point d'intersection sont désignées par x_e, y_e, z_e, pour indiquer qu'il appartient à un système d'ondes extraordinaires,

$$(6) \qquad \begin{cases} x_e = \alpha\left[e + \dfrac{1}{E^2 e (e^2 - \mu^2)}\right], \\ y_e = \beta\left[e + \dfrac{1}{E^2 e (e^2 - \nu^2)}\right], \\ z_e = \gamma\left[e + \dfrac{1}{E^2 e (e^2 - \pi^2)}\right]. \end{cases}$$

Dans le même temps que le plan d'ondes parcourt l'espace e, le rayon qui lui correspond parcourt l'espace $\sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}$ que nous poserons $= r_e$. La vitesse de propagation du rayon est donc r_e; on trouve, en ajoutant les trois équations (6), ayant égard à l'équation (e) et observant qu'à cause de l'équation (f),

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{E^4 e^2}\left[\dfrac{\alpha^2}{(e^2 - \mu^2)^2} + \dfrac{\beta^2}{(e^2 - \nu^2)^2} + \dfrac{\gamma^2}{(e^2 - \pi^2)^2}\right] = \dfrac{1}{E^2 e}, \\ r_e^2 = e^2 + \dfrac{1}{e^2 E^2}. \end{cases}$$

Les cosinus des angles $(S_e a)$, $(S_e b)$, $(S_e c)$ que le rayon forme avec les trois axes d'élasticité, sont

$$(8) \qquad \cos(S_e a) = \frac{x_e}{r_e}, \quad \cos(S_e b) = \frac{y_e}{r_e}, \quad \cos(S_e c) = \frac{z_e}{r_e}.$$

Quand l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ est une onde ordinaire, des considérations tout à fait identiques donnent pour les composantes de la vitesse du rayon suivant les trois axes d'élasticité,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x_o &= \alpha\left[o + \frac{1}{O^2 o\,(o^2 - \mu^2)}\right],\\ y_o &= \beta\left[o + \frac{1}{O^2 o\,(o^2 - \nu^2)}\right],\\ z_o &= \gamma\left[o + \frac{1}{O^2 o\,(o^2 - \pi^2)}\right];\end{aligned}\right.$$

et pour la vitesse elle-même,

$$(10)\qquad r_o^2 = o^2 + \frac{1}{o^2 O^2}.$$

Au moyen de cette formule, on peut donc toujours, quand une onde est donnée, trouver le rayon qui lui appartient [*].

Je vais maintenant m'occuper du problème inverse, savoir, quand le rayon est donné, trouver l'onde dont il dérive.

Par l'équation (10) on trouve, en retranchant μ^2 des deux côtés,

$$(11)\qquad r_o^2 - \mu^2 = \frac{o^2 O^2 (o^2 - \mu^2) + 1}{o^2 O^2},$$

pendant que de l'équation (9) on tire

$$x_o = \frac{\alpha\,[O^2 o^2 (o^2 - \mu^2) + 1]}{O^2 o\,(o^2 - \mu^2)}.$$

Si l'on divise cette équation par la précédente, on obtient

$$\frac{x_o}{r_o^2 - \mu^2} = \frac{\alpha_o}{o^2 - \mu^2}.$$

On obtient deux équations semblables en remplaçant successivement x, α, μ par

---

[*] *Remarque.* Au moyen des équations (6) ou (9) on peut facilement déterminer α, β, γ et la vitesse de l'onde, et ces valeurs, portées dans (e), donnent une équation entre x, y, z. C'est l'équation de la surface des ondes. C'est M. le docteur Senf, maintenant à Dorpat, qui le premier a employé ce mode de calcul simple et élégant qui y conduit. Fresnel ne regardait pas son procédé comme présentable, et l'on abandonnera volontiers maintenant la marche suivie par Ampère (*Ann. de Chimie*, t. XXXIX). M. le docteur Senf a aussi le premier donné à l'équation de la surface des ondes la forme si convenable que voici :

$$\frac{\mu^2 x^2}{r^2 - \mu^2} + \frac{\nu^2 y^2}{r^2 - \nu^2} + \frac{\pi^2 z^2}{r^2 - \pi^2} = 0.$$

De cette forme résulte en même temps la construction donnée par Fresnel de la surface des ondes au moyen de l'ellipsoïde décrit autour des axes de la surface d'élasticité.

x, β, ν et par z, γ, π. On a donc

$$(12)\qquad \frac{x_o}{r_o^2-\mu^2} = \frac{\alpha_o}{o^2-\mu^2}, \quad \frac{y_o}{r_o^2-\nu^2} = \frac{\beta_o}{o^2-\nu^2}, \quad \frac{z_o}{r_o^2-\pi^2} = \frac{\gamma_o}{o^2-\pi^2}.$$

Si l'on ajoute les carrés de ces équations, et qu'on pose

$$(13)\qquad \left(\frac{x_o}{r_o^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{y_o}{r_o^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{z_o}{r_o^2-\pi^2}\right)^2 = S_o^2,$$

on a

$$(14)\qquad S_o^2 = o^2 O^2.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation (10), il vient

$$(15)\qquad o^2 = r_o^2 - \frac{1}{S_o^2}.$$

Au moyen de cette equation, on déduit de la position et de la vitesse de propagation du rayon la vitesse de propagation de l'onde. A l'aide des équations (14) et (12) on obtient les cosinus de l'inclinaison de la normale à l'onde sur les axes d'élasticité, savoir,

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} o\alpha &= x_o\left(1 - \frac{1}{r_o^2-\mu^2 S_o^2}\right),\\ o\beta &= y_o\left(1 - \frac{1}{r_o^2-\nu^2 S_o^2}\right),\\ o\gamma &= z_o\left(1 - \frac{1}{r_o^2-\pi^2 S_o^2}\right)\end{aligned}\right.$$

On obtient des valeurs semblables, quand le rayon est un rayon extraordinaire, en remplaçant partout o par e, et au lieu de S_o mettant S_e qui peut être donné par l'équation (13), en remplaçant partout l'indice o par l'indice e.

Si l'on divise les équations (12) par l'équation (14), savoir, par $S_o = oO$, et qu'on tienne compte des équations (4), on trouve les cosinus e_1, e_2, e_3 de la direction du mouvement dans le rayon ordinaire déterminés par la direction de ce rayon, savoir,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} o_1 &= \frac{x_o}{(r_o^2-\mu^2)S_o},\\ o_2 &= \frac{y_o}{(r_o^2-\nu^2)S_o},\\ o_3 &= \frac{z_o}{(r_o^2-\pi^2)S_o}.\end{aligned}\right.$$

De même on obtient les cosinus des angles que la direction du mouvement dans un rayon extraordinaire forme avec les axes d'élasticité, determinés par les cosinus du rayon même,

$$(18)\qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{x_e}{(r_e^2 - \mu^2)\,S_e}, \\ e_2 = \dfrac{y_e}{(r_e^2 - \nu^2)\,S_e}, \\ e_3 = \dfrac{z_e}{(r_e^2 - \pi^2)\,S_e}. \end{cases}$$

Pour le cosinus de l'angle qu'un rayon, quand il est ordinaire, fait avec la direction de son mouvement, on a

$$\frac{o_1 x_o + o_2 y_o + o_3 z_o}{r_o},$$

si l'on porte dans cette formule les valeurs de o_1, o_2, o_3 tirées de l'équation (3), et celles de x_o, y_o, z_o de l'équation (9), et qu'on observe que

$$\frac{\alpha^2}{e^2-\mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2-\nu^2} + \frac{\gamma^2}{e^2-\pi^2} = 0,$$

et que

$$\left[\frac{\alpha^2}{(e^2-\mu^2)(o^2-\mu^2)} + \frac{\beta^2}{(e^2-\nu^2)(o^2-\nu^2)} + \frac{\gamma^2}{(e^2-\pi^2)(o^2-\pi^2)}\right]\frac{1}{\mathrm{OE}} = 0.$$

Puisque tel est le cosinus de l'inclinaison des deux directions déterminées par o_1, o_2, o_3 et e_1, e_2, e_6 qui sont perpendiculaires l'une à l'autre, on trouve alors

$$(18\,\mathrm{b})\qquad o_1 x_o + o_2 y_o + o_3 z_o = 0,$$

d'où il suit que *le rayon ordinaire est toujours perpendiculaire à la direction de son mouvement.* On trouve de même

$$(18\,\mathrm{c})\qquad e_1 x_e + e_2 y_e + e_3 z_e = 0.$$

Donc *les deux rayons, tant ordinaire qu'extraordinaire, sont perpendiculaires à la direction de leur mouvement.* Tel est le beau théorème qui s'élève contre une assertion de la théorie de Fresnel, comme une conséquence nécessaire de la définition du plan de polarisation adoptée par nous, nettement accusée par une construction géométrique simple de la surface des ondes et du rayon.

Les formules qui déterminent les rayons qui appartiennent à une onde donnée, aussi bien que celles qui déterminent l'onde correspondante à un rayon donné, deviennent dans quelques cas indéterminées. Je vais discuter ces cas, et cette discussion me conduit à d'une manière très-simple à deux beaux théorèmes de Hamilton sur la réfraction conique (*Pogg. Ann.*, Bd. XXVIII). Je vais à cette fin m'occuper des formules (12), dans lesquelles je laisserai de côté l'indice o, et à la place de o je mettrai v, qui désignera aussi bien la vitesse ordinaire que la vitesse extraordinaire des ondes; de même r sans indice représentera les deux vitesses de propagation des rayons, mais de telle manière que r et v désignent à la fois les vitesses ordinaires ou à la fois les vitesses extraordinaires.

Les relations (12) sont donc

$$(19)\qquad \frac{x}{r^2-\mu^2}=\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon^2-\mu^2},\qquad \frac{y}{r^2-\nu^2}=\frac{\beta\upsilon}{\upsilon^2-\nu^2},\qquad \frac{z}{r^2-\pi^2}=\frac{\gamma\upsilon}{\upsilon^2-\pi^2}.$$

Quand on y fait $\beta=0$, et qu'on détermine en même temps α et γ de manière que $\upsilon=\nu$, la valeur de y devient $=\frac{0}{0}$, et l'on doit conclure, puisque β et $\upsilon-\nu$ deviennent indépendamment l'un de l'autre $=0$, que y n'a aucune valeur déterminée, mais un très-grand nombre de valeurs, à savoir, toutes les valeurs qui satisfont à la première et à la troisième des équations (19). Or ces deux équations déterminent une courbe, et tous les rayons qui sont menés de l'origine des coordonnées à cette courbe appartiennent à une seule et même onde, savoir, celle pour laquelle $\beta=0$ et $\nu=\upsilon$; à cette onde appartient donc non-seulement une paire de rayons, mais un cône rayonnant. Cette onde, pour laquelle $\beta=0$ et $\nu=\upsilon$, est parallèle à la section circulaire de la surface d'élasticité. On obtient les valeurs de α et de γ qui lui correspondent quand dans l'équation (2) on pose $\beta=0$, d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha^2}{\upsilon^2-\mu^2}+\frac{\gamma^2}{\upsilon^2-\pi^2}=0;$$

α et γ y sont déterminés de manière que $\upsilon=\nu$. On trouve

$$(20)\qquad \alpha=\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}},\qquad \gamma=\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans la première et la troisième des équations (19), et la valeur de $r^2=x^2+y^2+z^2$, il vient

$$(21)\qquad \begin{cases} x=(x^2+y^2+z^2-\mu^2)\,\dfrac{\nu}{\sqrt{(\pi^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)}},\\[2ex] z=-(x^2+y^2+z^2-\pi^2)\,\dfrac{\nu}{\sqrt{(\pi^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2)}}.\end{cases}$$

D'où il résulte que la courbe est un cercle. Le plan de ce cercle est perpendiculaire au plan $y=0$, son centre est dans ce plan, et si l'on appelle les coordonnées des deux points d'intersection du plan des coordonnées $y=0$ avec le cercle x', z' et x'', z'', on a

$$x'=\nu\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}},\qquad x''=\frac{\pi^2}{\nu}\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}};$$

$$z'=\nu\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}},\qquad z''=\frac{\mu^2}{\nu}\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}.$$

Le diamètre du cercle est donc

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(z'-z'')^2}=\frac{1}{\nu}\sqrt{(\pi^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}=2R.$$

La ligne tirée de l'origine des coordonnées au point d'intersection (x', y', z') est perpendiculaire sur le diamètre du cercle qui serait mené de ce point d'intersection au point d'intersection marqué par (x'', y'', z''), et est par conséquent aussi perpendiculaire au plan du cercle. La comparaison de cette équation avec l'équation (20) fait voir que cette ligne, menée du centre au point (x', y', z'), est en même temps la normale à l'onde correspondante au *cône radieux*, c'est-à-dire l'axe optique.

La distance du point d'intersection x', y', z' au centre est ν. On peut donc, d'après cela, construire le cône de rayons qui appartient à l'onde plane parallèle à la section circulaire de la surface d'élasticité.

Si l'on appelle n l'inclinaison sur l'axe π déterminée par α et γ dans l'équation (20), n étant la demi-inclinaison de l'axe optique, il vient

$$(22)\qquad \sin n = \sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}}, \qquad \cos n = \sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}}.$$

Si l'on introduit ses valeurs dans l'expression du diamètre, on obtient

$$2R = \frac{1}{\nu}\,\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\sin 2n.$$

Si par l'axe optique on conduit un plan incliné d'un angle ω sur le plan déterminé par les deux axes optiques, la corde qui, dans le cercle (21), est tracée par ce plan, a pour expression $\frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu}\sin 2n \cos\omega$, et par conséquent, si l'on désigne par q l'inclinaison du côté du cône situé dans ce plan sur l'axe optique,

$$(23)\qquad \operatorname{tang} q = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\cos\omega.$$

C'est la forme la plus simple de l'équation du cône radieux.

Si l'on pose dans l'éq. (19) $y = 0$ et $r = \nu$, c'est-à-dire, si l'on suppose que le rayon se meuve dans la direction de la normale d'une section circulaire de l'ellipsoïde qui servit à Fresnel à construire les vitesses des rayons, β devient $= \frac{0}{0}$, ce qui, dans ce cas, doit vouloir dire que β a toutes les valeurs possibles, pourvu que la première et la troisième des équations (19) soient satisfaites. Quand $y = 0$ et $r = \nu$, on trouve

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \pi\sqrt{\dfrac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}} = \nu\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\mu^2} - \dfrac{1}{\nu^2}}{\dfrac{1}{\mu^2} - \dfrac{1}{\pi^2}}} \\ \text{et} \\ z = \mu\sqrt{\dfrac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}} = \nu\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\nu^2} - \dfrac{1}{\pi^2}}{\dfrac{1}{\mu^2} - \dfrac{1}{\pi^2}}}. \end{array}\right.$$

Si l'on substitue dans la première et la troisième des équations (19) ces valeurs pour x, z et r, et si l'on pose en même temps $\alpha\rho = x'$, $\beta\rho = y'$, $\gamma\rho = z'$; x', y', z' étant les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur l'onde relative au rayon $y = 0$, $r = \nu$, on obtient

$$(25)\qquad x' = \frac{\pi(\rho^2 - \mu^2)}{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}, \qquad z' = -\frac{\mu(\rho^2 - \pi^2)}{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}.$$

$\rho = x'^2 + y'^2 + z'^2$. La courbe déterminée par ces équations est un cercle dont le plan est parallèle à l'axe y, et dont le centre est dans le plan (x, z).

Soient les coordonnées des points de rencontre de ce plan avec le cercle x'', z'' et x''', z'''; on a

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{\mu^2\pi\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}{\mu^2(\nu^2 - \mu^2) + \pi^2(\pi^2 - \nu^2)}, & x''' &= \pi\sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}}, \\ z'' &= \frac{\pi^2\mu\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}{\mu^2(\nu^2 - \mu^2) + \pi^2(\pi^2 - \nu^2)}, & z''' &= \mu\sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}}. \end{aligned}\right.$$

Le diamètre de ce cercle s'obtient au moyen de l'équation

$$2\mathrm{R} = \sqrt{(x'' - x''')^2 + (z'' - z''')^2} = \sqrt{\frac{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{\pi^2 + \mu^2 - \nu^2}}.$$

La ligne tirée de l'origine des coordonnées au point x'', y'', z'' est perpendiculaire au diamètre qui joint x'', y'', z'' et x''', y''', z''', et sa longueur est $\frac{\mu\pi}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2 - \nu^2}}$.

La ligne tirée de l'origine des coordonnées au point x''', y''', z''' coïncide avec la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde de Fresnel, et sa longueur $= \nu$.

Les lignes menées de l'origine des coordonnées à la périphérie du cercle, dont la construction est facile à la suite de ce qui a été dit, forment un cône elliptique qui est le lieu des normales aux ondes planes correspondantes au rayon perpendiculaire à la section circulaire de l'ellipsoïde. Si nous rapportons ce cône à un système d'axes coordonnés, semblable au système d'axes auquel nous avons rapporté précédemment le cône de l'équation (23), nous obtiendrons l'équation

$$(27)\qquad \operatorname{tang}(q) = \cos\omega\sqrt{\frac{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{\pi^2\mu^2}} = \nu^2\cos\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}\right)\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}\right)}.$$

(q) représente l'inclinaison d'une génératrice quelconque de ce cône sur la génératrice qui va du sommet au point x'', y'', z''; ω désigne l'inclinaison du plan mené par ces deux génératrices sur le plan des deux axes optiques.

Si l'angle que la génératrice menée du sommet au point x''', y''' fait avec l'axe est désigné par (n), $2(n)$ étant l'inclinaison de la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde, on déduit immédiatement de l'équation (24),

$$\sin n = \sqrt{\frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\pi^2}}},$$

$$\cos (n) = \sqrt{\frac{\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\pi^2}}}.$$

Ces valeurs, substituées dans tang (q), donnent

(28) $$\text{tang}\,(q) = \nu^2 \left(\frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\pi^2}}{2}\right) \sin (2\,n) \cos \omega.$$

Les différents coefficients de réfraction du rayon qui se meut le long de la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde sont représentés par l'unité divisée par les lignes qui vont de l'origine à la circonférence du cercle (25), c'est-à-dire par $\frac{1}{v}$. On trouve

(29) $$v^2 = \nu^2 - \left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2}\right)^2 \sin^2 n \cos^2 n \cos^2 \omega.$$

D'où l'on voit que les coefficients de réfraction sont constants quand on se borne à prendre la seconde puissance de la différence du plus grand et du plus petit axe d'élasticité. On arrive à l'équation (29) le plus simplement possible de la manière suivante. On déduit de l'équation (25)

(30) $$-\frac{x'}{z} = \frac{\pi}{\mu}\,\frac{v^2 - \mu^2}{v^2 - \mu^2}\sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\nu^2 - \pi^2}} = \frac{\pi}{\mu}\,\frac{v^2 - \mu^2}{v^2 - \pi^2} \cot n.$$

Si par le côté du cône qui est déterminé par l'équation (28), on fait passer un plan perpendiculaire au plan des deux axes optiques, et si l'on appelle α l'angle que la ligne d'intersection de ces deux plans forme avec la ligne qui est tirée de l'origine des coordonnées au point x'', z'', dans l'éq. (26), et si l'on pose de plus $\frac{x''}{z''} = \text{tang}\, p$; x'', z ayant les valeurs déterminées dans l'équation (26), on obtient pour $\frac{x'}{z'}$, équation (30), une nouvelle expression, savoir,

$$\frac{x'}{z'} = \text{tang}\,(p + \alpha).$$

On a, d'après l'équation (26),

$$\operatorname{tang} p = \frac{\mu}{\pi} \operatorname{tang} n,$$

n étant la moitié de l'inclinaison des deux axes optiques ; on a d'ailleurs

$$\operatorname{tang} \alpha = \cos \omega \operatorname{tang} (q),$$

équation dans laquelle pour cos (q) on doit mettre sa valeur déduite de l'éq. (28), et dans laquelle ω a la même signification que dans l'éq. (28). Si l'on porte ces valeurs pour p, α et (q) dans tang $(p + \alpha)$, et si l'on met l'expression qui en résulte à la place de $\frac{x'}{z'}$ dans l'équation (30), on trouve l'expression donnée dans l'équation (29).

Si l'on rapporte la position du plan de l'onde aux axes optiques au lieu de la rapporter aux axes d'élasticité, on obtient, pour la plupart des formules ci-dessus, des expressions très-simples que je présenterai ici, à cause de l'utilité dont elles nous seront plus tard.

Si u et u' sont les angles que la normale à l'onde fait avec les deux axes optiques, c'est-à-dire avec les normales aux sections circulaires de la surface d'élasticité, pendant que, comme ci-dessus, α, β, γ désignent les cosinus de la normale à l'onde avec les axes x, y, z, il vient

$$\alpha = \sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi^2-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}},$$

$$\gamma = \cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\frac{u-u'}{2}\sqrt{\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}}.$$

On a, d'après l'équation (5),

$$o^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu)\sin^2\frac{u'-u}{2},$$

et par conséquent,

$$o^2 - \mu^2 = (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\frac{u-u'}{2},$$

$$o^2 - \nu^2 = \mu^2 - \nu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\frac{u-u'}{2} = \pi^2 - \nu^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right),$$

$$o^2 - \pi^2 = \qquad - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2\frac{u-u'}{2}.$$

Si l'on place ces valeurs dans l'expression de O^2, équation (4), savoir,

$$O^2 = \left(\frac{\alpha}{o^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{o^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{o^2-\pi^2}\right)^2,$$

on obtient, en multipliant l'equation par $(\pi^2-\mu^2)$,

$$(\pi^2-\mu^2)^2\,O^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}\,\frac{\pi^2-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}$$

$$+\frac{1-\sin^2\frac{u+u'}{2}\sin^2\frac{u-u'}{2}\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}\right)-\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}}{\left(\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}\right)}$$

$$+\frac{\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}\right).$$

Si l'on réduit les termes du second membre de cette équation au même dénominateur, en multipliant le premier terme par $\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}=\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}+\sin^2\frac{u-u'}{2}$, et le troisième par $\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}=\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}-\cos^2\frac{u-u'}{2}$, on obtient, après quelques réductions,

$$O^2(\pi^2-\mu^2)^2 =$$

$$\frac{(\pi^2-\nu^2)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2\frac{u-u'}{2}+(\nu^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)+(\mu^2-\pi^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{(\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\left[\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}+\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\right]^2}$$

Le numérateur de cette fraction se décompose dans les deux facteurs qui suivent :

$$\left[\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\right]\left[\mu^2-\nu^2+(\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u'-u}{2}\right)\right];$$

on obtient donc

$$O^2(\pi^2-\mu^2)^2 = \frac{4\left[\sin^2\left(\frac{u'-u}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{u'+u}{2}\right)\right]}{\sin^2(u'-u)\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}+\sin^2\frac{u-u'}{2}\right)},$$

ou bien

$$(31)\qquad \frac{1}{O^2}=\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2\sin^2(u-u')\left[\frac{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}-\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\sin u\sin u'}\right].$$

Par un calcul tout semblable, on trouve

$$(32)\qquad \frac{1}{E^2}=\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2\sin^2(u+u')\left[\frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)-\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}}{\sin u\sin u'}\right].$$

Les quantités renfermées entre parenthèses, dans les équ. (31) et (32), ont une signification géométrique simple. Si l'on considère, en effet, la pyramide triangulaire dont les arêtes sont les deux axes optiques et la normale à l'onde, et si l'on appelle $2n$ l'angle que les deux axes optiques font entre eux, et $2j$ l'angle sous lequel sont inclinées entre elles les deux faces qui se coupent suivant la normale à l'onde, on a

$$\cos 2n = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos 2j;$$

et si l'on observe qúe, d'après l'équation (22),

$$\cos^2 n = \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2} \quad \text{et} \quad \sin^2 n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2},$$

on tire

$$(33) \qquad \sin^2 j = \frac{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2} - \sin^2 \frac{u - u'}{2}}{\sin u \sin u'}, \qquad \cos^2 j = \frac{\sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) - \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}}{\sin u \sin u'}.$$

Ces valeurs, mises dans les équations (31) et (32), donnent donc

$$(34) \qquad \frac{1}{O} = \pm \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin (u - u') \sin j,$$

$$(35) \qquad \frac{1}{E} = \pm \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin (u + u') \cos j.$$

Je désignerai dans la suite par k l'angle j pour l'onde extraordinaire; je conserverai la lettre j pour l'onde ordinaire seule.

§ XVI.

Il nous faut maintenant rechercher l'équation qui dérive du principe de la conservation des forces vives. Nous reprendrons encore les considérations qui nous ont conduit au rapport des volumes de l'onde incidente et de l'onde réfractée dans les cristaux à un axe, § V, et nous emploierons aussi la même notation. Le volume de l'onde incidente est donc $\alpha H \cos \varphi$ et le volume de l'onde réfractée $\frac{H \sin \varphi'}{\sin \varphi} W$.

Nous tirons de l'équation (3), § V, pour l'onde ordinaire,

$$W' = \alpha (\cos \varphi' - \sin \varphi' \tang q' \cos \psi').$$

q' désigne l'inclinaison du rayon sur la normale à l'onde et ψ' l'angle sous lequel le plan mené par la normale à l'onde ordinaire et le rayon de cette onde rencontre le plan d'incidence. Cet angle ψ' est calculé de manière que si l'on mène par le centre d'une sphère les deux normales N et n à l'onde incidente et à l'onde réfractée, et le rayon S, le côté NS du triangle sphérique NnS, déterminé par leurs rencontres avec la sphère, soit opposé à l'angle $180° - \psi'$, ou, ce qui revient au même, que $\psi' = 0$ si le rayon est dans le plan d'incidence et si l'inclinaison de S sur N est plus grande que celle de n sur N.

Il est facile de déduire les valeurs de tang q' et de cos ψ' des formules données. On a

$$\cos q' = \frac{\alpha' x_o + \beta' y_o + \gamma' z_o}{r_o};$$

si l'on y substitue les valeurs de x_o, y_o, z_o, et r_o de l'équation (9), § XV, on trouve

$$\cos q' = \frac{o}{\sqrt{o^2 + \frac{1}{O^2 o^2}}},$$

et par conséquent

$$(2) \qquad \operatorname{tang} q' = \frac{1}{O\, o^2}.$$

Dans le triangle sphérique NnS, ci-dessus cité, le côté N$n = \varphi'$ et nS $= q$; le troisième côté NS est l'inclinaison du rayon sur la normale à la surface réfringente. On a donc

$$\cos \mathrm{NS} = \frac{\mathrm{A}x_o + \mathrm{B}y_o + \mathrm{C}z_o}{r_o},$$

A, B, C étant les cosinus des angles sous lesquels la normale N à la surface réfringente rencontre les parallèles aux trois axes d'élasticité. En mettant dans cette formule les valeurs de x_o, y_o, z_o, et r_o tirées de l'équation (9), § XV, on obtient

$$\cos \mathrm{NS} = \frac{o \cos \varphi + \frac{1}{O^2 o}\left(\frac{\mathrm{A}\alpha'}{o^2 - \mu^2} + \frac{\mathrm{B}\beta'}{o^2 - \nu^2} + \frac{\mathrm{C}\gamma'}{o^2 - \pi^2}\right)}{o^2 + \frac{1}{o^2 O^2}}.$$

Enfin on a, pour l'angle $180° - \psi'$ opposé au côté NS,

$$-\cos \psi' = \frac{\cos \mathrm{NS} - \cos \varphi' \cos q'}{\sin \varphi' \sin q'},$$

et de là, quand pour cos NS, cos q et sin q on met leurs valeurs,

$$(3) \qquad -\sin \varphi' \cos \psi' = \frac{1}{O}\left(\frac{\mathrm{A}\alpha'}{o^2 - \mu^2} + \frac{\mathrm{B}\beta'}{o^2 - \nu^2} + \frac{\mathrm{C}\gamma'}{o^2 - \pi^2}\right).$$

Les considérations du § V nous donnent pareillement, pour l'onde extraordinaire,

$$(4) \qquad \mathrm{W}'' = \alpha\,(\cos \varphi'' - \sin \varphi'' \operatorname{tang} q'' \cos \psi'');$$

q'' et ψ'' ont la même signification pour cette onde que q' et ψ' pour l'onde ordinaire.

Nous trouvons ici, d'une manière toute semblable,

$$(5) \qquad \text{tang}\, q'' = \frac{1}{\mathrm{E}e},$$

et

$$(6) \qquad -\sin\varphi' \cos\psi' = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\mathrm{A}\alpha'}{e^2-\mu^2} + \frac{\mathrm{B}\beta'}{e^2-\nu^2} + \frac{\mathrm{C}\gamma'}{e^2-\pi^2}\right);$$

pour l'uniformité de la notation, j'ai désigné les cosinus des angles que la normale à l'onde forme avec les trois axes d'élasticité, par α'', β'' et γ''.

A la place des angles ψ' et ψ'', j'en introduirai d'autres; je prendrai les angles que les directions du mouvement dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire font avec le plan d'incidence. J'appellerai ces angles x' et x''.

Comme il a été trouvé que les rayons sont perpendiculaires aux directions de leur mouvement,

$$x' = 90^\circ + \psi', \quad x'' = 90^\circ + \psi''.$$

On doit remarquer que, dans ces inégalités, x' et x'' sont comptées dans le même sens que ψ' et ψ''. D'après cela, on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\psi' \sin\varphi' &= \sin x' \sin\varphi' = -\frac{1}{\mathrm{O}}\left(\frac{\mathrm{A}\alpha'}{o^2-\mu^2} + \frac{\mathrm{B}\beta'}{o^2-\nu^2} + \frac{\mathrm{C}\gamma'}{o^2-\pi^2}\right), \\ \cos\psi' \sin\varphi' &= \sin x'' \sin\varphi'' = -\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\mathrm{A}\alpha''}{e^2-\mu^2} + \frac{\mathrm{B}\beta''}{e^2-\nu^2} + \frac{\mathrm{C}\gamma''}{e^2-\pi^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Les volumes correspondants, dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire, deviennent, par suite,

$$\frac{\alpha\mathrm{H}}{\sin\varphi}(\sin\varphi' \cos\varphi' - \sin x' \sin^2\varphi' \,\text{tang}\, q'),$$

et

$$\frac{\alpha\mathrm{H}}{\sin\varphi}(\sin\varphi'' \cos\varphi'' - \sin x'' \sin^2\varphi'' \,\text{tang}\, q'').$$

L'équation des forces vives est donc la suivante

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathrm{P}^2 - \mathrm{S}^2 - \mathrm{R}_p^2 - \mathrm{R}_s^2) \sin\varphi \cos\varphi = {} & \mathrm{D}'^2 (\sin\varphi' \cos\varphi' - \sin x' \sin^2\varphi' \,\text{tang}\, q') \\ & + \mathrm{D}''^2 (\sin\varphi'' \cos\varphi'' - \sin x'' \sin^2\varphi'' \,\text{tang}\, q''). \end{aligned} \right.$$

P, S, R_p, R_s ont la même signification que ci-dessus, et D' et D'' représentent les vitesses dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire.

Pour former les équations qui résultent du principe de l'égalité des composantes, je décomposerai les vitesses D' et D'' dans le rayon ordinaire et dans le rayon extraordinaire suivant les directions suivantes :

1°. Perpendiculairement au plan d'incidence; 2° perpendiculairement à la surface réfringente; 3° parallèlement au plan d'incidence et parallèlement à la surface réfringente. Ces composantes sont respectivement

$$\begin{array}{llcl}
\text{I.} & D' \sin x' & \text{et} & D'' \sin x'', \\
\text{II.} & D' \cos x' \sin \varphi' & \text{et} & - D'' \cos x'' \sin \varphi'', \\
\text{III.} & D' \cos x' \cos \varphi' & \text{et} & - D'' \cos x'' \cos \varphi''.
\end{array}$$

Si nous décomposons suivant les trois mêmes directions les vitesses dans le rayon incident et dans le rayon réfléchi, nous obtenons

$$\begin{array}{llcl}
\text{I.} & P & \text{et} & R_p, \\
\text{II.} & - S \sin \varphi & \text{et} & - R_s \sin \varphi, \\
\text{III.} & - S \cos \varphi & \text{et} & + R_s \cos \varphi;
\end{array}$$

d'où nous déduisons, par le principe de l'égalité des composantes,

$$(9) \qquad P + R_p = D' \sin x' + D'' \sin x'',$$

$$(10) \qquad (S + R_s) \sin \varphi = - D' \cos x' \sin \varphi' + D'' \cos x'' \sin \varphi'',$$

$$(11) \qquad (S - R_s) \cos \varphi = - D' \cos x' \cos \varphi' + D'' \cos x'' \cos \varphi''.$$

Ces trois équations, combinées avec l'éq. (8), déterminent les quantités cherchées. Je vais montrer maintenant que l'équation (8) peut, dans ce cas comme dans le cas des cristaux à un axe, se remplacer par une équation linéaire.

Si l'on multiplie les équations (10) et (11) l'une par l'autre,

$$\begin{aligned}(S^2 - R_s^2) \sin \varphi \cos \varphi = {} & D'^2 \cos^2 x' \sin \varphi' \cos \varphi' + D''^2 \cos^2 x'' \sin \varphi'' \cos \varphi'' \\ & - D'D'' \cos x' \cos x'' \sin (\varphi' + \varphi'');\end{aligned}$$

et si l'on retranche ce produit de l'équation (8), on obtient

$$\begin{aligned}(P^2 - R_p^2) \sin \varphi \cos \varphi = {} & D'^2 (\sin^2 x' \sin \varphi' \cos \varphi' - \sin x' \sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q') \\ & + D''^2 (\sin^2 x'' \sin \varphi'' \cos \varphi'' - \sin x'' \sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q'') \\ & + D'D'' \cos x' \cos x'' \sin (\varphi' + \varphi'').\end{aligned}$$

Cette équation est divisible par l'équation (9), et l'on obtient, par cette division,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned}(P - R_p) \sin \varphi \cos \varphi = {} & R' (\sin x' \sin \varphi' \cos \varphi' - \sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q') \\ & + R'' (\sin x'' \sin \varphi'' \cos \varphi'' - \sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q'');\end{aligned}\right.$$

dans l'hypothèse où la relation suivante a lieu,

$$\begin{aligned}& \sin (\varphi' + \varphi'') [\sin x' \sin x'' \cos (\varphi' - \varphi'') - \cos x' \cos x''] \\ = {} & \sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'' + \sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q'' \cos x'.\end{aligned}$$

Pour démontrer la justesse de cette relation, je la mettrai d'abord sous une autre forme.

Si l'on remplace, à l'aide des équations (2) et (5), tang q' et tang q'' par leurs valeurs, savoir,

$$\operatorname{tang} q' = \frac{1}{o^2 \mathrm{O}}, \qquad \operatorname{tang} q'' = \frac{1}{e^2 \mathrm{E}},$$

qu'on remarque en outre que

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{o^2} = \frac{\sin^2 \varphi''}{e^2} = \sin^2 \varphi,$$

et que

$$\sin(\varphi' - \varphi'') \sin(\varphi' + \varphi'') = \sin^2 \varphi (o^2 - e^2) = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2} [\cos(u - u') - \cos(\nu - \nu')] \sin^2 \varphi,$$

on trouve

$$\sin x' \sin x'' \cos(\varphi' - \varphi'') - \cos x' \cos x'' = \frac{-\left(\frac{\sin x''}{\mathrm{O}} + \frac{\sin x'}{\mathrm{E}}\right)}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2} [\cos(u - u') - \cos(\nu + \nu')]} \sin(\varphi' - \varphi'').$$

Avant de mettre pour $\frac{1}{\mathrm{O}}$ et $\frac{1}{\mathrm{E}}$ leurs valeurs déduites de l'équation (34), § XV, nous devons rechercher de quel signe nous les affecterons. Posons, dans l'équation (7),

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{C} = 0,$$

nous obtenons

$$\cos \psi' \sin \varphi' = \sin x' \sin \varphi' = -\frac{1}{\mathrm{O}} \frac{\beta'}{o^2 - \nu^2}.$$

D'après l'équation (5), § XV, on voit que puisque $\sin^2 \frac{u - u'}{2}$ ne peut être plus grand que $\sin^2 n = \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - \pi^2}$, o^2 ne peut être plus grand que ν^2 si, comme nous le supposons pour la symétrie, $\pi > \mu$. Par conséquent $o^2 - \nu^2$ est une quantité négative. Mais la valeur de $\cos \psi'$ est, dans ce cas où nous supposons $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{C} = 0$, toujours positive, comme cela paraît clairement par l'angle que le rayon fait avec l'axe d'élasticité ν, quand $\gamma' = 0$, angle plus grand que l'angle correspondant avec la normale à l'onde; $\frac{1}{\mathrm{O}}$ doit donc être pris positivement, et par conséquent

$$\frac{1}{\mathrm{O}} = \left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\right) \sin(u - u') \sin j;$$

u doit toujours être plus grand que u'.

Si l'on passe d'une normale α', β', γ' à une autre $-\alpha'$, β', γ', les angles u, u' échangent leur signification : l'arc qui précédemment était désigné par u doit être maintenant désigné par u', et réciproquement.

Pour discuter le signe qui convient à $\frac{1}{E}$, nous poserons dans l'équation (7)

$$B = 0, \quad C = 0,$$

de manière que

$$\cos\psi'' \sin\varphi'' = \sin x'' \sin\varphi'' = -\frac{1}{E}\frac{\alpha''}{e^2 - \mu^2}.$$

La valeur de $e^2 - \mu^2$ est toujours positive; la valeur de $\cos\psi$, quand on suppose de nouveau que $\pi^2 > \mu^2$, est, comme on voit, négative, si l'on pose $\beta'' = 0$, auquel cas le rayon fait avec l'axe d'élasticité μ un plus petit angle que la normale correspondante. Par conséquent il faut prendre aussi pour $\frac{1}{E}$ dans l'équation (34), §XV, le signe positif. Tant que la valeur de $\cos\psi''$ a son signe négatif, le signe de γ'' peut être positif ou négatif, c'est-à-dire que la normale à l'onde peut faire avec l'axe π un angle aigu ou obtus; ce n'est pas $\frac{\alpha''}{e^2 - \mu^2}$ qui change de signe avec γ'', mais bien la valeur de $\frac{1}{E}$, donnée au § XV, équ. (34), car si γ'' est pris positivement, $u + u' < 180°$, et si γ'' est négatif, $u + u' > 180°$. D'après cela, on doit écrire

$$\frac{1}{E} = \pm\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\sin(\upsilon + \upsilon')\cos k,$$

où l'on prendra le signe négatif quand $\sin(\upsilon + \upsilon')$ sera négatif.

J'introduirai dans ce qui suit le signe $+$, pour la simplicité de l'expression, avec la réserve de changer ce signe $+$ en signe $-$ quand $\frac{1}{E}$ devra être négatif.

Si l'on met ces valeurs, maintenant plus exactement appréciées, de $\frac{1}{E}$ et de $\frac{1}{O}$ dans la relation (18), elle se change en la suivante :

$$(14) \quad \cos x' \cos x'' - \sin x' \sin x'' \cos(\varphi' - \varphi'') = \left[\frac{\sin x'' \sin j \sin(u - u') - \sin x' \cos k \sin(\upsilon + \upsilon')}{\cos(u - u') - \cos(\upsilon + \upsilon')}\right] \sin(\varphi' - \varphi'')$$

Cette relation peut se traduire par une construction géométrique à la surface de la sphère. Nous menons par le centre d'une sphère les deux axes optiques et les deux normales à l'onde ordinaire et à l'onde extraordinaire; soient A, A', O, E, *fig.* 9, les intersections de ces quatre lignes avec la surface. Le plan d'incidence coupe ainsi la sphère suivant le grand cercle OE. Les arcs AO, A'O sont u et u'; les arcs AE, A'E sont υ, υ'; l'arc EO $= (\varphi' - \varphi'')$; l'arc AA' $= 2n$. La direction du mouvement dans l'onde ordinaire O est dans le plan bissecteur de l'angle AOA' $= 2j$; la section de la sphère par ce plan est OO'. Si l'on construit EE' de manière à diviser en deux parties égales l'angle AEA' $= 2k$, et si l'on tire Ee perpendiculaire à EE', Ee est la section de la sphère par le plan dans lequel se fait le mouvement de l'onde extraordinaire E. Comme ces directions de mouvements sont perpendiculaires sur leurs normales respectives $O'ON = x'$ et $eEN = x''$. N désigne l'intersection de la sphère avec la normale à la surface réfringente.

A l'aide de cette construction je me suis convaincu de l'exactitude de la relation (14), mais d'une manière quelque peu pénible. La démonstration plus simple que voici m'a été communiquée par M. le professeur Jacobi.

Soient les angles EAO et EA'O désignés encore par α et α', et soit $EO = (\varphi' - \varphi'') = \Delta$; les triangles EAO et EA'O donnent les équations suivantes :

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\alpha\cos u &= \cos(x''-k)\cos(x'+j)\cos\Delta - \sin(x''-k)\sin(x'+j),\\ \sin\alpha'\cos u' &= \cos(x''+k)\cos(x'-j)\cos\Delta - \sin(x''+k)\sin(x'-j),\\ -\sin\alpha\cos v &= \sin(x''-k)\sin(x'+j)\cos\Delta - \cos(x''-k)\cos(x'+j),\\ -\sin\alpha'\cos v' &= \sin(x''+k)\sin(x'-j)\cos\Delta - \cos(x''+k)\cos(x'-j). \end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie les deux premières par $\sin x''$, les deux dernières par $\sin x'$, et qu'on pose

$$\begin{aligned} \cos k &= \cos(x''+k)\cos x'' + \sin(x''+k)\sin x'',\\ &= \cos(x''-k)\cos x'' + \sin(x''-k)\sin x'',\\ \sin j &= -\sin(x'-j)\cos x' + \cos(x'-j)\sin x',\\ &= -\cos(x'+j)\sin x' + \sin(x'+j)\cos x', \end{aligned}$$

on obtient

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} -\sin\alpha\cos u\sin x'' &= \sin(x'+j)\cos k - [\sin(x'+j)\cos x'' + \cos(x'+j)\sin x''\cos\Delta]\cos(x''-k),\\ -\sin\alpha'\cos u'\sin x'' &= \sin(x'-j)\cos k - [\sin(x'-j)\cos x'' + \cos(x'-j)\sin x''\cos\Delta]\cos(x''+k),\\ -\sin\alpha\cos v\sin x' &= \cos(x''-k)\sin j - [\cos(x''-k)\cos x' - \sin(x''-k)\sin x'\cos\Delta]\sin(x'+j),\\ -\sin\alpha'\cos v'\sin x' &= -\cos(x''+k)\sin j - [\cos(x''+k)\cos x' - \sin(x''+k)\sin x'\cos\Delta]\sin(x'-j). \end{aligned}\right.$$

On a de plus

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} -\sin\alpha\sin u &= \sin\Delta\cos(x''-k), &\qquad \sin\alpha\sin v &= \sin(x'+j)\sin\Delta,\\ -\sin\alpha'\sin u' &= \sin\Delta\cos(x''+k), &\qquad \sin\alpha'\sin v &= \sin(x'-j)\sin\Delta. \end{aligned}\right.$$

On déduit des équations (b) et (c)

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin x''\sin(u-u') &= \cos k[\cos(x''-k)\sin(x'-j) - \cos(x''+k)\sin(x'+j)]\\ &\quad + 2\cos(x''+k)\cos(x''-k)\sin j(\cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos\Delta),\\ \frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin x'\sin(v+v') &= -\sin j[\cos(x''-k)\sin(x'-j) - \cos(x''+k)\sin(x'+j)]\\ &\quad + 2\sin(x'-j)\sin(x'+j)\cos k(\cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos\Delta), \end{aligned}$$

et de là

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}[\sin x''\sin j\sin(u-u') + \sin x'\cos k]\sin(v+v')\\ &= 2[\cos(x''+k)\cos(x''-k)\sin^2 j + \sin(x'+j)\sin(x'-j)\cos^2 k](\cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos\Delta): \end{aligned}\right.$$

d'où se déduit la relation obtenue.

On a, en effet,

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} \cos 2n &= \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos 2j = \cos(u-u') - 2 \sin u \sin u' \sin^2 j,\\ \cos 2n &= \cos \upsilon \cos \upsilon' + \sin \upsilon \sin \upsilon' \cos 2k = \cos(\upsilon+\upsilon') + 2 \sin \upsilon \sin \upsilon' \sin^2 k.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent

$$\cos(u-u') - \cos(\upsilon+\upsilon') = 2(\sin u \sin u' \sin^2 j + \sin \upsilon \sin \upsilon' \cos^2 k),$$

d'où l'on déduit, d'après (c),

$$\frac{\sin \alpha \sin \alpha'}{\sin^2 \Delta}[\cos(u-u') - \cos(\upsilon+\upsilon')] = 2[\cos(x''-k)\cos(x''+k)\sin^2 j + \sin(x'-j)\sin(x'+j)\cos^2 k].$$

Si l'on divise (d) par cette équation, on obtient

$$(f)\quad \frac{\sin x'' \sin j \sin(u-u') + \sin x' \cos k \sin(\upsilon+\upsilon')}{\cos(u-u') - \cos(\upsilon+\upsilon')} \sin \Delta = \cos x' \cos x'' - \sin x' \sin x'' \cos \Delta,$$

laquelle est la relation qu'il s'agissait de prouver.

On déduit encore de l'équation (a), d'une manière semblable, quelques relations qui, plus tard, nous seront utiles. Si l'on multiplie les deux premières équations (a) par $\cos x''$ et les deux dernières par $\sin x'$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cos u \cos x'' &= + \sin k \sin(x'+j) - \cos(x''-k)[\sin(x'+j)\sin x'' - \cos(x'+j)\cos x'' \cos \Delta],\\
\sin \alpha' \cos u' \cos x'' &= - \sin k \sin(x'-j) - \cos(x''+k)[\sin(x'-j)\sin x'' - \cos(x'+j)\cos x'' \cos \Delta],\\
-\sin \alpha \cos \upsilon \sin x' &= \sin j \cos(x''-k) - \sin(x'+j)[\cos(x''-k)\cos x' - \sin(x''-k)\sin x' \cos \Delta],\\
-\sin \alpha' \cos \upsilon' \sin x' &= - \sin j \cos(x''+k) - \sin(x'-j)[\cos(x''+k)\cos x' - \sin(x''+k)\sin x' \cos \Delta],
\end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha \sin \alpha'}{\sin \Delta} \sin(u-u')\cos x'' &= \sin k[\sin(x'-j)\cos(x''-k) + \sin(x'+j)\cos(x''+k)]\\
&\quad - 2 \sin j \cos(x''+k)\cos(x''-k)(\cos x' \sin x'' + \sin x' \cos x'' \cos \Delta),\\
\frac{\sin \alpha \sin \alpha'}{\sin \Delta} \sin(\upsilon-\upsilon')\sin x' &= \sin j[\cos(x''-k)\sin(x'-j) + \cos(x''+k)\sin(x'+j)]\\
&\quad - 2 \sin k \sin(x'+j)\sin(x'-j)(\cos x' \sin x'' + \sin x' \cos x'' \cos \Delta).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin \alpha \sin \alpha'}{\sin \Delta}[\sin(u-u')\cos x'' \sin j - \sin(\upsilon-\upsilon')\sin x' \sin k]\\ &= -2[\sin^2 j \cos(x''+k)\cos(x''-k) - \sin^2 k \sin(x'+j)\sin(x'-j)](\cos x' \sin x'' + \cos x'' \sin x' \cos \Delta).\end{aligned}\right.$$

On a, en outre, par l'équation (e),

$$\cos(u-u') - \cos(\upsilon-\upsilon') = 2(\sin u \sin u' \sin^2 j - \sin \upsilon \sin \upsilon' \cos^2 k).$$

et à cause de l'équation (e),

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}[\cos(u-u')-\cos(\upsilon-\upsilon')] = 2[\cos(x''-k)\cos(x''+k)\sin^2 j - \sin(x'-j)\sin(x'+j)\cos^2 k].$$

En prenant cette équation pour diviseur de (g), on obtient

$$(h)\qquad -\sin\Delta\,\frac{\sin(u-u')\cos x''\sin j - \sin(\upsilon-\upsilon')\sin x'\sin k}{\cos(u-u')-\cos(\upsilon-\upsilon')} = \cos x'\sin x'' + \cos x''\sin x'\cos\Delta.$$

On obtient une autre relation utile de la manière suivante. On multiplie les deux premières équations (a) par $\sin x''$ et la troisième et la quatrième par $\cos x'$,

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos u\sin x'' &= -\cos k\sin(x'+j) + \cos(x''-k)[\sin(x'+j)\cos x'' + \cos(x'+j)\sin x''\cos\Delta],\\
\sin\alpha'\cos u'\sin x'' &= -\cos k\sin(x'-j) + \cos(x''+k)[\sin(x'-j)\cos x'' + \cos(x'-j)\sin x''\cos\Delta],\\
-\sin\alpha\cos\upsilon\cos x' &= -\cos j\cos(x''-k) + \sin(x'+j)[\cos(x''-k)\sin x' + \sin(x''-k)\cos x'\cos\Delta],\\
-\sin\alpha'\cos\upsilon'\cos x' &= -\cos j\cos(x''+k) + \sin(x'-j)[\cos(x''+k)\sin x' + \sin(x''+k)\cos x'\cos\Delta].
\end{aligned}$$

D'où résulte

$$\begin{aligned}
\frac{-\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin x''\sin(u+u') &= -\cos k[\sin(x'+j)\cos(x''+k) + \sin(x'-j)\cos(x''-k)]\\
&\quad + 2\cos(x''-k)\cos(x''+k)\cos j(\sin x'\cos x'' + \cos x'\sin x''\cos\Delta),\\
\frac{-\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\cos x'\sin(\upsilon+\upsilon') &= -\cos j[\cos(x''-k)\sin(x'-j) + \cos(x''+k)\sin(x'+j)]\\
&\quad + 2\sin(x'+j)\sin(x'-j)\cos k(\cos x''\sin x' + \cos x'\sin x''\cos\Delta).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\frac{-\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}[\sin x''\cos j\sin(u+u') - \cos x'\cos k\cos(\upsilon+\upsilon')]\\
&= 2[\cos(x''-k)\cos(x''+k)\cos^2 j - \sin(x'+j)\sin(x'-j)\cos^2 k](\cos x''\sin x' + \sin x''\cos x'\cos\Delta).
\end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}[\cos(u+u') - \cos(\upsilon+\upsilon')] = -2[\cos^2 j\cos(x''-k)\cos(x''+k) - \cos^2 k\sin(x'+j)\sin(x'-j)];$$

par conséquent

$$(i)\qquad \sin\Delta\,\frac{\sin x''\cos j\sin(u+u') - \cos x'\cos k\cos(\upsilon+\upsilon')}{\cos(u+u') - \cos(\upsilon+\upsilon')} = (\cos x''\sin x' + \sin x''\cos x'\cos\Delta).$$

§ XVII.

Les équations d'où dépendent les intensités des rayons réfléchis et réfractés sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}+\mathrm{R}_s)\sin\varphi &= -\,\mathrm{D}'\cos x'\sin\varphi' + \mathrm{D}''\cos x''\sin\varphi'',\\
(\mathrm{S}-\mathrm{R}_s)\cos\varphi &= -\,\mathrm{D}'\cos x'\cos\varphi' + \mathrm{D}''\cos x''\cos\varphi'',\\
\mathrm{P}+\mathrm{R}_p &= \mathrm{D}'\sin x' + \mathrm{D}''\sin x'',\\
(\mathrm{P}-\mathrm{R}_p)\sin\varphi\cos\varphi &= \mathrm{D}'(\sin x'\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q')\\
&\quad + \mathrm{D}''(\sin x''\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q'').
\end{aligned}$$

On déduit de là

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{R}_p &= p\mathrm{P} + s'\mathrm{S},\\
\mathrm{R}_s &= p'\mathrm{P} + s\mathrm{S},
\end{aligned}\right.$$

où les coefficients p, p', s, s' ont les valeurs suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{N}p = {} & \cos x''\sin(\varphi+\varphi'')[\sin x'\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q']\\
& + \cos x'\sin(\varphi+\varphi')[\sin x''\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') + \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q''],\\
\mathrm{N}s = {} & -\cos x'\sin(\varphi-\varphi')[\sin x''\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q'']\\
& - \cos x''\sin(\varphi-\varphi'')[\sin x'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q'],\\
\mathrm{N}p' = {} & -\sin 2\varphi\cos x'\cos x''\sin(\varphi'-\varphi''),\\
\mathrm{N}s' = {} & \sin 2\varphi\begin{bmatrix}\sin x'\sin x''\sin(\varphi'-\varphi'')\cos(\varphi'+\varphi'')\\ -\sin x''\sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q' + \sin x'\sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q''\end{bmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

N a pour valeur

$$\mathrm{N} = \left\{\begin{aligned}
& \cos x''\sin(\varphi+\varphi'')[\sin x'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q']\\
& + \cos x'\sin(\varphi+\varphi')[\sin x''\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q'']
\end{aligned}\right\}.$$

Pour les vitesses dans les rayons réfractés, on trouve

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{ND}' &= 2\sin\varphi\cos\varphi\,\{\mathrm{P}\cos x''\sin(\varphi+\varphi'') - \mathrm{S}[\sin x''\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q'']\},\\
\mathrm{ND}'' &= 2\sin\varphi\cos\varphi\,\{\mathrm{P}\cos x'\sin(\varphi+\varphi') + \mathrm{S}[\sin x'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q']\}.
\end{aligned}\right.$$

De là, on déduit les intensités de la lumière dans les rayons réfractés ordinaire et extraordinaire. Leurs valeurs sont respectivement $\mathrm{D}'^2\mathrm{U}'$, $\mathrm{D}''^2\mathrm{U}''$,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U}' &= \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin x'\sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q'}{\sin\varphi\cos\varphi},\\
\mathrm{U}'' &= \frac{\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin x''\sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q''}{\sin\varphi\cos\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

Employons ces formules, pour les faire mieux comprendre, aux trois cas très-simples que voici :

1. *Quand le plan d'incidence divise en deux parties égales l'angle aigu des axes op-*

tiques, alors

$$u - u' = 0, \quad \frac{1}{o^2 O} = \operatorname{tang} q' = 0, \quad \nu + \nu' = 2\nu.$$

En outre

$$\sin x' = 0, \qquad \cos x'' = 0, \quad \cos x' = \mp 1,$$

selon que la normale à la surface réfringente est du côté de l'axe π ou du côté de l'axe ν, par rapport à la normale à l'onde refractée, supposé, pour la commodité de la démonstration, que l'axe π est celui qui divise en deux parties égales l'angle aigu des deux axes optiques. Dans les mêmes conditions $\sin x'' = \pm 1$.

D'après les équations (1), (2), (3), on trouve $p' = 0$, $s' = 0$.

$$\left\{\begin{aligned}
R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \varphi')\,S}{\sin(\varphi + \varphi')},\\
R_p &= \frac{\left[\sin(\varphi - \varphi'')\cos(\varphi + \varphi'') \pm \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}\right] P}{\sin(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'') \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}\\
D' &= \frac{\pm 2 \sin\varphi \cos\varphi\, S}{\sin(\varphi + \varphi')},\\
D'' &= \frac{\pm 2 \sin\varphi \cos\varphi\, P}{\sin(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{e^2 E}},\\
U' &= \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin\varphi \cos\varphi},\\
U'' &= \frac{\sin\varphi'' \cos\varphi'' \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}{\sin\varphi \cos\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

2. *Quand le plan d'incidence divise en deux parties égales l'angle obtus des deux axes optiques*, ou, ce qui est la même chose, *coïncide avec le plan des axes* μ *et* ν; alors

$$\nu + \nu' = 180^\circ,$$

et, par su te,

$$\frac{1}{e^2 E} = \operatorname{tang} q'' = 0, \quad (u - u') = 180^\circ - 2u'.$$

En outre

$$\cos x' = 0, \qquad \sin x'' = 0,$$

et

$$\sin x' = \pm 1, \quad \cos x'' = \mp 1,$$

selon que la normale au plan de réfringence est du côté de l'axe ν ou du côte de l'axe

μ par rapport à la normale à l'onde réfractée. On trouve $p' = 0$, $s' = 0$.

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & R_s = -\frac{\sin(\varphi-\varphi'')\,S}{\sin(\varphi+\varphi'')}, \\ & R_p = \frac{\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') \pm \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}\right] P}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}}, \\ & D' = \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, P}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}}, \\ & D'' = \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, S}{\sin(\varphi+\varphi'')}, \\ & U' = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}}{\sin\varphi\cos\varphi}, \qquad U'' = \frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sin\varphi\cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

3. *Le plan d'incidence coïncide avec le plan des deux axes optiques.* Ici nous avons deux cas à distinguer :

1°. *Les normales aux ondes réfractées sont dans l'angle obtus des axes optiques*,

$$\sin x' = 0, \quad \cos x'' = 0, \quad j = 0, \quad k = 0, \quad \frac{1}{O} = 0,$$

et

$$\cos x' = \mp 1, \quad \sin x'' = \pm 1.$$

On doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur selon que la normale au plan réfringent est située du côté de l'axe π ou du côté de l'axe μ par rapport à la normale à l'onde réfractée. On trouve $p' = 0$, $s' = 0$.

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & R_s = -\frac{\sin(\varphi-\varphi')\,S}{\sin(\varphi+\varphi')}, \\ & R_p = \frac{\left[\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') \pm \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}\right] P}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}, \\ & D' = \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, S}{\sin(\varphi+\varphi')}, \\ & D'' = \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, P}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}, \\ & U' = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}, \qquad U'' = \frac{\sin\varphi''\cos\varphi'' \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}{\sin\varphi\cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

2°. *Les normales aux ondes réfractées sont situées dans l'angle aigu des axes optiques*,

$$\cos x' = 0,\quad \sin x'' = 0,\quad 2j = 180^\circ,\quad 2k = 180^\circ,\quad \frac{1}{E} = 0,$$

et

$$\sin x' = \pm 1,\quad \cos x'' = \mp 1,$$

selon que la normale au plan de réfringence est du côté de l'axe π ou du côté de l'axe μ par rapport à la normale à l'onde réfractée. On a encore $p' = 0$, $s' = 0$.

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned}
R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \varphi'')\,S}{\sin(\varphi + \varphi'')},\\
R_p &= \frac{\left[\sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi') \pm \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}\right] P}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}},\\
D' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, P}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}},\\
D'' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, S}{\sin(\varphi + \varphi'')},\\
U' &= \sin\varphi'\cos\varphi \mp \frac{\sin^2\varphi'}{o^2 O},\\
U'' &= \frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sin\varphi\cos\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

Je démontrerai, dans le paragraphe suivant, que celles de ces formules qui se rapportent aux rayons réfléchis sont encore exactes pour le cas particulier, intermédiaire entre les deux cas 1° et 2°, où la normale à l'onde réfractée coïncide avec l'axe optique; il suffit alors de poser $\varphi' = \varphi''$.

§ XVIII.

Je vais actuellement appliquer les formules (1), (2), (3) du précédent paragraphe à un cas plus difficile en apparence que celui de la double réfraction, au cas de la réfraction conique. Je rechercherai les intensités de lumière et la position des plans de polarisation pour diverses arêtes du cône lumineux que forme le rayon incident en s'épanouissant. Les formules (1), (2), (3) deviennent, dans ce cas, complétement indéterminées, puisque x' et x'', j et k peuvent avoir toute valeur; elles prennent la nature des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ par des valeurs déterminées de deux quantités indépendantes l'une de l'autre. Dans des cas semblables, la signification du symbole $\frac{0}{0}$ mérite un examen tout spécial. J'aurai recours à la *fig.* 10. Soient menés par le centre d'une sphère les deux axes optiques qui rencontrent sa surface en A et A′; par le même centre faisons passer la normale au plan de réfringence, les normales aux ondes ordinaire et extraordinaire, et le rayon incident correspondant; ces lignes rencontrent la surface sphérique respectivement en B, O, E et S. Le plan d'incidence est ainsi celui du grand cercle BEOS. J'ai supposé que la normale au plan de réfringence se trouve située dans le plan des axes optiques, et dans l'angle aigu de ces axes; plus tard j'examinerai le cas général. Les mouvements de l'onde ordinaire O se font dans le plan du cercle OO′ qui divise en deux parties égales l'angle AOA′; le rayon ordinaire est en o, de manière que l'angle oOO′ soit un angle droit, et que la tangente de l'arc $o\mathrm{O} = \frac{1}{o^2\mathrm{O}}$, o et O étant pris avec la signification donnée, § XV, équations (5) et (4). Cela résulte des équations (2), § XVI, et (18 b), § XV. Dans l'onde extraordinaire E le mouvement a lieu dans le plan du cercle EE′, bisecteur de l'angle AEC; le rayon extraordinaire est en e, de manière que eEE′ soit un angle droit, et que la tangente de $e\mathrm{E} = \frac{1}{e^2\mathrm{E}}$. Les angles AOA′ et AEA′ sont ceux que nous avons déjà designés par $2j$ et $2k$, l'angle SEE″ est notre x'', et SOO′ notre x'.

Imaginons maintenant que le rayon incident se déplace successivement de S en S et en S″, mais de telle sorte que la normale à l'onde ordinaire se meuve dans le cercle AO pendant que le plan de réfringence B demeure invariable; O et E tombent toujours très-près l'un de l'autre et ils coïncident quand O est arrivé en A, S′ en S″. En suivant les différentes positions des plans de polarisation de O et de E pendant le mouvement de O suivant AO vers A, nous voyons que lorsque O et E coïncident l'un et l'autre en A, ces plans de polarisation ont pris les positions Aa et Ab; Ab divise en deux parties égales l'angle A′AO et Aa divise semblablement l'angle OAS″. Nous avons ainsi à cette limite

$$\mathrm{S''A}a = x', \quad \mathrm{S''A}b = x''.$$

L'angle

$$2j = 2k = \mathrm{BAD} = 360^\circ - 2x' = 2x'' - 180^\circ,$$

et par conséquent

$$x' - x'' = 270^\circ.$$

Le rayon ordinaire relatif à la normale à l'onde A est situé en b', le rayon extraordinaire correspondant en a'. Je désignerai les arcs Ab' et Aa' par q' et q'', ce qui donnera

$$\operatorname{tang} q' = \frac{1}{o^2\mathrm{O}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin x',$$

$$\operatorname{tang} q' = \frac{1}{e^2\mathrm{E}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin x'' = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos x'',$$

car $a^2 = c^2 = \nu^2$, et dans la formule $\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u - u') \sin y$, l'angle $u' = 0$ et $u = 2n$, que de même dans $\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(v + v') \cos k$, l'angle $v' = 0$ et $v = 2n$. Si, de plus, nous posons

$$180^\circ - x' = \omega, \quad (\omega = \text{l'angle } a'AS''),$$

il viendra

$$(1) \qquad \text{tang}\, q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin \omega, \quad \text{tang}\, q'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos \omega.$$

En ecrivant ces formules, on doit observer que l'arc q' est dans l'azimut ω, pendant que l'arc q' est situé dans l'azimut $\omega - 90^\circ$; si l'on appelle cet azimut ω', $\omega = \omega' + 90^\circ$. Cette valeur étant substituée à ω dans tang q', donne

$$\text{tang}\, q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos \omega';$$

d'où resulte, pour $\omega = \omega'$, $q' = q''$.

La ligne AO peut être inclinée d'un angle quelconque sur AA', c'est-à-dire l'angle S''AO peut croître de 0 à $+\pi$ et de 0 à $-\pi$; en même temps ω, qui est toujours égal à la moitié de S''AO, peut avoir toutes les valeurs entre $+\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$. Par conséquent les équations (1) représentent un cône dont les arêtes figurent tous les rayons qui correspondent à la normale A. C'est le même cône auquel nous avons été conduits ci-dessus, § XV, équations (23), par d'autres considérations.

Les considérations actuelles font pénétrer d'une manière plus précise dans sa nature physique. On doit considérer le rayon incident S'' comme un cône dont tous les côtés ont été réunis à l'axe. Chaque côté du cône, quoique tous aient maintenant la même direction, a produit deux rayons a' et b' dont le lieu est un cône elliptique autour de l'axe A, lequel est coupé suivant un cercle par un plan perpendiculaire à A.

J'appelle les deux rayons a' et b' rayons conjugués. Quand le rayon a' est donné, on trouve son conjugué b' en menant par l'axe A et le rayon a' un plan, et un second plan par A perpendiculairement au premier; ce second plan coupe le cône suivant le rayon b'. Les deux rayons conjugués sont polarisés perpendiculairement l'un à l'autre, et chacun d'eux perpendiculairement au plan qui passe par sa direction et par A. Si l'on désigne par I l'amplitude de la vibration dans le rayon incident, les deux rayons conjugués a' b' proviennent de la partie $\frac{I\beta}{2\pi}$, 2π représentant la circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, et β un élément de cette circonférence, car on doit se représenter les côtés du cône qui se confondent en S'' comme doués tous de vitesses oscillatoires égales. Je désignerai les vitesses dans les rayons b' et a' par $\frac{Q'\beta}{2\pi}$ et $\frac{Q'\beta}{2\pi}$. Pour trouver l'expression de leurs valeurs, nous avons à poser dans l'éq. (3), § XVII,

$$P = \frac{P\beta}{2\pi}, \qquad S = \frac{S\beta}{2\pi},$$
$$x' = 180^\circ - \omega, \quad x'' = 90^\circ + \omega,$$
$$j = h = \omega, \qquad \varphi' = \varphi'',$$
$$D' = \frac{Q'\beta}{2\pi}, \qquad D'' = \frac{Q''\beta}{2\pi}.$$

On trouve, d'après cela,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} N &= -\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi' \sin 2n \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\right], \\ NQ' &= -2\sin\varphi\cos\varphi \left\{ P\sin(\varphi+\varphi')\sin\omega + S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \sin^2\varphi'\right]\cos\omega \right\}, \\ NQ'' &= -2\sin\varphi\cos\varphi \left\{ P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \sin^2\varphi'\right]\sin\omega \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$U' = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin\omega\sin^2\varphi' \sin 2n \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$U'' = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \cos\omega\sin^2\varphi' \sin 2n \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

La valeur de Q appartient au rayon dont l'inclinaison sur l'axe A est q et qui se trouve dans l'azimut ω. La valeur de Q′ appartient au rayon dont l'inclinaison est q' et qui se trouve dans l'azimut $\omega - 90^\circ$. Si à la place de ω on introduit $\omega' = \omega - 90^\circ$, on voit que pour $\omega' = \omega$, $Q' = Q''$. On peut, par conséquent, remplacer les deux équations (2), comme nous l'avons vu à l'occasion des deux équations (1), par une équation dans laquelle la vitesse est exprimée en fonction de l'azimut correspondant du rayon, par conséquent par la valeur de Q″.

A ce propos on doit observer qu'alors chacune des arètes du cône doit être regardée comme double, comme représentant en premier lieu un rayon ordinaire, en second lieu un rayon extraordinaire, quoique dans ces deux cas la même vitesse et la même direction appartiennent aux mouvements. On peut donc les ajouter, et obtenir la vitesse correspondante à chaque côté du cône, en multipliant Q″ par 2. Je désignerai par q l'inclinaison d'un côté du cône sur l'axe A dans l'azimut ω, et par Q la vitesse dans le rayon lumineux représenté par ce côté ; il viendra alors

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} q &= \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \cos\omega, \\ Q &= 4\sin\varphi\cos\varphi \left\{ \frac{P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]\sin\omega}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule contient la loi d'après laquelle un rayon incident s'épanouit suivant les arêtes du cône de réfraction, quand, polarisé primitivement dans l'azimut dont la tangente est $\frac{P}{S}$, il tombe sur un plan de réfringence dont la normale est située dans l'angle aigu des deux axes optiques.

L'intensité de la lumière qui vient suivant l'arête du cône située dans l'azimut ω par rapport au plan des axes optiques est donnée par l'équation

$$Q(U) = \frac{Q\left(\sin\varphi'\cos\varphi' - \cos^2\omega\sin^2\varphi'\sin 2\nu\,\frac{\pi-\mu}{2\nu}\right)}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Entre φ et φ' on a la relation

$$\nu\sin\varphi = \sin\varphi';$$

φ' est ici l'inclinaison de la normale à la surface réfringente sur l'axe optique. Si l'on pose $\varphi' = 0$, c'est-à-dire si l'on suppose que le plan suivant lequel la lumière pénètre dans le cristal est perpendiculaire à l'axe optique, on obtient

$$(Q) = 4(P\cos\omega - S\sin\omega),$$

d'où l'on voit clairement que, suivant le côté du cône situé dans l'azimut de la polarisation primitive, la lumière est nulle, et qu'elle est un maximum suivant le côté dont l'azimut est perpendiculaire au plan de polarisation primitif. Un rapport semblable a lieu généralement; il est seulement modifié par la réfraction des ondes, car on peut toujours mettre l'équation (3) sous la forme

$$Q = A\sin(B - \omega).$$

Mais, en réalité, ce n'est pas un rayon qui tombe à la surface du milieu que nous considérons, mais un faisceau cylindrique de rayons; celui-ci n'engendre pas un cône lumineux simple, mais la lumière refractée s'épanouit dans un espace qui est circonscrit par l'enveloppe d'une infinité de cônes réfractés. Il résulte de là que la distribution de la lumière, aussi bien que la position de son plan de polarisation, se trouvent modifiées. Avant de m'occuper de ces modifications, il est bon d'examiner ce qu'il advient des formules (1) et (2), § XVII, pour la lumière réfléchie dans les cas particuliers où l'onde réfractée est perpendiculaire à l'un des axes optiques. Les vitesses réfléchies R_p et R_s doivent être considérées comme composées des vitesses réfléchies qui appartiennent aux rayons réfractés isolés dans les azimuts x' et x''; les vitesses partielles réfléchies, ayant les mêmes directions, s'ajoutent et donnent en conséquence

$$R_p = \int (pP + s'S)\frac{\rho}{2\pi},$$

$$R_s = \int (p'P - sS)\frac{\rho}{2\pi}.$$

Le signe $\int$ indique une sommation par rapport à toutes les valeurs de x' et y' de o à 2π.

Les quantités p, p', s, s' sont, en général, des fonctions de ces quantités. Mais on trouve par les équations (2), § XVII,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} Np = -\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi' \sin 2n \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\right], \\ Ns = +\sin(\varphi-\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi' \sin 2n \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\right], \\ Np' = 0, \\ Ns' = 0, \end{array}\right.$$

d'où il résulte que

$$\int p\beta = p\,2\pi, \quad \int s\beta = s\,2\pi, \quad \int p' = 0, \quad \int s' = 0$$

et que, si au lieu de N on met sa valeur tirée de l'équation (2), on obtient

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} R_p = \dfrac{\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi' \sin 2n \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi' \sin 2n \dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}, \\ R_s = -\dfrac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}. \end{array}\right.$$

Ce sont exactement les formules que l'on déduit des équations (7) et (8), § XVII, quand on y fait $\varphi' = \varphi''$. La réfraction conique n'exerce donc aucune influence sur la réflexion.

Les mouvements Q, donnés par l'équation (3), se font perpendiculairement à l'azimut ω; si l'on décompose ces mouvements suivant l'azimut 0° et 90°, et si l'on fait les sommes des composantes correspondantes respectivement à ces deux azimuts, leurs valeurs doivent coïncider avec celles de D′ et de D″ déduites de l'équation (7) ou de l'équation (8) du § XVII, quand on y fait $\varphi' = \varphi''$; on le trouve en effet.

Les composantes des vitesses dans l'azimut 0°, sont

$$-\,Q \sin\omega \frac{\beta}{2\pi},$$

et dans l'azimut 90°,

$$Q \cos\omega \frac{\beta}{2\pi}.$$

Les sommes

$$-\int Q \sin\omega \frac{\beta}{2\pi} \quad \text{et} \quad \int Q \cos\omega \frac{\beta}{2\pi}$$

doivent donc être égales aux valeurs de D′ et de D″ des équations (7) et (8), § XVII, ces sommes étant prises pour tous les côtés du rayon incident que nous nous sommes imaginé comme un cône lumineux réduit à son axe. Nous devons rappeler que ω est toujours la moitié de l'angle S″AO, je le désigne par α. Si l'on donne à α toutes les valeurs entre $+\pi$, $-\pi$, on obtient les rayons réfractés qui correspondent à tous les côtés du rayon incident; on peut en place de β écrire $d\alpha$.

Par là la première somme se change en

$$-\int \mathrm{Q}\sin\omega\,\frac{\beta}{2\pi} = -\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{Q}\sin\frac{1}{2}\alpha\,\frac{d\alpha}{2\pi},$$

ou encore

$$-\int \mathrm{Q}\sin\omega\,\frac{\beta}{2\pi} = -\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\mathrm{Q}\sin\omega\,\frac{d\omega}{\pi}.$$

De même

$$\int \mathrm{Q}\cos\omega\,\frac{\beta}{2\pi} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\mathrm{Q}\cos\omega\,\frac{d\omega}{\pi}.$$

En substituant pour Q la valeur que lui assigne l'équation (3), on obtient

$$-\int \mathrm{Q}\sin\omega\,\frac{\beta}{2\pi} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{S}}{\sin(\varphi+\varphi')},$$

$$\int \mathrm{Q}\cos\omega\,\frac{\beta}{2\pi} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{P}}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\,\sin^2\varphi'}.$$

Ce sont les valeurs que donnent, au § XVII, les formules (7) et (8) pour D′ et D″, quand on fait $\varphi' = \varphi''$.

Jusqu'à présent j'ai admis que le plan de réfringence est perpendiculaire au plan des axes optiques. Je considérerai présentement le cas général pour lequel le plan de réfringence a une position quelconque.

Soit φ' l'angle de la normale à ce plan avec l'axe optique, et λ l'angle que le plan mené par cette normale et l'axe optique, c'est-à-dire que le plan d'incidence fait avec le plan des deux axes optiques. Cet angle λ est compté dans le même sens que l'angle ω ci-dessus. Les plans de polarisation de deux rayons conjugués quelconques du cône elliptique sont situés dans les azimuts x' et x''; ces deux lettres ont la même signification que dans les formules (1), (2), (3), § XVII.

Soit

$$\omega' = 180^\circ - x' = x'' - 90^\circ.$$

ω' désigne ainsi l'azimut du rayon extraordinaire par rapport au plan d'incidence. Alors l'angle que précédemment nous avions désigné par ω, c'est-à-dire, l'azimut du rayon extraordinaire par rapport au plan des axes optiques $= \omega' + \lambda$. On a, par conséquent, d'après l'équation (1), § XVIII,

$$\tang q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin(\omega' + \lambda),$$

$$\tang q'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos(\omega' + \lambda).$$

En introduisant ω' à la place de x' et de x'', et ces valeurs de tang q' et tang q'' dans l'équation (3), § XVII, et en substituant $\frac{P\beta}{2\pi}$, $\frac{S\beta}{2\pi}$ à P et à S, on obtient, si l'on désigne encore par $\frac{Q'\beta}{2\pi}$, $\frac{Q''\beta}{2\pi}$ les vitesses dans les deux rayons conjugués,

$$Q' = \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi \left\{ P \sin(\varphi+\varphi') \sin\omega' + S \left[\cos\omega' \sin(\varphi+\varphi') \cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2\varphi' \cos(\omega'+\lambda) \right] \right\}}{\sin(\varphi+\varphi') \left[\sin(\varphi+\varphi') \cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2\varphi' \cos\lambda \right]},$$

$$Q'' = \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi \left\{ P \sin(\varphi+\varphi') \cos\omega' - S \left[\sin\omega' \sin(\varphi+\varphi') \cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2\varphi' \sin(\omega'+\lambda) \right] \right\}}{\sin(\varphi+\varphi') \left[\sin(\varphi+\varphi') \cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2\varphi' \cos\lambda \right]}.$$

Les valeurs de q' et Q' appartiennent aux rayons qui sont dans l'azimut $\omega' - 90°$; si l'on introduit cet azimut dans les formules qui les expriment, c'est-à-dire si l'on remplace ω' par $\omega' + 90°$, on trouve

$$q' = q'', \quad Q' = Q''.$$

On peut donc encore ici considérer le rayon situé dans l'azimut ω' comme résultant de deux rayons, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire, tous deux de même vitesse et de même direction. On obtient, d'après cela, la vitesse dans un rayon situé dans l'azimut ω' en multipliant Q'' par 2. Si donc on appelle Q la vitesse vibratoire d'un rayon dans l'azimut ω', et q son inclinaison sur l'axe optique, on a, en mettant à la place de ω' sa valeur $\omega - \lambda$,

$$(5)\quad Q = 2Q'' = \frac{4 \sin\varphi \cos\varphi \left\{ P \sin(\varphi+\varphi') \cos(\omega-\lambda) - S \left[\sin(\varphi+\varphi') \cos(\varphi-\varphi') \sin(\omega-\lambda) - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2\varphi' \sin\omega \right] \right\}}{\sin(\varphi+\varphi') \left[\sin(\varphi+\varphi') \cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2\varphi' \cos\lambda \right]}.$$

Si l'on pose $\lambda = 0$, on voit se reproduire le cas représenté par l'équation (3); mais $\lambda = 180°$ représente le cas où la normale au plan de réfringence est dans l'angle obtus des axes optiques; on obtient, dans ce cas,

$$Q = -\frac{4\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]\sin\omega\right\}}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]}.$$

Pour les rayons réfléchis, on obtient les vitesses en faisant les sommes des vitesses partielles qui correspondent à chaque rayon réfracté du cône elliptique.

On a ainsi

$$R_p = P\int\frac{p\beta}{2\pi} + S\int\frac{s'\beta}{2\pi},$$

$$R_s = P\int\frac{p'\beta}{2\pi} + S\int\frac{s\beta}{2\pi}.$$

On trouve

$$\int\frac{\beta}{2\pi}p = \frac{\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin^2\varphi'\sin 2n\cos\lambda\right]}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin^2\varphi'\sin 2n\cos\lambda},$$

$$\int\frac{\beta}{2\pi}s = -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')},$$

$$p' = 0,$$

$$\int\frac{\beta}{2\pi}s' = -\frac{\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2\varphi\sin\varphi'\sin 2n\sin\lambda}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin^2\varphi'\sin 2n\cos\lambda\right]}.$$

Pour obtenir ces mêmes formules on peut se fonder sur des considérations totalement indépendantes de la réfraction conique, en cherchant les valeurs de p, s, p', s' pour un plan réfringent quelconque, quand le plan d'incidence passe par l'un des axes optiques, et que le rayon est réfracté de telle manière que l'onde réfractée soit perpendiculaire à l'axe optique, ce qui revient à poser, dans l'équation (2), § XVII,

$$x' = 180^\circ + \frac{1}{2}\lambda, \quad x'' = 90^\circ - \frac{1}{2}\lambda,$$

$$\tang q' = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin\frac{1}{2}\lambda, \quad \text{et} \quad \tang q'' = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\cos\frac{1}{2}\lambda.$$

La réfraction conique n'exerce donc, en général, aucune sorte d'influence sur les phénomènes de réflexion.

Il nous reste encore à examiner comment s'opère la distribution de la lumière dans le cône elliptique, quand la lumière incidente n'est pas polarisée. La lumière naturelle doit être regardée comme résultant d'une série de mouvements vibratoires exécutés suivant des directions quelconques et avec une rapidité telle que dans un temps très-court on puisse en supposer un même nombre dans toute direction.

Si dans l'expression de Q on met pour P et S leurs valeurs $P = I\sin\beta$ et $S = I\cos\beta$, I^2 désignant l'intensité de la lumière incidente, et β un azimut d'oscillation ; si l'on forme, en outre, le carré de Q, et si l'on multiplie ce carré par $\frac{d\beta}{2\pi}$, on obtiendra l'intensité de la lumière I'^2 dans un rayon quelconque du cône en prenant l'intégrale de $UQ^2\frac{d\beta}{2\pi}$ de 0 à $+2\pi$. On a ainsi

$$I'^2 = \int_0^{2\pi} UQ^2 \frac{d\beta}{2\pi},$$

c'est-à-dire

$$I'^2 = 8I^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\left\{\frac{\cos^2(\omega-\lambda)\sin^2(\varphi+\varphi') + \left[\sin(\omega-\lambda)\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos\lambda\right]^2}{\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin\varphi'\cos\lambda\right]^2\sin^2(\varphi+\varphi')}\right\}U.$$

$$U = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\cos^2(\omega-\lambda)\sin^2\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Si l'on néglige $\pi^2-\mu^2$, on obtient comme première approximation,

$$I'^2 = 2I^2\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\left[\frac{\cos^2(\omega-\lambda)}{\cos^2(\varphi-\varphi')} + \sin^2(\omega-\lambda)\right].$$

d'où l'on voit que c'est seulement lorsque le plan de réfringence est perpendiculaire à l'axe optique que la lumière est uniformément répandue sur le cône. En général, l'intensité de la lumière a un maximum pour $\omega = \lambda$, et un minimum pour $\omega = \lambda - 90°$; le rapport du maximum au minimum est comme 1 est à $\cos^2(\varphi-\varphi')$. Dans les observations de M. Lloyd sur l'arragonite (*Pogg. Ann.*, Bd. XXVIII), cette différence était assez petite pour échapper à l'observation, car $(\varphi - \varphi')$ surpassait à peine 9°.

En réalité nous n'avons pas affaire à un rayon de lumière, mais à un cylindre de rayons. Soient, *fig.* 15, AA'DD' l'intersection du plan d'incidence avec le faisceau cylindrique incident, ABC et A'B'C' les intersections du même plan avec les surfaces coniques de réfraction qui appartiennent aux deux rayons incidents AD, AD'; AB et A'B' les directions des axes optiques. Les mouvements qui sont envoyés vers un point quelconque F émanent de tous les points de la section AA' du faisceau cylindrique incident par le plan réfringent. Si par ce point on tire FG parallèle à l'axe optique, et si, avec FG comme génératrice, on décrit le cône FGE, ce cône sera coupé par le plan de réfringence, en général, suivant une ellipse. La portion de cette ellipse comprise dans l'intérieur de la section AA′ du cylindre des rayons incidents par le plan de refringence, contient tous les points de cette section AA′ dont les mouvements atteignent en même temps le point F. Ces mouvements n'ont pas lieu tous dans la même direction, ils doivent être d'abord décomposés, puis ajoutés pour donner le mouvement de F. Cela conduit à des calculs penibles, et le resultat depend encore, dans les cas les plus simples, des transcendantes elliptiques.

Je me bornerai à traiter la question dans un cas simple et tout particulier; le calcul n'offre pour ce cas aucune difficulté analytique, et il est utile pour mettre le principe dans tout son jour. Je supposerai que le plan réfringent est perpendiculaire à l'axe optique, et que les rayons incidents forment un cylindre droit. Soit ABC, *fig.* 11, l'intersection de ce cylindre avec le plan de réfringence, le diamètre AB de cette section circulaire $= 2\rho$. Par un point quelconque D intérieur au cristal, et distant de d du plan réfringent, menons une ligne parallèle à l'axe optique qui rencontre en E, le plan réfringent. Menons, en outre, par DE le plan des deux axes optiques dont la trace sur ce même plan réfringent est EF. Sur cette ligne prenons

$$\mathrm{EG} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} d \sin 2n = \mathrm{R},$$

et du point G comme centre, avec GE pour rayon, décrivons un cercle. Le cône déterminé par le point D et par ce cercle est le cône de réfraction correspondant au point D. Les mouvements du cylindre incident transmis vers D émanent des rayons qui coupent le plan de réfringence suivant l'arc de cercle HI. Il est, d'après cela, facile de déterminer sur le plan parallèle au plan de réfringence mené par D, quels sont les points qui ont part au mouvement. Les limites de ces points sont telles que les cercles décrits par les points E aux conditions données touchent le cercle ABC, telles, par conséquent, que $\mathrm{GN} = \mathrm{R} \pm \rho$. Si par le point E on mène la ligne EM parallèle à GN, et la ligne BA parallèle à EF, on a

$$\mathrm{NM} = \mathrm{EG} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n\, d.$$

Le point M est donc independant de d quant à sa position, et ME est toujours la distance du point central N au centre G du cercle décrit par E. Aux points limites D qui reçoivent encore la lumière de ABC, appartient donc la série des points E pour lesquels $\mathrm{ME} = \mathrm{R} \pm \rho$. Ces points sont ainsi compris entre deux cercles concentriques PQ et P′Q′ décrits du point M comme centre avec les rayons

$$\mathrm{MP} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} d \sin 2n - \rho, \quad \text{et} \quad \mathrm{MP}' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} d \sin 2n + \rho.$$

On n'a plus qu'à faire passer par ces deux cercles deux cylindres droits pour obtenir les points limites du plan parallèle au plan réfringent (mene par D), qui reçoivent encore les rayons du cylindre incident dont la base est ABC. Si $\mathrm{R} = \rho$, le rayon du cercle interieur ABC devient égal à o. Si $R < \rho$, le rayon de ce cercle devient négatif, ce qui veut dire qu'il devient, comme dans la *fig.* 12, tangent intérieurement au cercle ABC Mais ce cercle a encore ici une autre destination ; il circonscrit tous les points E qui sont tels que si des points G avec R comme rayon on décrit des cercles, ces cercles ne coupent pas le cercle ABC. Vers les points D correspondants à ces points E arrivent, par conséquent, tous les rayons d'un cône complet de réfraction. Dans l'anneau compris entre AQP et RQ′P′ se trouvent les points qui ne reçoivent qu'une partie des rayons de ce cône.

Soit la position du point D déterminée par sa distance $R + x$ à l'axe optique mené par M et par l'angle des deux plans menés l'un par l'axe optique et le point D, l'autre par ce même axe et le point N, c'est-à-dire par l'angle $PME = \Pi$. Si l'on décrit du point M comme centre et du rayon ρ le cercle abc, et du point E avec le rayon R un cercle qui coupe le premier aux points h et i, l'arc hi sera égal à HI et les rayons Eh, Ei, EM seront inclinés sur PA d'un angle double de l'angle d'inclinaison des lignes EH, EI, En; n désignant l'intersection de GN avec le cercle décrit du point G.

Soit l'angle $MEh = MEi = z'$; on a

$$\sin^2 \frac{1}{2} z' = \frac{\rho^2 - x^2}{2R(R+x)}.$$

Supposons qu'un rayon Ev forme avec EM l'angle z, et que le point V dans l'intérieur du cercle ABC réponde à v, de telle sorte que EV forme avec En l'angle $\frac{1}{2}z$. Soit désignée par Q la vitesse du mouvement de V à E. Cette vitesse est une fonction de l'inclinaison de VE sur AB, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}(\Pi + z)$, et elle est dirigée perpendiculairement à VE.

Si nous la décomposons suivant EN et perpendiculairement à cette direction, et si nous nommons la première composante p', la seconde s', nous aurons

$$p' = Q \sin \frac{1}{2} z, \quad s' = Q \cos \frac{1}{2} z.$$

Si nous multiplions ces composantes par l'élément de l'arc HI, c'est-à-dire par $R\,dz$, et si nous faisons une somme de composantes élémentaires semblables de $-z'$ à $+z'$, nous obtiendrons les composantes p et s du mouvement envoyé en E par l'arc HI,

$$p = R \int_{-z'}^{+z'} Q \sin \frac{1}{2} z\,dz, \quad s = R \int_{-z'}^{+z'} Q \cos \frac{1}{2} z\,dz.$$

Si nous portons dans cette équation la valeur de Q de l'équation (4), nous aurons

$$p = \frac{4R}{1+\nu} \int \left[P \cos \frac{1}{2}(\Pi + z) - S \sin \frac{1}{2}(\Pi + z) \right] \sin \frac{1}{2} z\,dz,$$
$$s = \frac{4R}{1+\nu} \int \left[P \cos \frac{1}{2}(\Pi + z) - S \sin \frac{1}{2}(\Pi + z) \right] \cos \frac{1}{2} z\,dz,$$

d'où

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{4R}{1+\nu}\left(P\sin\frac{1}{2}\Pi + S\cos\frac{1}{2}\Pi\right)(z' - \sin z'),\\ s &= -\frac{4R}{1+\nu}\left(P\cos\frac{1}{2}\Pi - S\sin\frac{1}{2}\Pi\right)(z' + \sin z'),\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$\sin^2\frac{1}{2}z' = \frac{\rho^2 - x^2}{2R(R+x)},$$

$\rho + x$ désigne la distance du point D ou du point E au bord intérieur, et $\rho - x$ la distance du même point au bord extérieur de l'anneau à l'intérieur duquel sont placés tous les points qui reçoivent l'ébranlement. Quand $\rho^2 - x^2$ devient négatif le point déterminé en position par $R + x$, par Π et par d ne reçoit plus aucun mouvement; mais quand $\frac{\rho^2 - x^2}{2R(R+x)} = 1$ ou > 1, on doit substituer à z dans l'équation (10) la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à 1, c'est-à-dire π.

Dans ce cas on obtient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} p\sin\frac{1}{2}\Pi - s\cos\frac{1}{2}\Pi &= -\frac{4R\pi P}{1+\nu},\\ p\cos\frac{1}{2}\Pi + s\sin\frac{1}{2}\Pi &= -\frac{4R\pi S}{1+\nu}.\end{aligned}\right.$$

Les quantités du premier membre sont les composantes des vitesses envoyées vers D, perpendiculairement et parallèlement au plan des axes optiques, ainsi que P et S sont les composantes correspondantes dans la lumière incidente. Dans ce cas, le plan de polarisation demeure donc le même pour la lumière réfractée et pour la lumière incidente. Ceci subsiste pour tous les rayons dont les points E sont situés dans l'intérieur du cercle APQ, *fig.* 12; à partir de là, c'est-à-dire pour les points qui sont situés en dehors de ce cercle, le plan de polarisation tourne jusqu'à ce que les rayons qui éclairent les points les plus extérieurs dans le cercle BP'Q' soient polarisés perpendiculairement à leur azimut, c'est-à-dire perpendiculairement à la ligne tirée du point B à chacun d'eux.

Les formules (11) sont, au reste, les mêmes que nous avons trouvées pour D' et D'' au § XVII, équations (7) et (8), quand nous avons posé

$$\nu\sin\varphi = \sin\varphi' = \sin\varphi'' \quad\text{et}\quad \varphi = 0.$$

Quand $R > \rho$ il y a la moitié de l'espace APQ sans lumière. Les rayons lumineux de la surface extérieure, aussi bien que ceux de la surface intérieure de l'anneau, sont de polarisés perpendiculairement à leur azimut, c'est-à-dire que les premiers sont polarisés perpendiculairement au plan qui serait mené par leur direction et l'axe optique B, les derniers perpendiculairement au plan qui serait conduit par leur direction et l'axe optique A.

Si la lumière incidente n'était pas polarisée, nous déduirions de l'équation (10)

$$p^2 = \frac{8R^2}{(1+\nu)^2} I^2 (z' - \sin z')^2,$$

$$s^2 = \frac{8R^2}{(1+\nu)^2} I^2 (z' + \sin z')^2.$$

Pour $z' = 0$, c'est-à-dire $x = \pm \rho$, la lumière est polarisée perpendiculairement à l'azimut $\frac{1}{2}\Pi$. Pour $\sin z = 0$ et $z = \pi$ la lumière est à l'état naturel. Pour les autres directions la lumière est seulement polarisée en partie perpendiculairement à l'azimut $\frac{1}{2}\Pi$, et la portion polarisée est donnée par l'équation

$$\frac{s^2 - p^2}{s^2 + p^2} = \frac{2z \sin z}{z^2 + \sin^2 z}.$$

§ XIX.

Je m'occuperai, dans ce paragraphe, de la recherche de l'angle de polarisation, et d'abord des cas les plus simples pour lesquels le problème permet une solution complète. Ce sont les trois cas où le plan d'incidence coïncide avec l'un des trois plans rectangulaires déterminés par les axes d'élasticité pris deux à deux. Il suffit de poser, dans les formules (5), (6), (7) et (8), § XVII, $R_p = 0$, et d'en tirer φ. Cet angle φ est l'angle de la polarisation complète.

1. *Le plan d'incidence est bissecteur de l'angle de deux axes optiques*; on a, d'après l'équation (5), § XVII,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & 0 = R_p = \sin(\varphi - \varphi'') \cos(\varphi + \varphi'') \pm \frac{\sin^2 \varphi''}{e^2 E}, \\ & \frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos k \sin 2\upsilon. \end{aligned} \right.$$

Si l'on appelle ξ l'inclinaison de la normale de l'onde extraordinaire sur l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle aigu des deux axes optiques, on a

$$\sin 2\upsilon \sin k = \sin 2n \cos \xi, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotang} k = \sin \xi \operatorname{cotang} n,$$

ces valeurs, substituées dans $\frac{1}{E}$, donnent

$$\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos^2 n \sin 2\xi = \frac{\pi^2 - \nu^2}{2} \sin 2\xi.$$

Substituant cette valeur dans la première des éq. (1), et observant en même temps que

$\sin^2\varphi''$ $= \sin^2\varphi$, on obtient

$$(2)\qquad 0 = \sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') \pm \frac{\pi^2-\nu^2}{2}\sin 2\xi \sin^2\varphi.$$

D'après cela, on peut éliminer ξ au moyen de l'inclinaison du plan reflechissant sur l'axe d'élasticité qui divise l'angle aigu des deux axes optiques. Soit $90° - \mathrm{I}$ la valeur de cette inclinaison; on a

$$(3)\qquad \xi - \varphi'' = \mathrm{I}, \quad \text{ou} \quad \xi + \varphi'' = \mathrm{I}.$$

selon que, dans l'équation (2), le signe de $\frac{\pi^2-\nu^2}{2}$ est additif ou soustractif; car, d'après l'équation (5), § XVII, on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que $\mathrm{I} < \xi$ ou $\mathrm{I} > \xi$. Si l'on substitue la valeur de ξ, donnée par l'équation (3), on peut réunir les deux équations en une seule qui réponde à la fois aux valeurs positives et négatives de I, et l'on obtient

$$(4)\qquad 0 = \sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') - \frac{\pi^2-\nu^2}{2}\sin^2\varphi \sin 2(\mathrm{I}-\varphi'').$$

D'ailleurs entre φ et φ'' a lieu la relation

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\mu^2 + (\pi^2-\mu^2)\sin^2\upsilon],$$

qui, par l'élimination de υ au moyen de ξ et de I, se change en

$$(5)\qquad \sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\left[\frac{\pi^2+\nu^2}{2} - \frac{\pi^2-\nu^2}{2}\cos 2(\mathrm{I}-\varphi'')\right].$$

Si l'on développe les équations (4) et (5) par rapport à $\sin 2\varphi''$ et à $\cos 2\varphi''$, on en déduit facilement les valeurs suivantes :

$$\sin 2\varphi'' = -\frac{(\pi^2-\nu^2)[1-(\pi^2+\nu^2)\sin^2\varphi]\sin^2\varphi\sin 2\mathrm{I} - \sin 2\varphi[1-(\pi^2-\nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}]}{[(\pi^2-\nu^2)\sin^2\varphi\sin 2\mathrm{I}]^2 + [1-(\pi^2-\nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}]^2},$$

$$\cos 2\varphi'' = \frac{[1-(\pi^2+\nu^2)\sin^2\varphi][1-(\pi^2-\nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}] + (\pi^2-\nu^2)\sin 2\varphi\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}}{[(\pi^2-\nu^2)\sin^2\varphi\sin 2\mathrm{I}]^2 + [1-(\pi^2-\nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}]^2}$$

Si l'on ajoute les carrés de ces deux équations, on trouve, après quelques réductions pour l'angle de polarisation cherché,

$$(6)\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1-\nu^2)\cos^2\mathrm{I} + (1-\pi^2)\sin^2\mathrm{I}}{1-\pi^2\nu^2}.$$

2. *Si le plan d'incidence est bissecteur de l'angle obtus des deux axes optiques, et perpendiculaire à leur plan*, on a l'équation (6), § XVII, à traiter de la même manière. Il est facile d'ailleurs d'en avoir le résultat. Ce résultat peut aussi se déduire de l'équation (6) en changeant π^2 en μ^2, I en I'; $90° - \mathrm{I}'$ est l'inclinaison du plan réflecteur sur l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle obtus des axes optiques.

On a, par conséquent, dans ce cas,

$$(6)\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1-\nu^2)\cos^2 I' + (1-\mu^2)\sin^2 I'}{1-\nu^2\mu^2}.$$

5. *Si le plan d'incidence coïncide avec le plan des axes optiques*, on doit poser dans les formules (7), § XVII, $R_p = 0$. Cette équation $R_p = 0$ se change, par une introduction de ξ et de I analogue à celle qu'on a faite dans l'équation (2) de ce paragraphe, en

$$(7)\qquad 0 = \sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2(I-\varphi'')\sin^2\varphi;$$

pour la relation entre φ et φ'' on obtient

$$(8)\qquad \sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\left[\frac{\pi^2+\mu^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos 2(I-\varphi'')\right],$$

d'où l'on tire

$$(9)\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1-\mu^2)\cos^2 I + (1-\pi^2)\sin^2 I}{1-\mu^2\pi^2}.$$

Cette dernière équation fournit la solution de l'équation $R_p = 0$ (8), § XVII, en changeant μ^2 en π^2 et π^2 en μ^2, et remplaçant I par I'; I' ayant la même signification que ci-dessus. Mais comme on a ici $I + I' = 90°$, on voit que la formule (9) de l'angle de polarisation ne subit pas de changement par ces substitutions.

D'après les considérations qui, dans le § VIII, nous ont conduits à l'équation (3), et qui peuvent s'adapter à tous les milieux réfléchissants cristallins, à quelque classe de cristaux qu'ils appartiennent, l'angle de la polarisation complète dépend aussi, dans ce cas, en général de l'équation

$$(10)\qquad ps + p's' = 0.$$

Je vais mettre cette équation sous une forme plus simple. Si l'on pose

$$\begin{aligned}
\sin x' \sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' &= A',\\
\sin x'' \sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') + \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' &= A'',\\
-\sin x' \sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' &= B',\\
-\sin x'' \sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') + \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' &= B'',
\end{aligned}$$

les formules pour p, p', s, s', (2), § XVII, se transforment dans les suivantes :

$$\begin{aligned}
Np &= A'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'') + A''\cos x'\sin(\varphi+\varphi'),\\
Ns &= B'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'') + B''\cos x'\sin(\varphi-\varphi'),\\
Ns' &= A'B'' - A''B',\\
Np' &= -\cos x'\cos x''\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'').
\end{aligned}$$

Ces expressions, substituées dans l'équation (10), donnent

$$\left.\begin{array}{l}[\mathrm{A}'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+\mathrm{A}''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')][\mathrm{B}'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+\mathrm{B}''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')]\\ \qquad+(\mathrm{A}'\mathrm{B}''-\mathrm{A}''\mathrm{B}')\cos x'\cos x''\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\end{array}\right\}=0.$$

Si l'on développe les multiplications, on voit bientôt que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$[\mathrm{A}'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+\mathrm{A}''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')][\mathrm{B}'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')-\mathrm{B}''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')]=0.$$

Des deux facteurs de cette équation, le premier contient seul les racines qui répondent à la question; on peut s'en convaincre en posant la différence des deux axes d'élasticité $=0$. L'angle de la polarisation complète dépend donc seulement de

$$\mathrm{A}'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+\mathrm{A}''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')=0,$$

ou, après remplacement des valeurs A′ et A″, de

$$(11)\quad \sin x'\cos x''\cos(\varphi+\varphi')+\sin x''\cos x'\cos(\varphi+\varphi'')+\frac{\sin^2\varphi'\tang q''\cos x''}{\sin(\varphi-\varphi'')}+\frac{\sin^2\varphi''\tang q'\cos x'}{\sin(\varphi-\varphi')}=0.$$

Si pour tang q' et tang q'' on met leurs valeurs tirées des équations (2) et (5), § XVI, et pour $\frac{\sin^2\varphi'}{o^2}$ et $\frac{\sin^2\varphi''}{e^2}$ la quantité $\sin^2\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned}&\sin x'\cos x''\cos(\varphi+\varphi')+\sin x''\cos x'\cos(\varphi+\varphi'')\\ &-\sin^2\varphi\left[\frac{\sin j\sin(u-u')\cos x''}{\sin(\varphi-\varphi'')}+\frac{\cos k\sin(\upsilon+\upsilon')\cos x'}{\sin(\varphi-\varphi')}\right]\frac{\pi^2-\mu^2}{2}=0.\end{aligned}$$

Je déduirai une expression approchée de $\sin\varphi$, en ayant seulement égard aux premières puissances de la différence des axes d'élasticité. Dans le terme multiplié par $\pi^2-\mu^2$ on peut alors poser $j=k$, $u=\upsilon$ et $u'=\upsilon'$, $\sin x'=-\cos x''$ et $\cos x'=-\sin x''$, et enfin $\varphi'=\varphi''$.

Si l'on pose d'ailleurs

$$\cos(\varphi+\varphi'')=\cos(\varphi+\varphi')-\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi''),$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\cos(\varphi-\varphi')+\cos^2x'\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')\\ &=\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi-\varphi')}[\cos j\sin(u+u')\cos x'-\sin j\sin(u-u')\sin x']\frac{\pi^2-\mu^2}{2}.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\sin(\varphi'-\varphi'')=-\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\,\frac{\sin u\sin u'\sin^2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi'},$$

on obtient

$$(12)\qquad \cos(\varphi+\varphi') = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{[\cos j \sin(u+u')\cos x' - \sin j \sin(u-u')]\sin x'}{\sin(\varphi-\varphi')} \\ + \dfrac{\sin(\varphi+\varphi')}{\sin\varphi'\cos\varphi'}\cos x' \sin u \sin u' \end{array} \right\} \sin\varphi \,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}.$$

Je désignerai par α la quantité multipliée par $\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}$, de sorte que

$$\cos(\varphi+\varphi') = \alpha\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}.$$

En négligeant les puissances supérieures de $\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}$, on obtient

$$\sin^2\varphi + \sin^2\varphi' = 1 - \sin\varphi\cos\varphi\,\alpha\,(\pi^2-\mu^2);$$

et comme

$$\sin^2\varphi' = \sin^2\varphi\left[\frac{\pi^2+\mu^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u-u')\right],$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\dfrac{\pi^2+\mu^2}{2}}\left\{1 + [\cos(u-u')\sin^2\varphi - \sin 2\varphi\,\alpha]\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\}$$

remettant pour α sa valeur

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)}$$

$$\times\left\{1 + \left\{ \begin{array}{l} \cos(u-u') - \dfrac{\sin(\varphi+\varphi')\sin 2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi'}\sin u \sin u' \cos^2 x' \\ - \sin 2\varphi\,\dfrac{[\cos j \sin(u+u')\cos x' - \sin j \sin(u-u')\sin x']}{\sin(\varphi-\varphi')} \end{array} \right\} \sin^2\varphi\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\}.$$

On peut donner à cette formule plus de concision en posant

$$\cos^2 x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x',$$

et en observant que la première approximation $\cos(\varphi+\varphi') = 0$ donne

$$\frac{\sin(\varphi+\varphi')\sin 2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi'} = 2 \quad\text{et}\quad \sin(\varphi-\varphi') = -\cos 2\varphi.$$

Elle devient

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)} \\ \times\left\{1 + \left\{ \begin{array}{l} \cos u \cos u' - \sin u \sin u' \cos 2x' \\ + \operatorname{tang} 2\varphi[\cos j \sin(u+u')\cos x' - \sin j \sin(u-u')\sin x'] \end{array} \right\} \sin^2\varphi\,\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\}. \end{array} \right.$$

Dans cette expression de $\sin^2\varphi$ doivent être placées, à la place de u, u', x', leurs valeurs exprimées en fonction de la valeur approchée de $\sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}$ et des quantites qui déterminent la position du plan réfléchissant et l'azimut du plan de réflexion.

Supposons que la normale au plan réfléchissant forme avec les deux axes optiques les angles U et U'. Soit X l'azimut du plan de réflexion compté à partir du plan qui divise en deux parties égales l'angle que font entre eux les deux plans menés par la normale au plan réfringent, et les deux axes optiques. Soit 2J cet angle lui-même. On a

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \cos u &= \cos\varphi'\cos U + \sin\varphi'\sin U\cos(X+J),\\ \cos u' &= \cos\varphi'\cos U' + \sin\varphi'\sin U'\cos(X-J),\\ -\cos(x'+j)\sin u &= \sin\varphi'\cos U - \cos\varphi'\sin U\cos(X+J),\\ -\cos(x'-j)\sin u' &= \sin\varphi'\cos U' - \cos\varphi'\sin U'\cos(X-J),\\ \sin(x'+j)\sin u &= \sin U\sin(X+J),\\ \sin(x'-j)\sin u' &= \sin U'\sin(X-J). \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine, à l'aide de ces formules, u, u', x', j dans l'équation (13), et qu'on fasse dans la partie multipliée par $\pi^2-\mu^2$, $\varphi' = 90^\circ - \varphi$, on obtient, après quelques réductions,

$$(15)\quad \sin^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}\left\{1-\left[\cos U\cos U' - \sin U\sin U'\begin{pmatrix}\cos(X-J)\cos(X+J)\\ +\sin(X-J)\sin(X+J)\cos 2\varphi\end{pmatrix}\right]\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{(\pi^2-\mu^2)}{2}\right\}.$$

On peut éliminer J au moyen des relations

$$\begin{aligned} 2\sin U\sin U'\cos^2 J &= \cos 2n - \cos(U+U'),\\ -2\sin U\sin U'\sin^2 J &= \cos 2n - \cos(U-U'), \end{aligned}$$

et l'on obtient

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}$$
$$\times\left\{1-\left\{\begin{matrix}\cos U\cos U' + [\cos(U-U') - \cos 2n]\cos^2\varphi\\ -\sin U\sin U'(\cos^2 X + \sin^2 X\cos 2\varphi)\end{matrix}\right\}\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\},$$

et en substituant à $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ leurs valeurs approchées,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)}\\ &\times\left\{1+\frac{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\cos 2n}{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}-1}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2} - \begin{bmatrix}\cos U\cos U'(1+\pi^2+\mu^2)\\ -\sin U\sin U'\cos 2X\end{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)}{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}-1}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Mais on peut, puisque nous avons négligé le carré de $\pi^2-\mu^2$, écrire

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}\left[1-\frac{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\cos 2n}{1-\frac{(\mu^2+\pi^2)^2}{2}}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right]=\frac{1}{1+\frac{\mu^2+\pi^2}{2}+\frac{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\cos 2n}{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}},$$

et cette formule se change, quand on substitue à $\cos 2n$ sa valeur $\frac{\pi^2+\mu^2-2\nu^2}{\pi^2-\mu^2}$, dans

$$\frac{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}}{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\nu^2},$$

de là on déduit enfin

$$\sin^2\varphi=\frac{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}}{1-\frac{\pi^2+\mu^2}{2}\nu^2}\left[1+\frac{\cos U\cos U'(1+\pi^2+\mu^2)-\sin U\sin U'\cos 2X}{1-\left(\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\right)^2}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right].$$

Les conséquences les plus remarquables qui dérivent immédiatement de cette expression approchée de l'angle de polarisation complète sont les suivantes :

1. Il existe pour tout plan réflecteur deux azimuts du plan d'incidence perpendiculaires l'un à l'autre, dans lesquels l'angle de la polarisation complète est un maximum et un minimum. Ces azimuts divisent symétriquement le système des angles de polarisation, c'est-à-dire que dans les deux plans d'incidence qui s'inclinent également sur le plan du maximum ou du minimum de l'angle de polarisation se trouvent les angles de polarisation d'égale inclinaison. Les deux plans du plus petit et du plus grand angle de polarisation sont parallèles au plus grand et au plus petit rayon vecteur de la section déterminée dans la surface d'élasticité par le plan réfléchissant.

2. Si le plan réfléchissant est perpendiculaire à l'un des axes optiques, auquel cas $U=0$, ou $U'=0$, les angles de la polarisation complète sont égaux dans tous les azimuts.

Ces théorèmes ont la plus grande analogie avec les théorèmes que nous avons donnés pour les cristaux à un axe, et je présume qu'ils ne sont pas non plus ici approximatifs, mais rigoureux.

§ XX.

Le plan de polarisation du rayon complétement polarisé par réflexion, forme avec le plan d'incidence, l'angle α, et pour la détermination de cet angle les considérations du § VIII, dans le cas des cristaux à un axe, ont conservé toute leur valeur. On a donc

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{s'}{s};$$

s' et s doivent être exprimées au moyen des valeurs de φ, φ', φ'' déterminées par l'angle de polarisation complète correspondant, § XIX. Nous avons trouvé ci-dessus, § XVII, équation (2),

$$(2) \qquad Ns' = \sin 2\varphi \left[\begin{array}{l} \sin x' \sin x'' \sin(\varphi'-\varphi'')\cos(\varphi'+\varphi'') \\ -\sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'' + \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x' \end{array}\right].$$

Pour s on tire de l'équation (2), § XVII, en éliminant $\operatorname{tang} q'$ et $\operatorname{tang} q''$ au moyen de l'équation (11), § XIX,

$$Ns = -\sin 2\varphi\,[\cos x' \sin x'' \sin(\varphi-\varphi') - \cos x'' \sin x' \sin(\varphi-\varphi'')];$$

on a, par conséquent,

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \alpha = -\frac{\sin x' \sin x'' \sin(\varphi'-\varphi'')\cos(\varphi'+\varphi'') - \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'' + \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x'}{\cos x' \sin x'' \sin(\varphi-\varphi') - \cos x'' \sin x' \sin(\varphi-\varphi'')}.$$

Si, d'après les équations (2) et (5), § XVI, on pose

$$\operatorname{tang} q' = \frac{1}{\rho^2 O}, \quad \operatorname{tang} q'' = \frac{1}{\rho^2 E},$$

et d'après l'équation (34), § XV,

$$\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u-u') \sin j, \quad \frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \nu^2}{2} \sin(v-v') \cos k,$$

et

$$\frac{\sin^2\varphi'}{o} = \frac{\sin^2\varphi''}{e} = \sin^2\varphi,$$

et

$$\sin^2\varphi \frac{\pi^2-\mu^2}{2} = \frac{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi'}{\cos(\varphi+\varphi') - \cos(u-u')},$$

on obtient

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \alpha = -\sin(\varphi-\varphi'') \left\{ \frac{\sin x' \sin x'' \cos(\varphi'+\varphi'') + \left[\frac{\sin(u-u')\sin j \sin x'' - \sin(v-v')\cos k \sin x'}{\cos(u-u') - \cos(\varphi+\varphi')}\right] \sin(\varphi'+\varphi'')}{\cos x' \sin x'' \sin(\varphi-\varphi') - \cos x'' \sin x' \sin(\varphi-\varphi'')} \right\}.$$

Numériquement on peut toujours calculer la déviation du plan de polarisation au moyen de l'angle de la polarisation complète, de l'azimut du plan d'incidence et des quantités qui déterminent la position du plan réfléchissant; mais on peut encore donner à l'équation une forme plus convenable pour cet objet. L'élimination analytique complète de x', x'', u, u', v, v' paraît conduire à des calculs trop longs ; je me contenterai, en conséquence, d'avoir égard dans cette élimination à la première puissance de $\pi^2 - \mu^2$, ou, ce qui revient au même, de $\sin(\varphi' - \varphi'')$. Si l'on s'en tient à cette approximation, on peut poser dans la formule (4)

$$u = v, \quad u' = v', \quad \sin x'' = -\cos x', \quad \cos x'' = -\sin x', \ldots$$

et dans la partie multipliée par $\sin(\varphi' - \varphi'')$, $\varphi' = \varphi''$, on obtient

$$(5)\quad \tang z = -\frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin(\varphi - \varphi'')} \left\{ \frac{\sin u \sin u' \sin 2x' \cos 2\varphi' + [\sin u \cos u' \cos(x+y) + \sin u' \cos u \sin(x-y) \ldots]}{2 \sin u \sin u'} \right\}.$$

De l'équation (14) du précédent paragraphe on déduit

$$\sin u \cos u' \sin(x+y) + \sin u' \cos u \sin(x-y) = \begin{bmatrix} \sin U \cos U' \sin(X+J) \\ + \sin U' \cos U \sin(X-J) \end{bmatrix} \cos\varphi' + \sin U' \sin U \sin \ldots,$$

$$\sin u \sin u' \sin 2x' = -\begin{bmatrix} \sin U \cos U' \sin(X+J) \\ + \sin U' \cos U \sin(X-J) \end{bmatrix} \sin\varphi' + \sin U \sin U' \sin \ldots$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (5), donnent, après avoir posé . . . .

$$\frac{-\sin(\varphi' - \varphi'')}{2 \sin u \sin u'} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi'},$$

$$(6)\quad \tang z = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi' \sin(\varphi - \varphi')} \left\{ \begin{array}{l} \sin U \sin U' \sin 2X \cos\varphi' \\ + [\sin(U+U') \sin X \cos J + \sin(U-U') \cos X \sin J] \sin\varphi' \end{array} \right\}$$

De $\tang z = 0$ on déduit

$$(7)\quad \sin U \sin U' \sin 2X \cos\varphi' + [\sin(U+U') \sin X \cos J + \sin(U-U') \cos X \sin J] \sin\varphi' = 0,$$

d'où l'on déduira X après avoir posé pour φ' la valeur correspondante à l'angle de polarisation. Examinons les cas les plus simples où le plan réflecteur est parallèle à l'un des axes d'élasticité.

1. $U - U' = 0$. Ceci donne

$$(\sin U \cos\varphi' \cos X + \cos U \cos J \sin\varphi') \sin X = 0.$$

La polarisation complète sans déviation du plan de polarisation a lieu ainsi

(a) pour $\sin X = 0$,

(b) pour $\cos X = -\cot U \tang\varphi' \cos J$.

Ces conditions déterminent quatre azimuts de polarisation complète sans déviation.

2. $U + U' = 0$ nous donne

$$(\sin U \sin X \cos\varphi' + \cos U \sin J \sin\varphi') \cos X = 0,$$

d'où

(c) $\cos X = 0$,

(d) $\sin X = -\cot U' \sin J \tang\varphi'$.

3. Quand le plan réfléchissant est parallèle à l'axe moyen d'élasticité, il vient ou $J = 0$, ou $J = 90°$. Nous avons, dans le premier cas,

$$(e)\qquad \sin X = 0,$$

$$(f)\qquad \cos X = -\frac{\sin(U+U')\tang\varphi'}{2\sin U\sin U'},$$

et dans le second cas,

$$(g)\qquad \cos X = 0,$$

$$(h)\qquad \sin X = -\frac{\sin(U-U')\tang\varphi'}{2\sin U\sin U'}.$$

Il y a donc, en général, dans ces derniers cas, outre la section principale, deux autres azimuts où la polarisation complète a lieu sans déviation de son plan. Ces azimuts feront l'objet d'un examen plus approfondi. Les équations (b) et (d) peuvent être comprises dans une même équation.

Soit $90° - \xi$ l'inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe d'élasticité qui divise en deux moitiés l'angle $2n$ des axes optiques, de sorte que

$$\cos U = \cos\xi\cos n,$$

$$\sin J = \frac{\sin n}{\sin U}.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation (b), donnent

$$(8)\qquad \cos X = -\tang\varphi'.\frac{\tang\xi\cos^2 n}{\tang^2\xi + \sin^2 n}.$$

L'équation (d) donne une équation toute semblable, à cette différence près qu'à n on substitue $n' = 90° - n$ et que ξ ne désigne pas, comme dans l'équation (8), l'inclinaison sur l'axe π, mais sur l'axe μ. Les propriétés du plan réfléchissant exprimées par l'équation (8) se déduisent plus facilement de la même équation quand on écrit

$$(9)\qquad \tang\xi = -\frac{1}{2}\frac{\tang\varphi'\cos^2 n}{\cos X} \pm \sqrt{\frac{\tang^2\varphi'\cos^4 n}{4\cos^2 X} - \sin^2 n},$$

d'où il résulte qu'à chaque valeur de $\cos X$ correspondent deux valeurs positives de $\tang\xi$, mais que $\cos^2 X$ a un maximum qui ne peut être dépassé. Nous distinguons deux cas : 1° le maximum de $\cos X$ est réel.

La condition de réalité est

$$(10)\qquad \tang^2\varphi' < \frac{4\tang^2 n}{\cos^2 n}.$$

Le maximum même est

$$\cos X = -\frac{\tang\varphi'\cos^2 n}{2\sin n},$$

et il a lieu pour un plan défini par la condition

(11) $$\operatorname{tang} \xi = \sin n.$$

La limite de possibilité de ce maximum est

$$\operatorname{tang}^2 \varphi' = \frac{4 \operatorname{tang}^2 n}{\cos^2 n}.$$

Alors $\cos X = -1$; pour le plan réfléchissant reste $\operatorname{tang} \xi = \sin n$,

2° Le maximum de $\cos X$ n'est pas réel. Ceci a lieu quand

$$\operatorname{tang}^2 \varphi' > \frac{4 \operatorname{tang}^2 n}{\cos^2 n}.$$

$\cos X$ devient ici -1 pour

(12) $$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} \xi' &= \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi' \cos^2 n - \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{tang}^2 \varphi' \cos^4 n - 4 \sin^2 n} \\ &\text{et} \\ \operatorname{tang} \xi'' &= \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi' \cos^2 n + \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{tang}^2 \varphi' \cos^4 n - 4 \sin^2 n}. \end{aligned}\right.$$

Sur tous les plans réflecteurs compris entre les deux plans déterminés par ξ' et ξ'' il n'y a que la section principale pour laquelle la polarisation complète puisse avoir lieu sans déviation du plan de polarisation. Entre $\xi = \xi'$ et $\xi = 0$, et entre $\xi = \xi''$ et $\xi = 90°$ paraissent, outre la section principale, deux nouveaux azimuts qui ont semblable propriété.

Comme l'angle de polarisation ne varie pas beaucoup pour le même cristal, ces résultats peuvent être rendus plus sensibles par un exemple.

Soit l'angle de polarisation $= 56°$, ce qui donne pour φ' environ $34°$. De l'équation (10) on déduit

$$\operatorname{tang}^2 n > \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi'}{\cos \varphi'}.$$

$\varphi' = 34°$ donne $n > 17° \frac{1}{2}$. Quand donc l'angle des deux axes optiques, c'est-à-dire $2n$, est compris entre 35 et $180° - 35°$, les azimuts sans déviation du plan de polarisation sont possibles aussi bien sur les plans qui sont parallèles au plus grand des axes d'élasticité que sur les plans qui sont parallèles au plus petit. Si l'angle des axes optiques est en dehors de ces limites, il n'y a plus qu'un seul système de plans réflecteurs qui présente des azimuts semblables.

J'arrive aux plans réfléchissants, qui sont parallèles à l'axe moyen d'élasticité. Si l'on désigne encore par ξ leur inclinaison sur l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle des deux axes optiques, on a à poser, dans l'équation (f),

$$U = n + \xi,$$
$$U' = n - \xi,$$

et dans l'équation (h),

$$U = n + \xi,$$
$$U' = n - \xi$$

Comme dans l'équation (h) l'angle X est compté à partir du plan perpendiculaire à la section principale, je ferai correspondre son zéro à celui de X dans l'équation (f) où cet angle est compté à partir de la section principale elle-même; dans l'équation (h), à la place de X je mettrai X — 90°; par là les équations (f) et (h) rentrent dans une même équation

$$(13) \qquad \cos X = -\frac{\sin\xi\cos\xi}{\sin^2\xi - \sin^2 n}\operatorname{tang}\varphi'.$$

Les azimuts X sans déviation forment donc toujours un angle obtus avec l'azimut de l'axe optique le plus voisin, que la normale au plan réfléchissant soit dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus des axes optiques. Si l'on renverse l'équation (13), on peut l'écrire

$$(14) \qquad \operatorname{tang}\xi = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varphi'}{4\cos^4 n\cos^2 X} + \operatorname{tang}^2 n} - \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{2\cos^2 n\cos X},$$

où cos X peut être positif ou négatif. On voit que cet azimut sans déviation ne subsiste plus, ou plutôt à cause des équations (e) et (g), qu'il n'y a de plan de polarisation sans déviation que lorsque le plan d'incidence coïncide avec la section principale, de

$$\operatorname{tang}\xi' = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varphi'}{4\cos^4 n} + \operatorname{tang}^2 n} - \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{2\cos^2 n}$$

à

$$\operatorname{tang}\xi'' = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varphi'}{4\cos^4 n} + \operatorname{tang}^2 n} + \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{2\cos^2 n}.$$

En dehors de ces limites apparaissent de nouveaux azimuts sans déviation qui croissent jusqu'à 90°, limite qu'ils atteignent sur les plans perpendiculaires aux axes d'élasticité. L'angle que forment entre eux les plans correspondants à ξ' et ξ'', a une expression très-simple que voici :

$$\operatorname{tang}(\xi'' - \xi') = \operatorname{tang}\varphi'.$$

Si l'on désigne par (ζ') et (ζ'') en général deux valeurs de ξ dans l'équation (14) qui correspondent à X et à 90° — X, on a

$$(15) \qquad \operatorname{tang}(\zeta'' - \zeta') = \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\cos X}.$$

C'est assurément un résultat inattendu que, relativement aux plans qui sont perpendiculaires aux axes optiques, il y ait pour chaque azimut, excepté pour $\sin X = 0$, une déviation du plan de polarisation, et que cette déviation ait lieu malgré l'égalité de l'angle de polarisation dans tous les azimuts. Cette déviation se déduit de l'équation (6) quand on y fait $U = 0$, $J = 0$. On trouve

(16) $$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\pi^2 - \mu^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \varphi \sin n \sin X}{\cos \varphi' \sin(\varphi - \varphi')}.$$

Sur chaque plan réfléchissant il y a toujours au moins deux azimuts dans lesquels la déviation du plan de polarisation est égale à 0, c'est-à-dire que l'équation (7), qui est du quatrième degré par rapport à X, a toujours au moins deux racines réelles. Ceci résultera du paragraphe suivant.

Pour l'azimut de la plus grande déviation, on déduit de l'équation (6), en la différentiant par rapport à X, et regardant φ, φ' comme constants, ce qui est permis dans un calcul approximatif,

(17) $$2 \cos \varphi' \sin U \sin U' \cos 2X + \sin \varphi' [\sin(U - U') \cos J \cos X - \sin(U - U') \sin J \sin X] = 0;$$

et si l'on désigne par m cet azimut maximum, on obtient

(18) $$\operatorname{tang} m = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\sin 2\varphi' \sin(\varphi - \varphi')} \left[\frac{2 \sin U \sin U' \cos \varphi' \cos X + \sin(U + U') \cos J \sin \varphi}{\sin X} \right]$$

§ XXI.

Dans le paragraphe précédent nous avons cherché la rotation du plan de polarisation par la réflexion sous l'angle de polarisation. Pour déterminer en général les rotations des plans de polarisation par réflexion, nous ferons les conventions qui suivent.

1. Je désignerai par δ_s la rotation que fait éprouver la réflexion à un rayon primitivement polarisé parallèlement au plan d'incidence ;

2. Par $90° - \delta_p$ la rotation que subit un rayon primitivement polarisé perpendiculairement au plan d'incidence ;

3. Par d_s l'azimut de la polarisation primitive d'un rayon incident, tel que dans le rayon réfléchi le plan de polarisation soit parallèle au plan d'incidence ;

4. Et par $90° - d_p$ l'azimut de la polarisation primitive dans lequel le rayon réfléchi est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence. On a

(1) $$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tang} \delta_s = \dfrac{s'}{s}, & \operatorname{tang} d_s = -\dfrac{s'}{p}; \\ \operatorname{tang} \delta_p = \dfrac{p'}{p}, & \operatorname{tang} d_p = -\dfrac{p'}{s}. \end{array} \right.$$

s, s', p, p' ont les valeurs données au § XVII, équations (2), d'après lesquelles ces angles peuvent être calculés dans chaque cas donné. La relation de ces angles entre eux est générale et subsiste pour tout milieu réfléchissant.

J'examinerai dans quelles circonstances ces angles δ_s, δ_p, d_s, d_p disparaissent; nous avons en conséquence à étudier les équations

$$p' = 0, \quad \text{et} \quad s' = 0,$$

qui deviennent, si l'on y substitue les valeurs tirées des équations (2), § XVII,

$$(\pi) \qquad \sin(\varphi' - \varphi'')\cos x' \cos x'' = 0,$$

$$(\sigma) \quad \sin x' \sin x'' \sin(\varphi' - \varphi'')\cos(\varphi' + \varphi'') + \sin x' \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' - \sin x'' \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' = 0.$$

Je m'occuperai seulement de la première approximation de ces équations, et je négligerai ce qui dépend de la seconde puissance et des puissances supérieures de $\sin(\varphi' - \varphi'')$. Si l'on s'en tient à ce degré d'approximation, l'équation (π) se change en $\sin 2x' = 0$, et cette équation, développée au moyen de l'équation (14), § XIX, donne

$$(\pi') \quad 0 = \sin\varphi'[\sin(U + U')\cos J \sin X + \sin(U - U')\sin J \cos X] - \cos\varphi' \sin U \sin U' \sin 2X;$$

la seconde équation (σ) donne la même formule qui a été trouvée, équation (7), § XX, à cela près que, dans l'équation actuelle, φ' ne se rapporte pas à l'angle de polarisation, mais peut recevoir toute valeur. On a ainsi

$$(\sigma') \quad 0 = \sin\varphi'[\sin(U + U')\cos J \sin X + \sin(U - U')\sin J \cos X] + \cos\varphi' \sin U \sin U' \sin 2X.$$

Ces équations représentent deux surfaces coniques intérieures au cristal: si l'on prend les arêtes de ces cônes normales aux ondes, et si l'on construit les directions qu'elles prennent à la sortie du cristal, on obtient l'ensemble des directions suivant lesquelles les rayons doivent tomber sur le plan du cristal pour que leur plan de polarisation, primitivement parallèle ou perpendiculaire, n'éprouve pas de changement par réflexion. Les deux surfaces coniques sont du troisième ordre; elles sont égales entre elles; elles ont commune la normale au plan réflecteur, mais l'une est par rapport à l'autre tournée autour de cette ligne de 180°. Je n'ai donc qu'à examiner avec attention le cône (π'). Ce cône nous sera très-utile dans l'étude de la réfraction.

Comme $\operatorname{tang}\varphi' = 0$, aussi bien quand $\sin X = 0$ que lorsque $\cos X = 0$, deux branches du cône doivent passer par la normale au plan de réfringence et se couper à angle droit suivant cette normale. Si $X = J$,

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang} U',$$

et si $X = -J$,

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang} U.$$

Le cône passe donc toujours par les deux axes optiques.

Si $\operatorname{tang} X = -\dfrac{\sin(U - U')}{\sin(U + U')}\operatorname{tang} J$,

$$\varphi' = 90°.$$

L'azimut X déterminé par cette équation est toujours négatif, puisque nous prenons toujours $U' < U$. Si nous l'appelons $-X'$, il vient

$$\operatorname{tang} U \sin(J - X') = \operatorname{tang} U' \sin(J + X).$$

Soient N, U, U' les intersections du plan réflecteur par sa normale et les deux axes optiques; ces trois lignes étant ménées par le point O au-dessous de ce plan. Si l'on suppose que la ligne NP divise l'angle UNU' de manière à donner

$$\sin \mathrm{UNP} : \sin \mathrm{U'NP} = \operatorname{tang} U' : \operatorname{tang} U,$$

NP sera une ligne parallèle au côté du cône.

Si l'on suppose, en outre, mené par N un plan perpendiculaire au plan des deux axes optiques, la ligne d'intersection des deux plans OS est un côté du cône. Cette dernière propriété du cône (π') se vérifie très-facilement si l'on considère N, U, U' comme les points de rencontre d'une sphère décrite du point O, avec la normale et les deux axes optiques. On n'a plus qu'à mener par N un grand cercle perpendiculaire à UU', et à démontrer que

$$\mathrm{NS} = \varphi', \quad \mathrm{SNU'} = J - X \quad \text{et} \quad \mathrm{UNS} = J$$

satisfont à l'équation (π').

Nous avons donc pour le cône (π') cinq côtés déterminés et la position de deux plans tangents. Ce cône coupera le plan réfléchissant, en général, suivant une courbe qui a sensiblement la forme ANSU'NUB. Les lignes NH et NH' représentent les directions du plus grand et du plus petit rayon vecteur de la section que le plan réflecteur déterminerait dans la surface d'élasticité.

Une propriété générale de ce cône est digne d'attention : dans l'intérieur de l'angle azimutal HNP il n'existe pour φ' que des valeurs négatives, qui sont telles que la polarisation primitivement perpendiculaire du rayon incident ne subit pas de modification par réflexion. Nous avons appelé X' cet angle HNP, et nous l'avons déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang} U \sin(J - X') = \operatorname{tang} U' \sin(J + X').$$

Dans la partie du cône NU'S φ' atteint un maximum. On déduit ce maximum de l'équation (π') en faisant $\frac{d\varphi'}{dX} = 0$: il a lieu dans l'azimut

$$(3) \qquad \operatorname{tang} X = \sqrt[3]{\operatorname{tang} J \frac{\sin(U - U')}{\sin(U + U')}};$$

sa valeur est

$$(4) \quad \operatorname{tang} \varphi' = \frac{2 \sin U \sin U' \sqrt{[\sin J \sin(U - U')]^{\frac{4}{3}} + [\cos J \sin(U + U')]^{\frac{4}{3}} - [\sin J \cos J \sin(U - U') \sin(U - U')]^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{\sin^2(U - U') \sin^2 J + \sin^2(U + U') \cos^2 J}\left\{[\sin(U - U') \sin J]^{\frac{2}{3}} + [\sin(U + U') \cos J]^{\frac{2}{3}}\right\}}.$$

La valeur de ce maximum est importante pour la question des azimuts suivant lesquels la polarisation primitive, parallèle ou perpendiculaire, n'est pas changée pour un angle d'incidence donné φ'. Tant que la valeur de φ' correspondante à cette valeur de φ n'est pas plus petite que la valeur donnée, éq. (4), il existe toujours quatre azimuts qui répondent à la question; dans le cas contraire il n'y en a plus que deux. Ceci s'applique à l'équation (7) du paragraphe précédent, qui est la même que celle notée (σ') dans ce paragraphe, laquelle, comme on l'a déjà remarqué, ne se distingue de (π') qu'en ce que à chaque valeur de X doit correspondre une valeur négative de φ'. Dans l'équation (7) φ' est l'angle de réfraction donné en fonction de l'angle de polarisation, et X est à déterminer.

Après les considérations qui précèdent, on peut toujours se représenter clairement la position de la surface conique (π'), quel que soit le plan réfléchissant; mais nous mentionnerons encore les cas limites où ce plan est parallèle aux axes d'élasticité. Si le plan réflecteur est parallèle au plus grand ou au plus petit des axes d'élasticité, on posera

$$U - U' = 0 \quad \text{ou} \quad U + U' = 180^\circ,$$

l'équation (π') se résout alors en deux facteurs dont l'un représente un plan, l'autre un cône du deuxième ordre. Le plan passe toujours par la normale au plan réfléchissant, et est perpendiculaire à celui des axes d'élasticité qui est parallèle à ce dernier plan. Le cône passe toujours par les deux axes optiques et par la normale au plan réfléchissant qu'il coupe suivant un cercle. Quand le plan réfléchissant est perpendiculaire à l'un des axes d'élasticité, (π') représente deux plans qui se coupent à angle droit parallèlement aux deux autres axes d'élasticité. Quand le plan réfléchissant est parallèle à l'axe moyen d'élasticité, (π') représente pareillement un plan et un cône du deuxième ordre. Le plan passe dans ce cas par les deux axes optiques, le cône par la normale au plan réfléchissant qu'il rencontre suivant un cercle.

Soient, *fig.* 14, N, U, U' les traces sur le plan réflecteur de la normale et des deux axes optiques, ces trois lignes étant menées par le même point O; soit NS le cercle suivant lequel le plan est coupé par le cône; la proportion harmonique suivante a lieu:

$$\sin UON : \sin U'ON' = \sin UON' : \sin U'ON.$$

Le cône est donc le même, quelle que soit celle des lignes ON ou ON' qui soit normale au plan de réfringence, et il existe toujours deux plans réfléchissants correspondants dans l'angle obtus et dans l'angle aigu des deux axes optiques qui ont le même cône elliptique. Ce cône se change en une ligne droite quand le plan réfléchissant est perpendiculaire à l'un des axes optiques.

L'azimut δ d'un rayon polarisé primitivement dans l'azimut a est, après la réflexion,

$$\tang \delta = \frac{\frac{p}{s}\tang a + \tang \delta_s}{1 + \tang a\, d_p}.$$

§ XXII.

Le cône (π'), considéré au paragraphe précédent, est important pour l'étude des cas dans lesquels un des deux rayons réfractés disparaît, dans l'hypothèse où la lumière incidente serait primitivement polarisée parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence. Si la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, on a, par l'équation (2), § XVII,

$$D' : D'' :: \sin(\varphi + \varphi')\cos x'' : \sin(\varphi + \varphi')\cos x' ;$$

d'où résulte que le rayon ordinaire ou le rayon extraordinaire disparaît selon que

$$\cos x' = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x' = 0.$$

Mais comme, en général, x' est compté de telle manière que si $\varphi' = \varphi''$,

$$\cos x' = -\sin x',$$

les deux angles sont racines d'une même équation, savoir, de $\sin 2x' = 0$, c'est-à-dire de l'équation (π'). Si l'on imagine, *fig.* 13, une sphère décrite du point O commun à la normale et aux axes optiques OU et OU', chaque côté OD' du cône (π') pour lequel l'angle $\mathrm{ND}'d = 90°$, D'D étant bissectrice de l'angle UD'U', est un rayon réfracté d'après la loi du rayon ordinaire, issu d'un rayon incident qui, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, n'a pas produit de rayon extraordinaire. Chaque côté OD'' pour lequel ND'' divise en deux parties égales l'angle UD''U' est le rayon extraordinaire d'un rayon incident qui, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, ne produit pas de rayon ordinaire. Il est facile de trouver, d'après cela, les directions des rayons incidents. Désignons dans le premier cas l'inclinaison de D' sur N par φ', dans le second cas l'inclinaison de D'' sur N par φ'', et les angles d'incidence correspondants à φ' et à φ'' par ξ' et ξ'', il vient

$$\sin \xi' = \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{\frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\cos(u - u')}} ;$$

$$\sin \xi' = \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{\frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\cos(u + u')}} .$$

Il n'y aura, dans un cas donné, aucune difficulté à discuter pour quelle partie du cône (π') $\cos x' = 0$, et pour quelle partie $\sin x' = 0$. Dans la *fig.* 13, par exemple, pour la partie du cône UND'U, $\cos x'$ est partout $= 0$, tandis que pour les deux parties U'SND'' et UB, c'est $\sin x'$ qui est nul. Si le plan réfringent est parallèle à l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle obtus des deux axes optiques, c'est-à-dire si $U - U' = 0$, $\cos x' = 0$ pour tous les côtés du cône elliptique pour lesquels $\varphi' < U$; mais $\sin x' = 0$ pour tous les côtés pour lesquels $\varphi' > U$ et pour les rayons qui suivent la section principale. L'inverse a lieu pour les surfaces réfringentes parallèles à l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle aigu des axes optiques, c'est-à-dire pour lequel $U + U' = 180^\circ$. Si le plan réfringent est parallèle à l'axe moyen d'élasticité, les rayons du cône elliptique satisfont à la condition $\cos x' = 0$ quand la normale au plan réfringent est située dans l'angle obtus des axes optiques, et à la condition $\sin x' = 0$ quand elle est dans l'angle aigu. Pour les rayons incidents dans la section principale compris dans l'angle obtus des axes optiques, $\sin x'$ est $= 0$; pour les rayons qui sont dans l'angle aigu, $\cos x' = 0$.

Quand les rayons incidents sont polarisés parallèlement au plan d'incidence, on a, d'après l'équation (3), § XVII,

$$\begin{aligned} D' : D'' = {} & \sin x'' \sin(\varphi + \varphi'') \cos(\varphi - \varphi'') \\ & - \sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q'' : \sin x' \sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') - \sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q'. \end{aligned}$$

Le rayon extraordinaire est donc tout près de disparaître, car $\operatorname{tang} q'$ et $\operatorname{tang} q''$ sont seulement de petites quantités dépendantes de $(\varphi' - \varphi'')$, quand $\sin x' = 0$, et le rayon ordinaire est à son tour dans le même cas quand $\sin x'' = 0$. Ces deux cas sont compris encore dans $\sin 2x' = 0$, c'est-à-dire dans l'équation (π').

Les côtés du cône, *fig.* 13, pour lesquels $\sin x' = 0$ sont approximativement les directions réfractées d'après la loi du rayon ordinaire que doit suivre un rayon polarisé parallèlement au plan d'incidence pour que le rayon extraordinaire disparaisse, et les côtés pour lesquels $\cos x' = 0$ sont les rayons réfractés d'après la loi du rayon extraordinaire qui, polarisés parallèlement au plan d'incidence, ne produisent pas de rayon ordinaire. Au moyen des valeurs approchées fournies par l'éq. (π'), c'est-à-dire par $\sin 2x' = 0$, on calcule facilement des valeurs plus exactes

$$\sin 2x' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{4} \frac{\sin^2 \varphi \cos x' \sin(u - u') \sin j}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')},$$

$$\sin 2x'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{4} \frac{\sin^2 \varphi \cos x'' \sin(\upsilon + \upsilon') \cos k}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')}.$$

La relation qui doit exister entre la position du plan de polarisation du rayon incident, son angle d'incidence et l'azimut du plan d'incidence, pour que le rayon ordinaire ou le rayon extraordinaire disparaisse, résulte généralement de l'équation (3), § XVII. Quand l'angle d'incidence et l'azimut du plan d'incidence sont donnés, on a immédiatement, pour l'azimut a' du plan de polarisation primitif dans lequel subsiste le rayon ordinaire seul,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} a' = -\operatorname{tang} x' \cos(\varphi - \varphi') + \frac{\sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q'}{\cos x' \sin(\varphi + \varphi')},$$

et pour l'azimut a'' dans lequel un rayon extraordinaire seul paraît,

$$(2) \qquad \operatorname{tang} a'' = +\operatorname{tang} x'' \cos(\varphi - \varphi'') - \frac{\sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q''}{\cos x'' \sin(\varphi + \varphi'')}.$$

Quand les rayons incidents sont polarisés dans les azimuts a' ou a'', les expressions des vitesses dans les rayons réfractés et réfléchis sont d'une simplicité remarquable.

1. Dans l'azimut a', il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} D' &= -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}\,S,\\ R_s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,S,\\ R_p &= -\frac{\sin x'\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')+\sin^2\varphi'\tang q'}{\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}\,S,\end{aligned}\right.$$

et pour l'azimut δ' du plan de polarisation dans le rayon réfléchi,

$$\tang\delta' = -\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\tang a' + \frac{2\sin 2\varphi\sin^2\varphi'\tang q'}{\sin 2(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')\cos x'}.$$

2. Dans l'azimut a'', on a

$$\begin{aligned} D'' &= \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')}\,S,\\ R &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi'')}\,S,\\ R_p &= \frac{\sin x''\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'')+\sin^2\varphi''\tang q}{\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')}\,S.\end{aligned}$$

et pour l'azimut δ'' du plan de polarisation du rayon réfléchi,

$$\tang\delta = -\tang a''\frac{\cos(\varphi+\varphi'')}{\cos(\varphi-\varphi'')} - \frac{2\sin 2\varphi\sin^2\varphi''\tang q}{\cos x''\sin 2(\varphi-\varphi'')\sin(\varphi+\varphi'')}.$$

§ XXIII.

Je vais étudier actuellement l'émergence d'un rayon d'un cristal à deux axes. Je désignerai la vitesse dans le rayon émergent selon que ce rayon est ordinaire ou extraordinaire par D′ ou D″, et les vitesses dans les deux rayons réfléchis, selon qu'ils proviennent de D′ ou de D″, par $R'_{\prime}$ et $R''_{\prime}$ ou $R'_{\prime\prime}$ et $R''_{\prime\prime}$. Je décompose le rayon émergent en deux rayons, l'un polarisé parallèlement au plan d'émergence, l'autre polarisé perpendiculairement à ce plan, et j'appelle les vitesses respectives S′ et P′ quand elles dérivent de D′, S″ et P″ quand elles dérivent de D″. Je désigne, en outre, les azimuts des directions des vitesses D′ et D″ par rapport au plan d'incidence, par y' et y'', et je les compte de telle manière que $y' - 90°$ et $y'' - 90°$ soient les azimuts des rayons correspondants à D′ et à D″. Ces angles $y' - 90°$ et $y'' - 90°$ doivent toujours être positifs et sont égaux à o, quand les rayons sont placés dans le plan d'incidence, et font un plus grand angle avec la normale au plan de réfringence que les normales des ondes planes qui leur correspondent ; au contraire, si le rayon est placé entre la normale à l'onde et la normale au plan de réfringence, $y' - 90^\circ$ et $y'' - 90^\circ$ doivent être égaux à 180°. Soient $z'_{\prime}$ et $z''_{\prime}$ pour $R'_{\prime}$ et $R''_{\prime}$, $z'_{\prime\prime}$ et $z''_{\prime\prime}$ pour $R'_{\prime\prime}$ et $R''_{\prime\prime}$, les azimuts par rapport au plan d'incidence des directions des mouvements dans les rayons réfléchis à l'intérieur du milieu. Ces angles sont calculés de telle manière qu'ils coïncident respectivement avec les angles y' et y'' quand le rayon émergent est perpendiculaire au plan de réfringence. Soient encore ψ' et ψ'' les angles que les normales aux ondes de D' et de D'' font avec la normale au plan de réfringence ; les angles des normales aux ondes $R'_{\prime}$, $R''_{\prime}$ et $R'_{\prime\prime}$, $R''_{\prime\prime}$, avec la même normale, seront $\xi'_{\prime}$, $\xi''_{\prime}$, et $\xi'_{\prime\prime}$, $\xi''_{\prime\prime}$.

Je désigne par ι' l'inclinaison du rayon émergent sur la normale au plan réfringent quand il dérive de D', et par ι'' quand il provient de D''. J'appelle enfin p' et p'' les inclinaisons des rayons D' et D'' sur la normale à l'onde qui leur appartient, et $r'_{\prime}$, $r''_{\prime}$ et $r'_{\prime\prime}$, $r''_{\prime\prime}$ les inclinaisons des rayons $R'_{\prime}$, $R''_{\prime}$ et $R'_{\prime\prime}$, $R''_{\prime\prime}$ sur les normales à leurs ondes respectives. Les angles p' et p'' doivent être toujours positifs, les angles $z'_{\prime}$, $z'_{\prime\prime}$ et $z''_{\prime}$, $z''_{\prime\prime}$ négatifs quand les rayons $R'_{\prime}$, $R'_{\prime\prime}$ et $R''_{\prime}$ ne sont pas dans l'azimut $z'_{\prime} - 90^\circ$, $z'_{\prime\prime} - 90^\circ$ et $z''_{\prime} - 90^\circ$, $z''_{\prime\prime} - 90^\circ$ relativement au plan d'incidence, mais dans les azimuts $z'_{\prime} + 90^\circ$, $z'_{\prime\prime} + 90^\circ$ et $z'_{\prime\prime} + 90^\circ$, $z''_{\prime\prime} + 90^\circ$. Ces notations admises, on trouve, en désignant les valeurs qui reçoivent le mouvement des rayons incidents D' et D'', dans les rayons réfléchis $R'_{\prime}$, $R''_{\prime}$ et $R'_{\prime\prime}$, $R''_{\prime\prime}$, et dans les rayons réfractés P', S' et P'', S'', par Q', Q'', $Q'_{\prime}$, $Q''_{\prime}$, $Q'_{\prime\prime}$, $Q''_{\prime\prime}$, T', T'' :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
T' &= \alpha \sin \iota' \cos \iota', \\
T'' &= \alpha \sin \iota'' \cos \iota'', \\
Q' &= \alpha \sin \psi' \cos \psi' - \sin^2 \psi' \sin y' \operatorname{tang} p', \\
Q'' &= \alpha \sin \psi'' \cos \psi'' - \sin^2 \psi'' \sin y'' \operatorname{tang} p'', \\
Q'_{\prime} &= \alpha \sin \xi'_{\prime} \cos \xi'_{\prime} + \sin^2 \xi'_{\prime} \sin z'_{\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime}, \\
Q''_{\prime} &= \alpha \sin \xi''_{\prime} \cos \xi''_{\prime} + \sin^2 \xi''_{\prime} \sin z''_{\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime}, \\
Q'_{\prime\prime} &= \alpha \sin \xi'_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime} + \sin^2 \xi'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime\prime}, \\
Q''_{\prime\prime} &= \alpha \sin \xi''_{\prime\prime} \cos \xi''_{\prime\prime} + \sin^2 \xi''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime\prime}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations qui résultent du principe de la conservation des forces vives sont

1. Quand l'onde incidente est une onde ordinaire,

$$D'^2 Q' = R'^2_{\prime} Q'_{\prime} + R''^2_{\prime} Q''_{\prime} + (P'^2 + S'^2) T';$$

2. Quand l'onde incidente est extraordinaire,

$$D''^2 Q'' = R'^2_{\prime\prime} Q'_{\prime\prime} + R''^2_{\prime\prime} Q''_{\prime\prime} + (P''^2 + S''^2) T''.$$

En remplaçant dans ces équations les volumes par leurs valeurs tirées des équations (1), nous obtenons, dans le premier cas,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&D'^2 (\sin \psi' \cos \psi' - \sin^2 \psi' \sin y' \operatorname{tang} p') - R'^2_{\prime} (\sin \xi'_{\prime} \cos \xi'_{\prime} - \sin^2 \xi'_{\prime} \sin z'_{\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime}) \\
&- R''^2_{\prime} (\sin \xi''_{\prime} \cos \xi''_{\prime} + \sin^2 \xi''_{\prime} \sin z''_{\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime}) = (P'^2 + S'^2) \sin \iota' \cos \iota' ;
\end{aligned}
\right.
$$

et dans le second cas,

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&D'^2(\sin\psi'\cos\psi' - \sin^2\psi'\sin y'\,\mathrm{tang}\,p') - R'^2_{,}(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,,} - \sin^2\xi'_{,}\sin z'\,\mathrm{tang}\,r')\\
&- R''^2_{,}(\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,} - \sin^2\xi''_{,}\sin z''\,\mathrm{tang}\,r'') = P'^2 - S'^2\sin\iota'\cos\iota'.
\end{aligned}\right.
$$

Quant aux angles ι', ι'', ψ', ψ'', $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $\xi'_{,,}$, $\xi''_{,,}$, on a pour les déterminer les relations suivantes :

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&a.\quad \sin^2\psi' = o^2\sin^2\iota' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u-u')\right]\sin^2\iota',\\
&b.\quad \sin^2\xi'_{,} = o_{,}^2\sin^2\iota' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u_{,}-u'_{,})\right]\sin^2\iota',\\
&c.\quad \sin^2\xi'_{,,} = e_{,}^2\sin^2\iota' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(v_{,}-v'_{,})\right]\sin^2\iota',\\
&\alpha.\quad \sin^2\psi'' = e^2\sin^2\iota'' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(v-v')\right]\sin^2\iota'',\\
&\beta.\quad \sin^2\xi''_{,} = o_{,,}^2\sin^2\iota'' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u_{,,}-u'_{,,})\right]\sin^2\iota'',\\
&\gamma.\quad \sin^2\xi''_{,,} = e_{,,}^2\sin^2\iota'' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(v_{,,}-v'_{,,})\right]\sin^2\iota'',
\end{aligned}\right.
$$

où la signification de o, e, $o_{,}$, $e_{,}$, $o_{,,}$, $e_{,,}$ est claire par elle-même, et où les inclinaisons des normales aux ondes D′, D″, $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ sur les axes optiques sont respectivement désignées par u, u'; v, v'; $u_{,}$, $u'_{,}$; $v_{,}$, $v'_{,}$; $u_{,,}$, $u'_{,,}$; $v_{,,}$, $v'_{,,}$. Ces angles sont déterminés par les relations suivantes. Soient U et U′ les inclinaisons de la normale à la surface réfringente sur les deux axes optiques, et soit le plan d'incidence situé dans l'azimut X, cet azimut étant compté à partir de la direction que suivrait le mouvement si le plan réfringent était le plan de l'onde ordinaire, et tel que pour $\psi' = 0$, $X = y'$. Soit 2I l'angle que les deux plans déterminés par la normale au plan de réfringence et les deux axes optiques forment entre eux; soient $2i$ et $2k$ les angles correspondants pour les normales aux ondes D′ et D″; et soient $2i'$ et $2k'$ ces angles pour les normales $R'_{,}$ et $R''_{,}$, et $2i''$ et $2k''$ pour $R'_{,,}$ et $R''_{,,}$. Les relations suivantes ont lieu :

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos u &= \cos U\cos\psi' + \sin U\sin\psi'\cos(X+I),\\
\cos u' &= \cos U'\cos\psi' + \sin U'\sin\psi'\cos(X-I),\\
-\sin u\cos(y'+i) &= \cos U\sin\psi' - \sin U\cos\psi'\cos(X+I),\\
-\sin u'\cos(y'-i) &= \cos U'\sin\psi' - \sin U'\sin\psi'\cos(X-I),\\
\sin u\sin(y'+i) &= \sin U\sin(X+I),\\
\sin u'\sin(y'-i) &= \sin U'\sin(X-I);
\end{aligned}\right.
$$

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos\upsilon &= \cos U \cos\psi'' + \sin U \sin\psi'' \cos(X+I),\\
\cos\upsilon' &= \cos U' \cos\psi'' + \sin U' \sin\psi'' \cos(X-I),\\
\sin\upsilon \sin(y''-k) &= \cos U \sin\psi'' - \sin U \cos\psi'' \cos(X+I),\\
\sin\upsilon' \sin(y''+k) &= \cos U' \sin\psi'' - \sin U' \cos\psi'' \cos(X-I),\\
-\sin\upsilon \sin(y''-k) &= \sin U \sin(X+I),\\
-\sin\upsilon' \sin(y''+k) &= \sin U' \sin(X-I).
\end{aligned}\right.$$

On déduit facilement ces formules de trigonométrie sphérique de la *fig.* 9, où sont indiquées les points de rencontre avec une sphère des normales aux ondes $D'_{,}$, $D''_{,}$ des axes optiques et de la normale au plan réfringent; toutes ces lignes étant menées par le centre de cette surface.

Au moyen des équations (5), on peut exprimer u, u', y', i en fonction de l'angle d'incidence ψ' et des angles U, U' et X qui déterminent la position du plan réfringent et la position du plan d'incidence; et comme ces deux plans sont donnés dans tous les cas, on peut, au moyen de l'équation (5), exprimer les angles u, u', y', i en fonction de ψ'. Pareillement, les angles υ, υ', y'', k sont donnés par l'équation (6) comme des fonctions de l'angle ψ''. L'angle I est déterminé par U et U', et l'angle des deux axes optiques $2n$. On a, en effet,

$$\cos 2n = \cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos 2I.$$

On déduit des équations (5) et (6) deux systèmes semblables en mettant pour ψ et ψ'' $-\xi'_{,}$ et $-\xi''_{,}$, à la place de y' et de y'' les angles $z'_{,}$ et $z''_{,}$, à la place de i et k les angles i' et k', à la place de u et u' les angles $u_{,}$ et $u'_{,}$, et enfin à la place de υ, υ' les angles $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$:

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos u_{,} &= \cos U \cos\xi'_{,} - \sin U \sin\xi'_{,} \cos(X+I),\\
\cos u'_{,} &= \cos U' \cos\xi'_{,} - \sin U' \sin\xi'_{,} \cos(X-I),\\
\sin u_{,} \cos(z'_{,}+i') &= \cos U \sin\xi'_{,} + \sin U \cos\xi'_{,} \cos(X+I),\\
\sin u'_{,} \cos(z'_{,}-i') &= \cos U' \sin\xi'_{,} + \sin U' \cos\xi'_{,} \cos(X-I),\\
\sin u_{,} \cos(z'_{,}+i') &= \sin U \sin(X+I),\\
\sin u'_{,} \sin(z'_{,}-i') &= \sin U' \sin(X-I);
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos \upsilon_{,} &= \cos U \cos\xi''_{,} - \sin U \sin\xi''_{,} \cos(X+I),\\
\cos \upsilon'_{,} &= \cos U' \cos\xi''_{,} - \sin U' \sin\xi''_{,} \cos(X-I),\\
-\sin \upsilon_{,} \sin(z''_{,}-k') &= \cos U \sin\xi''_{,} + \sin U \cos\xi''_{,} \cos(X+I),\\
-\sin \upsilon'_{,} \sin(z''_{,}+k') &= \cos U' \sin\xi''_{,} + \sin U' \cos\xi''_{,} \cos(X-I),\\
-\sin \upsilon_{,} \sin(z''_{,}-k') &= \sin U \sin(X+I),\\
-\sin \upsilon'_{,} \sin(z''_{,}-k') &= \sin U' \sin(X-I).
\end{aligned}\right.$$

Enfin on obtient deux systèmes de relations semblables pour $u_{,,}$, $u'_{,,}$, $\upsilon_{,,}$, $\upsilon'_{,,}$,... en changeant partout l'indice inférieur $_{,}$ en $_{,,}$, et en remplaçant i' et k' par i'' et k''. Je désigne ces relations par (9) et (10).

Si l'on substitue, dans les équations (4), a, b, c, les valeurs de u, u', $u_{,}$, $u'_{,}$, $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$, on obtient trois équations dont la première contient seulement $\psi'_{,}$, la seconde $\xi'_{,}$ et la troisième $\xi''_{,}$. Il est facile de s'assurer que toutes les trois, développées, conduisent à la même équation du 4^e degré, de telle sorte que ψ', $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ sont trois racines de cette équation. La quatrième racine, que je désignerai par $\psi''_{,}$ est l'inclinaison sur le plan réfringent de l'onde extraordinaire correspondant à ι'. On trouve pareillement que ψ'', $\xi'_{,,}$, $\xi''_{,,}$ sont trois racines d'une autre équation du quatrième degré dont la quatrième, $\psi'_{,,}$, est l'angle de réfraction de l'onde ordinaire correspondant à ι''. Quand $\iota' = \iota''$, on a

$$\psi' = \psi'_{,}, \quad \psi'' = \psi''_{,} \quad \text{et} \quad \xi'_{,} = \xi'_{,,}, \quad \xi''_{,} = \xi''_{,,},$$

et de plus ψ', ψ'', $\xi'_{,} = \xi'_{,,}$, $\xi''_{,,} = \xi''_{,}$ sont les quatre racines de la même équation du quatrième degré.

Il existe certains cas particuliers, faciles à voir, où ces équations du quatrième degré se laissent facilement décomposer en deux équations du deuxième degré. On peut aussi, en général, recourir pour les résoudre à des méthodes d'approximation, et les relations de (5) à (10) servent alors. Quand le rayon incident est un rayon ordinaire, et d'après les équations (4), a, on détermine l'angle ι au moyen de l'équation (5); cette valeur, portée dans les équations (4), b, c, fournit pour $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ une première approximation dans laquelle on néglige les carrés de $\pi^2 - \mu^2$ quand on substitue ψ' à $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ dans les valeurs de $u_{,}$, $u'_{,}$ et $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$ dans les équations (7) et (8). Si l'on porte, d'après cela, dans les équations (7) et (8), les valeurs approchées trouvées ci-dessus pour $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$, on obtient $u_{,}$, $u'_{,}$ et $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$ exactes jusqu'à la première puissance de $\pi^2 - \mu^2$; de celles-ci on forme les expressions de

$$\cos(u' - u'_{,}), \quad \cos(\upsilon_{,} + \upsilon'_{,}),$$

qu'on porte dans l'équation (4), b, c, d'où l'on déduit les valeurs de $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ exactes jusqu'à la seconde puissance de $\pi^2 - \mu^2$. Ce degré d'approximation sera suffisant dans tous les cas. Une route toute semblable conduit aux valeurs approchées de $\xi'_{,,}$ et $\xi''_{,,}$, quand le rayon incident est un rayon extraordinaire, au moyen des équations (4), α, β, γ, et des équations (5), (6), (7), (9), (10).

Je vais former maintenant les équations qui résultent du principe de l'égalité des composantes. Je décompose encore les vitesses D', D'', $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ suivant trois directions : 1° perpendiculairement au plan d'incidence ; 2° perpendiculairement au plan réfringent ; 3° parallèlement au plan d'incidence et au plan de réfringence. Je présenterai dans le tableau suivant les cosinus des angles que les directions des vitesses D', D'', $R'_{,}$, ..., forment avec ces trois directions perpendiculaires entre elles.

(11)

	D'	D''	$R'_{,}$	$R'_{,}$	$R'_{,,}$	$R''_{,,}$
1. Sur la perpendiculaire au plan d'incidence.	$\sin \gamma'$	$+\sin \gamma''$	$\sin z'_{,}$	$+\sin z''_{,}$	$+\sin z'_{,,}$	$+\sin z''_{,,}$
2. Sur la perpendiculaire au plan réfringent.	$+\sin \psi' \cos \gamma'$	$-\sin \psi'' \cos \gamma''$	$-\sin \xi'_{,} \cos z'_{,}$	$+\sin \xi''_{,} \cos z''_{,}$	$-\sin \xi'_{,,} \cos z'_{,,}$	$+\sin \xi''_{,,} \cos z''_{,,}$
3. Sur la parallèle au plan d'incidence et au plan de réfringence.	$+\cos \psi' \cos \gamma'$	$-\cos \psi'' \cos \gamma''$	$+\cos \xi'_{,} \cos z'_{,}$	$\cos \xi''_{,} \cos z''_{,}$	$+\cos \xi'_{,,} \cos z'_{,,}$	$-\cos \xi''_{,,} \cos z''_{,,}$

Pour les vitesses des rayons émergents décomposées suivant les trois mêmes directions, nous avons, selon qu'elles dérivent de D′ ou de D″,

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{llll} 1. & P' & \text{ou} & P'', \\ 2. & -S'\sin\iota' & \text{ou} & -S''\cos\iota'', \\ 3. & -S'\sin\iota' & \text{ou} & -S''\cos\iota''. \end{array} \right.$$

Par suite, le principe de l'égalité des composantes fournit les équations :

1. Pour un rayon ordinaire incident,

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} P' &=& D'\sin y' + R'_{,}\sin z'_{,} + R''_{,}\sin z''_{,}, \\ -S'\sin\iota' &=& D'\sin\psi'\cos y' - R'_{,}\sin\xi'_{,}\cos z'_{,} + R''_{,}\sin\xi \ \cos \\ -S'\cos\iota' &=& D'\cos\psi'\cos y' + R'_{,}\cos\xi'_{,}\cos z'_{,} - R'_{,}\cos\xi \ \cos \end{array} \right.$$

2. Pour un rayon extraordinaire incident,

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} P &=& D''\sin y'' + R'_{,}\sin z'_{,,} + R''_{,,}\sin z''_{,,}, \\ -S'\sin\iota'' &=& -D''\sin\psi''\cos y'' - R'_{,,}\sin\xi'_{,,}\cos z'_{,,} + R'_{,,}\sin\xi \ \cos z \ , \\ -S''\cos\iota'' &=& -D''\cos\psi''\cos y'' + R'_{,,}\cos\xi'_{,,}\cos z'_{,,} - R'_{,}\cos\xi'_{,,}\cos \end{array} \right.$$

Il faut maintenant démontrer que les équations du deuxième degré (2) et (3), se changent, au moyen des équations (13) et (14), en équations linéaires. Je m'occuperai d'abord des équations (2) et (13). Le produit des deux dernières des équations (13) nous donne

$$\begin{aligned} S'^2\sin\iota'\cos\iota' = D'^2\sin\psi'\cos\psi'\cos^2 y' &- R'^2_{,}\sin\xi'_{,}\cos^2 z'_{,} \\ &- R''^2_{,}\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\cos^2 z''_{,} \\ &+ D'R'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,})\cos y'\cos z \\ &- D'R''_{,}\sin(\psi' - \xi''_{,})\cos y'\cos z' \\ &+ R'_{,}R''_{,}\sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})\cos z'\cos z'. \end{aligned}$$

Ce produit, retranché de (2), donne

$$\begin{aligned} &P'^2\sin\iota'\cos\iota' = D'^2(\sin\psi'\cos\psi'\sin^2 y' - \sin^2\psi'\sin y'\tan p' \\ &- R'^2_{,}(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,}\sin z'^2_{,} + \sin^2\xi'_{,}\sin z'_{,}\tan r'_{,}) \\ &- R''^2_{,}(\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\sin^2\xi''_{,} + \sin^2\xi''_{,}\sin z''_{,}\tan r''_{,}) - D'R_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,})\cos y'\cos . \\ &+ D'R''_{,}\sin(\psi' - \xi''_{,})\cos y'\cos z''_{,} - R'_{,}R''_{,}\sin(\xi' + \xi''_{,})\cos z'_{,}\cos z''_{,}. \end{aligned}$$

Cette équation, divisée par la première des équations (13), donne

$$\begin{aligned} &P'\sin\iota'\cos\iota' = (\sin\psi'\cos\psi'\sin y' - \sin^2\psi'\tan p') \\ &- R'_{,}(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,}\sin z'_{,} + \sin^2\xi'_{,}\tan r'_{,}) - R''_{,}(\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\sin z''_{,} + \sin^2\xi''_{,}\tan r''_{,}), \end{aligned}$$

dans l'hypothèse où les relations suivantes subsistent :

$$\begin{aligned} &\ \ (\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,} - \sin\psi'\cos\psi')\sin y'\sin z'_{,} \\ &+ \sin^2\xi'_{,}\tan r'_{,}\sin y' + \sin^2\psi'\tan p'\sin z'_{,} = \sin(\psi' - \xi'_{,})\cos y'\cos z'_{,}, \\ &\ \ (\sin\psi'\cos\psi' - \sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,})\sin y'\sin z''_{,} \\ &- \sin^2\psi'\tan p'\sin z''_{,} - \sin^2\xi''_{,}\tan r''_{,}\sin y' = \sin(\psi' - \xi')\cos y'\cos z \ , \\ &\ \ (\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,} + \sin\xi''_{,}\cos\xi'_{,})\sin z'_{,}\cos z''_{,} \\ &+ \sin^2\xi'_{,}\tan r'_{,}\sin z''_{,} + \sin^2\xi''_{,}\tan r''_{,}\sin z' = \sin(\xi + \xi'_{,})\cos z_{,}\cos z_{,}. \end{aligned}$$

ou, en écrivant un peu différemment,

$$\begin{aligned}
&\sin(\psi' - \xi'_{,})[\sin y' \sin z'_{,} \cos(\psi' + \xi'_{,}) + \cos y' \cos z'_{,}] \\
&= \sin^2 \xi'_{,} \operatorname{tang} r'_{,} \sin y' + \sin^2 \psi' \operatorname{tang} p' \sin z'_{,}, \\
&\sin(\psi' - \xi''_{,})[\sin y' \sin z''_{,} \cos(\psi' + \xi''_{,}) - \cos y' \cos z''_{,}] \\
&= \sin^2 \xi''_{,} \operatorname{tang} r''_{,} \sin y' + \sin^2 \psi' \operatorname{tang} p' \sin z''_{,}, \\
&-\sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})[\sin z'_{,} \sin z''_{,} \cos(\xi'_{,} - \xi''_{,}) - \cos z'_{,} \cos z''_{,}] \\
&= \sin^2 \xi'_{,} \operatorname{tang} r'_{,} \sin z''_{,} - \sin^2 \xi''_{,} \operatorname{tang} r''_{,} \sin z'_{,}.
\end{aligned}$$

Je vais prouver la justesse de ces relations. Posons les valeurs

$$\operatorname{tang} r'_{,} = \frac{1}{\rho_{,}^2 O_{,}}, \quad \operatorname{tang} r''_{,} = \frac{1}{e_{,}^2 E_{,}}, \quad \operatorname{tang} p' = \frac{1}{\rho^2 O}.$$

$$\frac{1}{O_{,}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin i_{,} \sin(u_{,} - u'),$$

$$\frac{1}{E_{,}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos k_{,} \sin(\upsilon_{,} + \upsilon'),$$

$$\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin i \sin(u - u').$$

Posons de plus,

$$\frac{\sin^2 \xi'_{,}}{\rho_{,}^2} = \frac{\sin^2 \xi''_{,}}{e_{,}^2} = \frac{\sin^2 \psi'}{\rho^2} = \sin^2 \iota'.$$

et enfin,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\sin^2 \iota'}{\sin(\psi' - \xi'_{,})} &= \frac{\sin(\psi' + \xi'_{,})}{\rho_{,}^2 - \rho^2} = -\frac{\sin(\psi' - \xi'_{,})}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(u_{,} - u')]}, \\
\frac{\sin^2 \iota'}{\sin(\psi' - \xi''_{,})} &= \frac{\sin(\psi' + \xi''_{,})}{\rho^2 - e_{,}^2} = -\frac{\sin(\psi' - \xi''_{,})}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(\upsilon_{,} + \upsilon')]}, \\
\frac{\sin^2 \iota'}{\sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})} &= \frac{\sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\rho_{,}^2 - e_{,}^2} = -\frac{\sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u_{,} - u') - \cos(\upsilon_{,} + \upsilon')]},
\end{aligned}\right.$$

au moyen de ces substitutions, les équations (16) se changent dans les suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&1.\quad \sin y' \sin z'_{,} \cos(\psi' + \xi'_{,}) - \cos y' \cos z'_{,} \\
&= -\left[\frac{\sin i' \sin y' \sin(u_{,} - u'_{,}) + \sin i \sin z'_{,} \sin(u - u')}{\cos(u - u_{,}) - \cos(u_{,} - u')}\right] \sin(\psi' + \xi'_{,}), \\
&2.\quad \sin y' \sin z''_{,} \cos(\psi' + \xi''_{,}) - \cos y' \cos z''_{,} \\
&= -\left[\frac{\cos k' \sin y' \sin(\upsilon_{,} + \upsilon') + \sin i \sin z''_{,} \sin(u - u')}{\cos(u - u_{,}) - \cos(\upsilon_{,} + \upsilon')}\right] \sin(\psi' - \xi''_{,}), \\
&3.\quad \sin z'_{,} \sin z''_{,} \cos(\xi'_{,} - \xi''_{,}) - \cos z'_{,} \cos z''_{,} \\
&= -\left[\frac{\sin i' \sin z''_{,} \sin(u_{,} - u') - \cos k' \sin z'_{,} \sin(\upsilon_{,} + \upsilon')}{\cos(u - u') - \cos(\upsilon_{,} + \upsilon')}\right] \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,}).
\end{aligned}\right.$$

La justesse de ces trois relations se voit par celles du § XVI, équations (f) et (h).

De la troisième, il résulte immédiatement qu'elle est pour les deux rayons réfléchis $R'_{,}$, $R''_{,}$, ce qu'est la relation (f), § XVI, pour les deux rayons réfractés D' et D''; seulement, dans ces deux cas, les arcs $(\xi'_{,} - \xi''_{,})$ de l'équation actuelle, et $(\varphi' - \varphi'')$ de l'equation (f), ont une position inverse; par conséquent on doit poser ici

$$\sin(\xi'_{,} - \xi''_{,}) = -\sin\Delta.$$

La seconde relation (18) correspond pareillement à l'équation (f), § XVI; on s'en assure le plus facilement possible en construisant cette formule sur une surface sphérique comme on a fait § XVI; on voit alors que la formule (18, 2) est pour les rayons D' et $R''_{,}$, ce que la formule (f), § XVI, est pour les rayons D' et D'', et que par conséquent on doit remplacer dans celle-ci υ, υ', k, x'', par $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$, k', $z''_{,}$ et $(\varphi' - \varphi'')$, c'est-à-dire l'angle que les deux normales D' et D'' font entre elles, par l'angle $\psi' + \xi''_{,}$, c'est-à-dire l'angle que les deux normales D' et $R''_{,}$ font entre elles. La première relation (18) correspond à celle en (h), § XVI. La relation (18, 1) est par rapport aux normales D' et $R'_{,}$ ce qu'est la relation (h), § XVI, par rapport aux normales D' et D'', dans laquelle υ, υ', k sont remplacés par les angles $u_{,}$, $u'_{,}$, i', et $(\varphi' - \varphi'')$ par $\psi' + \xi'_{,}$. Quant à l'angle x'' en (h), § XVI, on doit considérer que si l'on désigne par $z''_{,}$ l'angle qui lui correspond relativement à la normale $R'_{,}$, on a

$$z''_{,} + z'_{,} = 270°,$$

et que, par conséquent, x'' doit être remplacé par

$$z''_{,} = 270° - z'_{,}.$$

Ces substitutions introduites en (h), § XVI, donnent la première des relations (17) de ce paragraphe.

L'équation du second degré (2) peut donc être remplacée par l'équation linéaire (15). Cette équation (15) et les équations (13) contiennent par conséquent la solution complète du problème de la réflexion et de la réfraction à l'intérieur d'un milieu cristallisé, quand le rayon incident est un rayon ordinaire.

Je vais maintenant montrer comment l'équation (3), à l'aide de l'équation (14), peut être pareillement remplacée par une équation linéaire. Le produit des deux dernières équations (14) donne

$$\begin{aligned}
S''^{2} \sin\iota'' \cos\iota'' = {} & D''^{2} \sin\psi'' \cos\psi'' \cos^{2} y'' - R'^{2}_{,,} \sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} \cos^{2} z'_{,,} \\
& - R''^{2}_{,,} \sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \cos^{2} z''_{,,} - D'' R'_{,,} \sin(\psi'' - \xi'_{,,}) \cos y'' \cos z'_{,,} \\
& + D'' R''_{,,} \sin(\psi'' - \xi''_{,,}) \cos y'' \cos z''_{,,} + R'_{,,} R''_{,,} \sin(\xi'_{,,} + \xi''_{,,}) \cos z'_{,,} \cos z''_{,,}.
\end{aligned}$$

Ce produit, retranché de l'équation (3), nous donne

$$\begin{aligned}
P''^{2} \sin\iota'' \cos\iota'' = {} & D''^{2} (\sin\psi'' \cos\psi'' \sin^{2} y'' - \sin^{2}\psi'' \sin y'' \operatorname{tang} p'') \\
& - R'^{2}_{,,} (\sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} \sin^{2} z'_{,,} + \sin^{2}\psi'_{,} \sin z'_{,,} \operatorname{tang} r) \\
& - R''^{2}_{,,} (\sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \sin^{2} z''_{,,} + \sin^{2}\psi''_{,,} \sin z''_{,,} \operatorname{tang} r) \\
& - D'' R'_{,,} \sin(\psi'' - \xi'_{,,}) \cos y'' \cos z'_{,,} - D'' R''_{,,} \sin(\psi'' - \xi''_{,,}) \cos y'' \cos z''_{,,} \\
& - R'_{,,} R''_{,,} \sin(\xi'_{,,} + \xi''_{,,}) \cos z'_{,,} \cos z''_{,,}.
\end{aligned}$$

Cette équation, divisée par la première des équations (14), donne enfin

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} \sin r' \cos r' = {} & \mathrm{D}''(\sin\psi'' \cos\psi'' \sin y' - \sin^2\psi' \operatorname{tang} p'') \\ & - \mathrm{R}'_{,,}(\sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} \sin z'_{,,} + \sin^2\xi'_{,,} \operatorname{tang} r'_{,,}) \\ & - \mathrm{R}''_{,,}(\sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \sin z''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}), \end{aligned} \right.$$

car

$$\cos y' \cos z_{,,} - \sin y' \sin z_{,,} \cos(\psi' + \xi'_{,,})$$
$$= - \frac{\sin^2\psi'' \operatorname{tang} p'' \sin z'_{,,} + \sin^2\xi'_{,,} \operatorname{tang} r'_{,,} \sin y'}{\sin(\psi' - \xi'_{,,})},$$

$$\cos y'' \cos z''_{,} + \sin y'' \sin z''_{,,} \cos(\psi'' + \xi''_{,,})$$
$$= \frac{\sin^2\psi'' \operatorname{tang} p'' \sin z''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,} \sin y''}{\sin(\psi'' - \xi''_{,,})},$$

$$\cos z_{,,} \cos z'_{,} - \sin z'_{,,} \sin z''_{,,} \cos(\xi'_{,,} + \xi''_{,,})$$
$$= \frac{\sin^2\xi'_{,,} \operatorname{tang} r'_{,,} \sin z''_{,,} - \sin^2\xi''_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,} \sin z'_{,,}}{\sin(\xi'_{,,} - \xi''_{,,})}.$$

Ces relations se changent, par les substitutions (17) et semblables, dans les suivantes :

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1.\quad \cos y' \cos z'_{,} - \sin y'' \sin z'_{,} \cos(\psi'' + \xi'_{,,}) \\ & = \frac{\cos k \sin z \sin(\upsilon - \upsilon') - \sin i \sin y' \sin(u_{,} - u_{,,})}{\cos(\upsilon - \upsilon') - \cos(u_{,} - u'_{,,})} \sin(\psi' + \xi'), \\ & 2.\quad \cos y' \cos z'_{,,} + \sin y'' \sin z''_{,,} \cos(\psi' + \xi''_{,,}) \\ & = - \frac{\cos k \sin z''_{,,} \sin(\upsilon + \upsilon') + \cos k'' \sin y'' \sin(\upsilon_{,,} + \upsilon'_{,,})}{\cos(\upsilon + \upsilon') - \cos(\upsilon_{,,} + \upsilon'_{,,})} \sin(\psi'' + \xi''), \\ & 3.\quad \cos z_{,,} \cos z'_{,} - \sin z_{,,} \sin z''_{,,} \cos(\xi'_{,,} - \xi'_{,}) \\ & = - \frac{\sin i \sin z''_{,,} \sin(u_{,,} - u'_{,,}) - \cos k'' \sin z'_{,,} \sin(\upsilon_{,,} + \upsilon_{,,})}{\cos(u - u'_{,,}) - \cos(\upsilon_{,,} + \upsilon'_{,,})} \sin(\xi - \xi) \end{aligned} \right.$$

L'exactitude de ces formules se déduirait, pour la première et la troisième, de l'équation (f), § XVI, et pour la seconde, de l'équation (i) du même paragraphe. Si l'on substitue, en effet, dans l'équation (f), à u, u', x', $(\varphi' - \varphi'')$ les angles $u_{,,}$, $u'_{,,}$, $z'_{,,}$, $-(\psi'' + \xi'_{,,})$, on obtient la première des relations (20), et si aux angles υ, υ', x'', $(\varphi' - \varphi'')$, on substitue les angles $\upsilon_{,,}$, $\upsilon'_{,,}$, $y''_{,,}$, $-(\xi'_{,,} - \xi''_{,,})$, on obtient la troisième. On peut d'ailleurs s'assurer facilement de l'exactitude de ces substitutions. La seconde relation (20) se tire de l'équation (i), § XVI, par la substitution des angles $\upsilon_{,,}$, $\upsilon'_{,,}$, $-(\psi'' + \xi''_{,,})$ aux angles u, u', $(\varphi' - \varphi'')$, et par la substitution de $270 - y''_{,,}$ à x'.

On peut donc remplacer l'équation de la conservation des forces vives (3) par l'équation (19).

§ XXIV.

Les équations complètes de la réflexion et de la réfraction dans l'intérieur d'un milieu cristallisé sont donc les suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
P' \sin \iota' \cos \iota' & = - D'(\sin \psi' \cos \psi' \sin y' - \sin^2 \psi' \operatorname{tang} p') & & & \\
 & & - R'_{,}(\sin \xi'_{,} \cos \xi'_{,} \sin z'_{,} + \sin^2 \xi'_{,} \operatorname{tang} r'_{,}) & & \\
 & & - R''_{,}(\sin \xi''_{,} \cos \xi''_{,} \sin z''_{,} + \sin^2 \xi''_{,} \operatorname{tang} r''_{,}), & & \\
P' & = \quad D' \sin y' & + R'_{,} \sin z'_{,} & + R''_{,} \sin z''_{,}, & \\
S' \sin \iota' & = - D' \cos y' \sin \psi' & + R'_{,} \cos z'_{,} \sin \xi'_{,} & - R''_{,} \cos z''_{,} \sin \xi''_{,}, & \\
S' \cos \iota' & = - D' \cos y' \cos \psi' & - R'_{,} \cos z'_{,} \cos \xi'_{,} & + R''_{,} \cos z''_{,} \cos \xi''_{,}; &
\end{array}\right.$$

et

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
P'' \sin \iota'' \cos \iota'' & = \quad D''(\sin \psi'' \cos \psi'' \sin y'' - \sin^2 \psi'' \operatorname{tang} p'') & & & \\
 & & - R'_{,,}(\sin \xi'_{,,} \cos \xi'_{,,} \sin z'_{,,} + \sin^2 \xi'_{,,} \operatorname{tang} r'_{,,}) & & \\
 & & - R''_{,,}(\sin \xi''_{,,} \cos \xi''_{,,} \sin^2 z''_{,,} + \sin^2 \xi''_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}), & & \\
P'' & = \quad D'' \sin y'' & + R'_{,,} \sin z'_{,,} & + R''_{,,} \sin z''_{,,}, & \\
S'' \sin \iota'' & = \quad D'' \cos y'' \sin \psi'' & + R'_{,,} \cos z'_{,,} \sin \xi'_{,,} & - R''_{,,} \cos z''_{,,} \sin \xi''_{,,}, & \\
S'' \cos \iota'' & = \quad D'' \cos y'' \cos \psi'' & - R'_{,,} \cos z'_{,,} \cos \xi'_{,,} & + R''_{,,} \cos z''_{,,} \cos \xi''_{,,}. &
\end{array}\right.$$

On en déduit

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
R'_{,} = - D' \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota' - \psi') \sin(\iota' + \xi''_{,})[\cos(\iota' + \psi') \sin y' \cos z''_{,} + \cos(\iota' - \xi''_{,}) \cos y' \sin z''_{,}] \\ \qquad + \sin^2 \psi' \sin(\iota' + \xi''_{,}) \operatorname{tang} p' \cos z''_{,} + \sin^2 \xi''_{,} \sin(\iota' - \psi') \operatorname{tang} r''_{,} \cos y'\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota' + \xi''_{,}) \sin(\iota' + \xi'_{,})[\cos(\iota' - \xi'_{,}) \sin z'_{,} \cos z''_{,} + \cos(\iota' - \xi''_{,}) \sin z''_{,} \cos z'_{,}] \\ \qquad + \sin^2 \xi'_{,} \sin(i' + \xi''_{,}) \operatorname{tang} r'_{,} \cos z''_{,} + \sin^2 \xi''_{,} \sin(\iota' + \xi'_{,}) \operatorname{tang} r''_{,} \cos z'_{,}\end{array}}, \\[2em]
R''_{,} = - D' \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota' - \psi') \sin(\iota' + \xi'_{,})[\cos(\iota' + \psi') \sin y' \cos z'_{,} - \cos(\iota' - \xi'_{,}) \sin z'_{,} \cos y'] \\ \qquad + \sin^2 \psi' \sin(\iota' + \xi'_{,}) \operatorname{tang} p' \cos z'_{,} - \sin^2 \xi'_{,} \sin(\iota' - \psi') \operatorname{tang} r'_{,} \cos y'\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota' + \xi''_{,}) \sin(\iota' + \xi'_{,})[\cos(i' - \xi'_{,}) \sin z'_{,} \cos z''_{,} + \cos(\iota' - \xi''_{,}) \sin z''_{,} \cos z'_{,}] \\ \qquad + \sin^2 \xi'_{,} \sin(\iota' + \xi''_{,}) \operatorname{tang} r'_{,} \cos z''_{,} + \sin^2 \xi''_{,} \sin(\iota' + \xi'_{,}) \operatorname{tang} r''_{,} \cos z'_{,}\end{array}}.
\end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
R'_{,,} = - D'' \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota'' - \psi'') \sin(\iota'' + \xi''_{,,})[\cos(\iota'' + \psi'') \sin y'' \cos z''_{,,} - \cos(\iota'' - \xi''_{,,}) \sin z''_{,,} \cos y''] \\ \qquad + \sin^2 \psi'' \sin(\iota'' + \xi'') \operatorname{tang} p'' \cos z''_{,,} - \sin^2 \xi''_{,,} \sin(\iota'' - \psi'') \operatorname{tang} r''_{,,} \cos y''\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota'' + \xi'_{,,}) \sin(\iota'' + \xi''_{,,})[\cos(\iota'' - \xi'_{,,}) \sin z'_{,,} \cos z''_{,,} + \cos(\iota'' - \xi''_{,,}) \sin z''_{,,} \cos z'_{,,}] \\ \qquad + \sin^2 \xi'_{,,} \sin(\iota'' + \xi''_{,,}) \operatorname{tang} r'_{,,} \cos z''_{,,} + \sin^2 \xi''_{,,} \sin(\iota'' + \xi'_{,,}) \cos z'_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}\end{array}}, \\[2em]
R''_{,,} = + D'' \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota'' - \psi'') \sin(\iota'' + \xi'_{,,})[\cos(\iota'' - \psi'') \sin y'' \cos z'_{,,} + \cos(\iota'' - \xi'_{,,}) \sin z'_{,,} \cos y''] \\ \qquad + \sin^2 \psi'' \sin(\iota'' + \xi''_{,,}) \operatorname{tang} p'' \cos z'_{,,} + \sin^2 \xi'_{,,} \sin(\iota'' - \psi'') \operatorname{tang} r'_{,,} \cos y''\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota'' + \xi'_{,,}) \sin(\iota'' + \xi''_{,,})[\cos(\iota'' - \xi'_{,,}) \sin z'_{,,} \cos z''_{,,} + \cos(\iota'' - \xi''_{,,}) \sin z''_{,,} \cos z'_{,,}] \\ \qquad + \sin^2 \xi'_{,,} \sin(\iota'' + \xi''_{,,}) \operatorname{tang} r'_{,,} \cos z''_{,,} + \sin^2 \xi''_{,,} \sin(\iota'' + \xi'_{,,}) \cos z'_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}\end{array}}.
\end{array}\right.$$

On obtient les valeurs de première approximation en négligeant complétement la différence des axes d'élasticité, et en posant, en conséquence,

$$\xi' = \xi''_{,},$$

et

$$\cos z' = -\sin z'_{,}, \quad \sin z'_{,} = -\cos z';$$

de plus

$$\xi = \xi''_{,,},$$

et

$$\cos z'_{,,} = -\sin z'_{,} \quad \sin z'_{,} = -\cos z'_{,}.$$

On obtient alors

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} R' &= -D\,\frac{\sin(\iota' - \psi')}{\sin(\iota' + \xi'_{,})}\left[\frac{\cos(\iota' - \psi')}{\cos(\iota' - \xi'_{,})}\sin\gamma'\sin z'_{,} - \cos\gamma'\cos z'_{,}\right],\\ R''_{,} &= -D'\,\frac{\sin(\iota' - \psi')}{\sin(\iota' + \xi'_{,})}\left[\frac{\cos(\iota' + \psi')}{\cos(\iota' - \xi'_{,})}\sin\gamma'\cos z'_{,} - \cos\gamma'\sin z'\right];\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} R'_{,,} &= +D''\,\frac{\sin(\iota'' - \psi'')}{\sin(\iota'' + \xi''_{,,})}\left[\frac{\cos(\iota'' - \psi'')}{\cos(\iota'' - \xi''_{,,})}\sin\gamma''\cos z'_{,,} - \cos\gamma''\sin z'_{,,}\right],\\ R''_{,,} &= -D''\,\frac{\sin(\iota'' - \psi'')}{\sin(\iota'' + \xi''_{,,})}\left[\frac{\cos(\iota'' + \psi'')}{\cos(\iota'' - \xi''_{,,})}\sin\gamma''\sin z'_{,,} + \cos\gamma''\cos z''_{,,}\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie la première des équations (1) par $\sin\gamma'$ et la seconde par

$$\sin\psi'\cos\psi'\sin\gamma' - \sin^2\psi'\tang p',$$

et si l'on ajoute les deux équations, on obtient, en ayant égard aux relations (16), § XXIII, P′ sous une forme qui convient aux calculs approximatifs de sa valeur. On obtient aussi d'une manière analogue S′, P″ et S″.

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} P' &= \left\{\frac{D'(2\sin\psi'\cos\psi'\sin\gamma' - \sin^2\psi'\tang p')\sin\gamma' - [R'_{,}\cos z'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,}) - R''_{,}\cos z'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,})]\cos\gamma'}{\sin(\iota' + \psi')\cos(\iota' - \psi')(\sin\gamma' - \sin^2\psi'\tang p')}\right\},\\ S' &= -\left[\frac{2D'\sin\psi'\cos\psi'\cos\gamma' + R'_{,}\cos z'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,}) - R''_{,}\cos z'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,})}{\sin(\iota' + \psi')}\right];\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} P'' &= \left\{\frac{D''(2\sin\psi''\cos\psi''\sin\gamma'' - \sin^2\psi''\tang p'')\sin\gamma'' - [R'_{,,}\cos z'_{,,}\sin(\psi'' - \xi''_{,,}) - R''_{,,}\cos z'_{,,}\sin(\psi'' - \xi''_{,,})]\cos\gamma''}{\sin(\iota'' + \psi'')\cos(\iota'' - \psi'')(\sin\gamma'' - \sin^2\psi''\tang p'')}\right\},\\ S'' &= \left[\frac{2D''\sin\psi''\cos\psi''\cos\gamma'' - R'_{,,}\cos z'_{,,}\sin(\psi'' - \xi''_{,,}) + R''_{,,}\cos z'_{,,}\sin(\psi'' - \xi''_{,,})}{\sin(\iota'' + \psi'')}\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on ne veut conserver dans ces valeurs que la première puissance de la différence des axes d'élasticité, on devra mettre pour $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ leurs valeurs approchées déduites des équations (5) et (6).

Les formules de (3) à (8) deviennent imaginaires quand les angles d'incidence sont compris dans les limites de la réflexion totale. On peut, dans ce cas, déterminer les intensités réfléchies, comme on l'a fait dans le cas des cristaux à un seul axe.

J'appliquerai encore les formules (7) et (8) au cas du passage de la lumière à travers un milieu compris entre deux plans parallèles; car ces formules sont importantes pour la théorie des couleurs que présentent les lames minces dans la lumière polarisée. Alors D′ et D″ sont deux rayons conjugués qui sont dérivés d'un même rayon incident, et leurs valeurs sont données par les formules (2), § XVII. Alors aussi

$$x' = x', \quad \varphi' = \varphi, \quad \varphi'' = \varphi, \quad y' = x',$$
$$y'' = x'', \quad p' = q', \quad p'' = q'', \quad \xi'_{,} = \xi'_{,},$$
$$\xi''_{,} = \xi''_{,,}, \quad z'_{,} = z'_{,,}, \quad z''_{,} = z''_{,,};$$

je designerai les angles $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $z'_{,}$, $z''_{,}$ par ξ', ξ'', z', z''.

Ces substitutions faites, on obtient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}' &= \left\{\frac{\mathrm{D}'(2\sin\varphi'\cos\varphi'\sin x' - \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q')\sin x' - [\mathrm{R}_{,}\cos z_{,}\sin(\varphi'-\xi_{,}) - \mathrm{R}'_{,}\cos z'_{,}\sin(\varphi'-\xi'_{,})]\cos x'}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')(\sin x' - \sin^2\varphi'\,\mathrm{tang}\,q')}\right\}, \\ \mathrm{S}' &= -\left[\frac{2\mathrm{D}'\sin\varphi'\cos\varphi'\cos x' + \mathrm{R}'_{,}\cos z'_{,}\sin(\varphi'-\xi'_{,}) - \mathrm{R}_{,}\cos z_{,}\sin(\varphi'-\xi_{,})}{\sin(\varphi+\varphi')}\right]; \end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}'' &= \left\{\frac{\mathrm{D}''(2\sin\varphi''\cos\varphi''\sin x'' - \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q'')\sin x'' - [\mathrm{R}_{,,}\cos z_{,}\sin(\varphi''-\xi_{,}) + \mathrm{R}'_{,,}\cos z'_{,}\sin(\varphi''-\xi'_{,})]\cos x''}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')(\sin x'' - \sin^2\varphi''\,\mathrm{tang}\,q'')}\right\}, \\ \mathrm{S}'' &= \left[\frac{2\mathrm{D}''\sin\varphi''\cos\varphi''\cos x'' - \mathrm{R}'_{,,}\cos z'_{,}\sin(\varphi''-\xi'_{,}) + \mathrm{R}''_{,,}\cos z''_{,}\sin(\varphi''-\xi''_{,})}{\sin(\varphi+\varphi'')}\right], \end{aligned}\right.$$

où pour D′ et D″ on doit mettre les valeurs tirées de l'équation (2), § XVII.

Si l'on veut seulement avoir égard à la première puissance de $\pi^2 - \mu^2$ dans les équations (9) et (10), on doit poser

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_{,} &= -\mathrm{D}'\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\sin x'\sin z' - \cos x'\cos z'\right], \\ \mathrm{R}'_{,} &= -\mathrm{D}'\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\sin x'\cos z' - \cos x'\sin z'\right]; \end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_{,,} &= +\mathrm{D}''\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\cos x'\sin z' - \sin x'\cos z'\right], \\ \mathrm{R}'_{,,} &= -\mathrm{D}''\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\cos x'\cos z' + \sin x'\sin z'\right]. \end{aligned}\right.$$

Mais, en négligeant, dans les équations (9) et (10), tout ce qui dépend de la différence des axes d'élasticité, on conserve seulement le terme qui dépend de leur position, on obtient, en remplaçant D' et D'' par leurs valeurs,

$$P' = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[\frac{P\sin x'}{\cos(\varphi-\varphi')} - S\cos x'\right]\sin x',$$

$$S' = -\frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\left[\frac{P\sin x'}{\cos(\varphi-\varphi')} - S\cos x'\right]\cos x',$$

$$P'' = +\frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[\frac{P\cos x'}{\cos(\varphi-\varphi')} + S\sin x'\right]\cos x',$$

$$S'' = +\frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\left[\frac{P\cos x'}{\cos(\varphi-\varphi')} + S\sin x'\right]\sin x'.$$

Ce sont les mêmes formules approchées que j'ai déduites de considérations directes dans un Mémoire sur les couleurs des cristaux à deux axes dans la lumière polarisée (*Pogg. Ann. d. Ph., Bd.* XXXIII, page 271).

NOTE

SUR UNE FORMULE DE COMBINAISONS;

PAR E. CATALAN.

Ayant remarqué, dans l'un des derniers numéros de ce Journal (page 169), l'énoncé d'un intéressant problème de probabilités, je cherchai à comprendre les calculs de l'auteur, et à refaire ces calculs. Mais je m'aperçus bientôt qu'il s'y est glissé des erreurs, lesquelles, en s'accumulant, rendent fausse la formule principale. Comme il ne m'a pas été possible de saisir parfaitement la marche suivie par l'auteur, j'ai cherché à remplacer sa formule par une autre [*].

Rappelons d'abord deux formules fréquemment employées dans la théorie des combinaisons.

1. En représentant par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p, la formule du binôme donne

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + C_{m,i}\,x^i + \ldots,$$

$$(1+x)^{m'} = 1 + \frac{m'}{1}x + \frac{m'(m'-1)}{1.2}x^2 + \ldots + C_{m',i'}\,x^{i'} + \ldots$$

Si l'on multiplie les deux développements, et que l'on ordonne le résultat par rapport à x, le terme contenant x^p, dans $(1+x)^{m+m'}$, sera égal à la somme des produits deux à deux des termes tels que $C_{m,i}\,x^i$, $C_{m',i'}\,x^{i'}$, dans lesquels la somme $i+i'$ des exposants est égale à p. Donc

$$C_{m+m',p} = \sum C_{m,i} \times C_{m',i'}.$$

[*] Ma Note a été lue à la Société Philomatique au mois de juillet dernier. Depuis, et sans qu'il ait eu connaissance de cette lecture, M. le capitaine Coste a rectifié les erreurs dont je parle ci-dessus.

ou

(1) $$C_{m+m',p} = \sum_0^p C_{m,i} \times C_{m',p-i}.$$

Cette formule suppose $p < m$, $p < m'$.

2. La formule du binôme donne aussi

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + C_{m+i-1,i}\,x^i + \ldots,$$
$$\frac{1}{(1-x)^{m'}} = 1 + \frac{m'}{1}x + \frac{m'(m'+1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + C_{m'+i'-1,i'}\,x^{i'} + \ldots$$

On aura donc, en faisant le produit, et en supposant $i+i'=p$,

(2) $$C_{m+m'+p-1,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{m'+p-i-1,m'-1}.$$

3. En prenant successivement $m' = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient, à l'aide de cette dernière formule, celles qui suivent :

(3) $$\left\{\begin{aligned} C_{m+p,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1}, \\ C_{m+p+1,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+1,1}, \\ C_{m+p+2,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+2,2}, \\ C_{m+p+3,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+3,3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

4. Proposons-nous actuellement de transformer la quantité

$$A = C_{m,m-p} \times C_{m'+1,p'} + C_{m-1,m-p} \times C_{m'+2,p'} + \ldots + C_{m-p,m-p} \times C_{m'+p+1,p'},$$

ou

(4) $$A = \sum_0^p C_{m-i,m-p} \times C_{m'+i+1,p'}.$$

Pour comprendre le but de la transformation cherchée, il faut supposer que m, m' et p soient de grands nombres, et que p' soit un petit nombre. Il est bien évident que le calcul numérique de A serait impraticable ; or nous voulons remplacer cette quantité par une autre équivalente, mais composée de $p'+1$ termes seulement.

A l'aide des formules (3), le facteur $C_{m'+i+1,p'}$ peut se transformer en une somme. Supposons successivement $i=0, 1, 2, \ldots, p$; nous aurons

$$\begin{aligned}
C_{m'+1,p'} &= \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'},\\
C_{m'+2,p'} &= \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'} \times C_{l+1,1},\\
C_{m'+3,p'} &= \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'} \times C_{l+2,2}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{m'+p+1,p'} &= \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'} \times C_{l+p,p}.
\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans la formule (4); elle deviendra

$$\begin{aligned}
A = {} & C_{m,m-p} \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'} + C_{m-1,m-p} \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'} \times C_{l+1,1} + \ldots\\
& + C_{m-p,m-p} \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-l,m'-p'} \times C_{l+p,p}.
\end{aligned}$$

Avec un peu d'attention, on verra que cette quantité peut se mettre sous la forme

$$A = \sum\nolimits_0^{p'} (C_{m,m-p} + C_{m-1,m-p} \times C_{l+1,1} + \ldots + C_{m-p,m-p} \times C_{l+p,p}) C_{m'-l,m'-p'}.$$

D'après l'équation (2), la quantité entre parenthèses équivaut à $C_{m+l+1,p}$. Donc

(5) $$A = \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-i,m'-p'} \times C_{m+i+1,p}.$$

Telle est la formule à laquelle nous voulions arriver.

5. En rapprochant les valeurs (4) et (5), on a cette équation très-symétrique,

(6) $$\sum\nolimits_0^{p} C_{m-i,m-p} \times C_{m'+i+1,p'} = \sum\nolimits_0^{p'} C_{m'-i,m'-p} \times C_{m+i+1,p}.$$

6. Comme application et vérification, prenons $m=10$, $p=7$, $m'=10$, $p'=4$; nous devrons avoir

$$\sum\nolimits_0^{7} C_{10-i,3} \times C_{11+i,4} = \sum\nolimits_0^{4} C_{10-i,6} \times C_{11+i,7}.$$

Le premier membre, étant développé, devient

$$\frac{10.9.8}{1.2.3}\cdot\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} + \frac{9.8.7}{1.2.3}\cdot\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{13.12.11.10}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{7.6.5}{1.2.3}\cdot\frac{14.13.12.11}{1.2.3.4} + \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} + \frac{5.4.3}{1.2.3}\cdot\frac{16.15.14.13}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{17.16.15.14}{1.2.3.4} + \frac{18.17.16.15}{1.2.3.4} = 120.330 + 84.495$$
$$+ 56.715 + 35.1001 + 20.1365 + 10.1820 + 4.2380 + 3060$$
$$= 39600 + 41580 + 40040 + 35035 + 27300 + 18200$$
$$+ 9520 + 3060 = 214\,335.$$

Le second membre a pour valeur

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} + \frac{9.8.7}{1.2.3}\cdot\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+ 7.\frac{14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{15.14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 210.330$$
$$+ 84.792 + 28.1716 + 7.3432 + 6435 = 69300 + 66528$$
$$+ 48048 + 24024 + 6435 = 214335 \text{ (*)}.$$

7. La formule 6 démontre une propriété remarquable des puissances négatives entières d'un binôme $(1 - x)$.

Remplaçons $m - p + 1$ par q, et $m' - p' + 1$ par q'. Cette formule pourra d'abord être mise sous la forme

$$\sum_0^{p'} C_{p+q-1+i,\,p-i} \times C_{p'+q'+i,\,q'+i} = \sum_0^{p} C_{p'+q'-1-i,\,p'-i} \times C_{p+q+i,\,q+i}.$$

(*) La formule citée au commencement de cette Note donnerait, au lieu du second membre que nous venons de calculer, la quantité

$$\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}\left[\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4} + \frac{12}{5}\cdot\frac{8.9.10}{1.2.3} + \frac{12.13}{5.6}\cdot\frac{8.9}{1.2} + \frac{12.13.14}{5.6.7}8 + \frac{12.13.14.15}{5.6.7.8}\right]$$
$$= 330\left[330 + 288 + \frac{936}{5} + \frac{416}{5} + \frac{39}{2}\right] = 330.618 + 66.1352 + 165.39$$
$$= 103\,940 + 89232 + 6435 = 199607.$$

Posons ensuite

$$\frac{1}{1-x^{q}} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x^{p'+1}} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_q x^q + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x^{q'}} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{p'} x^p + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x^{p'+1}} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_q x^q + \ldots$$

Nous aurons, au moyen de l'équation ci-dessus,

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_p b_q + a_{p-1} b_{q+1} + \ldots + a_1 b_{p+q-1} + b_{p+q} = c_p d_q + c_{p-1} d_{q+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + c_1 d_{p+q-1} + d_{p+q}. \end{array} \right.$$

Cette équation exprime la propriété annoncée.

8. Afin d'arriver à un résultat symétrique, nous avons transformé le facteur $C_{n+q+1,p}$ de la formule (4). Or, comme ce facteur peut, de différentes manières, être égalé à une somme de produits, la formule (6) peut également être remplacée par d'autres formules que nous n'indiquerons pas ici, parce qu'elles sont plus compliquées que cette dernière.

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE;

Par M. BESGE.

La méthode suivie par M. Ferriot, pour la détermination de ce centre de gravité, me paraît inexacte. Dans les proportions dont ce savant fait usage (*voir* page 62), on a sans doute le droit de poser $y' = y_1$; x' prendra alors de lui-même, comme on le dit, une valeur convenable, mais en même temps il perdra la signification simple que l'auteur lui attribue quand il traduit en géométrie le résultat final obtenu. Au surplus, M. Giulio a donné, dans le tome IV de ce Journal, une formule bien élégante pour trouver la distance z du centre de gravité d'une aire sphérique quelconque ω au plan d'un grand cercle; en désignant par α la projection de ω sur ce plan, et par r le rayon de la sphère, il prouve que

$$z = \frac{\alpha r}{\omega}.$$

M. Giulio démontre cette formule à l'aide du calcul intégral, mais il est bien facile d'y arriver par la considération des infiniment petits, en observant que la distance d'un point de la sphère au plan d'un grand cercle, exprimée en parties du rayon, mesure le cosinus de l'angle que le plan tangent à la sphere au point dont on s'occupe fait avec le plan du grand cercle; d'où il suit que le moment de chaque élément infiniment petit de l'aire ω est égal au produit du rayon par la projection de cet élément de surface. De là résulte la formule de M. Giulio, qui se trouve ainsi établie par une méthode toute semblable à celle dont on se sert ordinairement pour le centre de gravité d'un arc de cercle.

NOTE

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL PESANT SUR UNE SPHÈRE;

Par M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

Lorsqu'un point pesant se meut sur une sphère, la courbe qu'il décrit présente une suite de sommets dont chacun divise la courbe en deux parties symétriques, et dont les ordonnées verticales sont alternativement maximum et minimum. (*Mécanique analytique*, tome II.)

Si le mobile s'écarte très-peu de la verticale passant par le centre de la sphère, la différence des azimuts [*] de deux sommets consécutifs diffère très-peu de 90°, de façon que la projection horizontale du mobile doit décrire une courbe à deux axes perpendiculaires entre eux et présentant la forme d'une ellipse.

Mais quand le point pesant s'écarte sensiblement de la verticale, l'angle dont il vient d'être question diffère sensiblement aussi de 90°, et si la courbe décrite par la projection horizontale du mobile présente encore l'apparence d'une ellipse, le grand axe de cette ellipse se déplace à chaque révolution. Il est facile de voir que le mouvement de ce grand axe doit être de même sens que le mouvement du mobile, si la différence entre les azimuts de deux sommets consécutifs surpasse 90°, et que le contraire doit avoir lieu si cette différence est inférieure à 90°.

Or de ces deux cas, le premier est le seul que l'on observe dans la nature, quelle que soit la vitesse initiale imprimée au mobile. Ayant

---

[*] J'appelle azimut d'un point l'angle que fait avec un plan vertical fixe, le plan passant par ce point et par la verticale du centre de la sphère.

cherché à déduire ce résultat de la théorie, j'y parvins par le calcul suivant.

Nommons a le rayon de la sphère, g l'intensité de la pesanteur, b et c deux constantes. Désignons par ψ l'azimut du mobile, par z sa distance au plan horizontal mené par le centre de la sphère. On aura (*Mécanique* de Poisson, tome Ier, page 390)

$$d\psi = \frac{\pm\, ac\, dz}{(a^2-z^2)\sqrt{(a^2-z^2)(2gz+b)-c^2}}.$$

Si l'on appelle ζ la valeur initiale de z, k la vitesse initiale, ε l'angle que la direction de cette vitesse fait avec la tangente horizontale menée à la sphère par le point de départ du mobile, on trouvera (même ouvrage)

$$b = k^2 - 2g\zeta, \quad c = k\sqrt{a^2-\zeta^2}\cos\varepsilon,$$

et la valeur de $d\psi$ deviendra

$$d\psi = \frac{\pm\, ak\sqrt{a^2-\zeta^2}\cos\varepsilon\, dz}{(a^2-z^2)\sqrt{(a^2-z^2)[k^2+2g(z-\zeta)]-k^2(a^2-\zeta^2)\cos^2\varepsilon}}.$$

Dans le polynome du troisième degré soumis au radical, faisons successivement

$$z = -\infty, \quad z = -a, \quad z = \zeta, \quad z = a;$$

les signes des résultats seront respectivement

$$+, \qquad -, \qquad +, \qquad -.$$

Il en résulte que ce polynome s'annulle pour trois valeurs réelles de z, l'une α comprise entre a et ζ, l'autre β comprise entre ζ et $-a$, la troisième $-\gamma$ comprise entre $-a$ et $-\infty$.

Posons donc

$$(a^2-z^2)[k^2+2g(z-\zeta)] - k^2(a^2-\zeta^2)\cos^2\varepsilon = 2g(\alpha-z)(z-\beta)(z+\gamma),$$

d'où

$$2g(\alpha+\beta-\gamma) = -(k^2-2g\zeta),$$
$$2g[(\alpha+\beta)\gamma-\alpha\beta] = 2ga^2,$$
$$-2g\alpha\beta\gamma = a^2(k^2-2g\zeta) - k^2(a^2-\zeta^2)\cos^2\varepsilon.$$

De ces trois égalités, la deuxième donne

$$\gamma = \frac{a^2 - \alpha\beta}{\alpha - \beta};$$

par suite, on conclut de la première

$$k^2 - 2g\zeta = \frac{2g(a^2 - \alpha\beta - \alpha\beta)}{\alpha + \beta};$$

et enfin la troisième donne

$$k^2(a^2 - \zeta^2)\cos^2\varepsilon = \frac{2g(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}{\alpha + \beta}.$$

Substituant dans la valeur de $d\psi$, elle devient

$$d\psi = \frac{\pm a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}\, dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha + \beta)z + a^2 + \alpha\beta]}}.$$

On voit par cette formule que la valeur maximum de z est α, la valeur minimum β, et que l'angle Ψ variant toujours dans le même sens en vertu du principe des aires, l'ordonnée z atteint alternativement ce maximum et ce minimum. De plus, la différence des azimuts qui répondent à un maximum et à un minimum consécutifs est

$$\Psi = \int_\beta^\alpha \frac{a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}\, dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha + \beta)z + a^2 + \alpha\beta]}},$$

et il s'agit de démontrer que l'angle Ψ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

Pour cela, remarquons que z variant de β à α, le facteur $(\alpha + \beta)z + a^2 + \alpha\beta$ varie de $a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ à $a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2$, et par conséquent, en nommant μ une moyenne entre $\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$ et $\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}$, on a

$$\Psi = \frac{a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}}{\mu}\int_\beta^\alpha \frac{dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}},$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$\Psi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{(a + \alpha)(a + \beta)} + \sqrt{(a - \alpha)(a - \beta)}}{\mu}.$$

L'angle Ψ est donc compris entre les deux limites

$$P = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+\alpha)(a+6)} + \sqrt{(a-\alpha)(a-6)}}{\sqrt{a^2 + 2\alpha 6 + 6^2}},$$

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+\alpha)(a+6)} + \sqrt{(a-\alpha)(a-6)}}{\sqrt{a^2 + 2\alpha 6 + \alpha^2}}.$$

Mais ces formules peuvent s'écrire

$$P = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2 - 6^2 + 2\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-6^2)}}{a^2 - \alpha^2 + (\alpha+6)^2}},$$

$$Q = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2 - \alpha^2 + 2\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-6^2)}}{a^2 - 6^2 + (\alpha+6)^2}};$$

et si l'on remarque que $a^2 - \alpha^2$, $a^2 - 6^2$ sont des quantités positives, on en conclura que P et Q surpassent $\frac{\pi}{2}$. Donc aussi l'angle Ψ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME VOLUME.

Du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe,

par M. Briot

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Sur le centre de gravité d'un triangle sphérique quelconque par L. A. S. Ferriot.

Fig. 1.

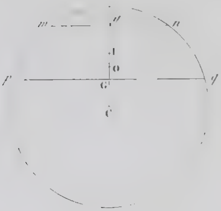


Fig. 2.

Fig. 5.

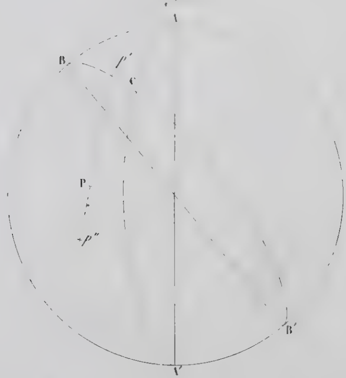


Fig. 3.

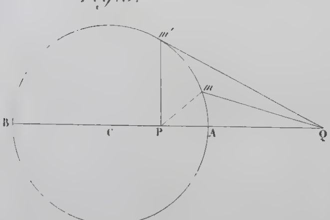
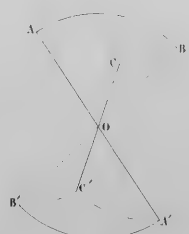


Fig. 4.



Du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, par M. Briot.

Fig. 1.

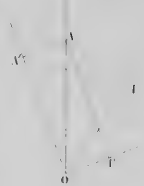


Fig. 2.

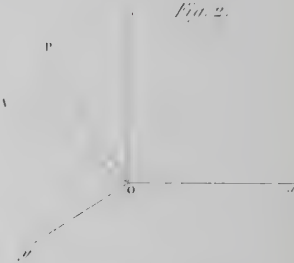


Fig. 3.

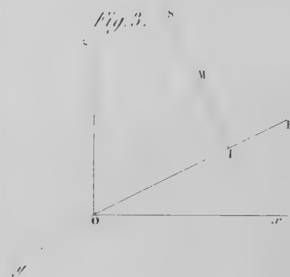


Fig. 4.

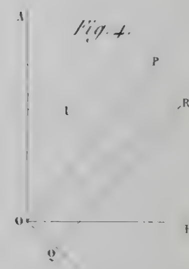


Fig. 5.

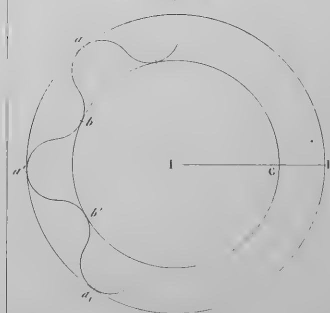


Fig. 6.